


REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Plana. IV. 86

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE.

CET OUVRAGE SE TROUVE AUSSI :

à Toulouse............ chez CHARPENTIER.

LEIPZIG, chez **MICHELSEN**.

LONDRES, chez **DULAU** et Cie.

Genève............	chez	CHERBULIEZ.
Pétersbourg..........	—	GRAFF.
Turin............	—	BOCCA. PIC.
Vienne............	—	ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE,

OU

EXPOSITION

DES MÉTHODES TRIGONOMÉTRIQUES ET ASTRONOMIQUES,

APPLICABLES

A LA MESURE DE LA TERRE, ET A LA CONSTRUCTION DU CANEVAS DES CARTES TOPOGRAPHIQUES;

PAR L. PUISSANT,

Colonel d'État-Major en retraite, chef de la première section du Dépôt général de la Guerre,
membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France;
de celle des Sciences et Lettres de Palerme; de l'Académie des Sciences militaires en Suède, etc.

TROISIÈME ÉDITION.

TOME DEUXIÈME.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1842

TABLE DES CHAPITRES

DU TOME DEUXIÈME.

LIVRE IV.

PROBLÈMES D'ASTRONOMIE.

LIVRE V.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

LIVRE VI.

QUESTIONS DE HAUTE GÉODÉSIE.

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES DU TOME DEUXIÈME ET DERNIER.

Supplément à l'ERRATA du tome I.

Page 17, ligne 16, l'an 45, *lisez* l'au — 45.

Idem, ligne 21, l'année 44, *lisez* l'année — 46.

Page 276, ligne dernière, $a = 84^\circ\,0'\,45'',9$, *lisez* $a = 84^\circ\,0'\,44'',9$.

Page 278, ligne 5, $\mp \frac{a}{1-a}$ *lisez* $\mp \frac{ar}{1-a}$.

Idem, ligne 8, $\pm$ R, *lisez* $\mp$ R.

Page 327, ligne 1 en remontant, au dénominateur du dernier terme, 8.12, *lisez* $8^2.12^2$.

Page 342, ligne 16, relation (7), *lisez* relation (8).

Page 384, deuxième colonne, ligne 2, 39″,05, *lisez* 39″,5.

Page 427, ligne 3 en remontant, $m = \frac{a -}{a + b}$, *lisez* $m = \frac{a - b}{a + b}$.

Page 508, vis-à-vis 59°, deuxième colonne, 9.000,300, *lisez* 9.0000300.

ERRATA du tome II.

Page 66, lignes 12 et 14, l'angle ω, *lisez* l'angle θ.

Page 105, ligne 19, + 2″,648, *lisez* + 2″,643.

Page 341, ligne 2 en remontant, ceux que nous avons obtenus, *lisez* celles que nous avons obtenues.

Page 362, ligne 3, cet observatoire, *lisez* cette ville.

Page 377, ligne 3, d^2u', *lisez* $d^2u'_1$.

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE.

LIVRE QUATRIÈME.

PROBLÈMES D'ASTRONOMIE.

CHAPITRE PREMIER.

USAGE DE LA CONNAISSANCE DES TEMPS ET DES TABLES DU SOLEIL, POUR DÉTERMINER LES ÉLÉMENTS DES CALCULS ASTRONOMIQUES.

238. Il serait sans doute à désirer que la division du cercle en 400 grades et celle du jour en 10 heures fussent en usage en Astronomie comme la première l'est en France dans les opérations géodésiques, parce que les calculs n'en seraient que plus faciles et plus prompts; mais puisque les astronomes paraissent, moins que jamais, disposés à introduire cette innovation dans leurs calculs usuels et dans la construction de leurs tables, à cause de la nécessité où ils sont de comparer continuellement l'état présent du ciel à celui des temps passés, nous emploierons dorénavant la division du cercle en 360 degrés et celle du jour en 24 heures.

Avant les nouveaux changements adoptés par le Bureau des Longitudes, dans la rédaction de la *Connaissance des Temps*, et opérés

entièrement dans le volume de l'année 1835, la plupart des quantités variables étaient calculées pour midi vrai à Paris et pour chaque jour de l'année, principalement celles qui changent avec lenteur et assez régulièrement; mais les principaux éléments lunaires, qui varient plus rapidement, étaient donnés de 12 heures en 12 heures de temps vrai. Maintenant les nombres insérés dans cette Éphéméride se rapportent au temps moyen. Dans les questions d'Astronomie l'on a souvent besoin de trouver la valeur d'une de ces quantités, pour une époque intermédiaire à celles auxquelles correspondent les nombres fournis par les tables : or, on l'obtient en supposant que ces nombres varient proportionnellement au temps, ou bien, pour plus de précision, en appliquant la méthode générale d'interpolation exposée à l'art. **106**. Des exemples éclairciront ces deux méthodes; mais avant de les donner, indiquons comment, à défaut de tables de conversion, l'on réduit les degrés de l'équateur en temps, et réciproquement le temps en parties de l'équateur.

1°. Réduire en temps, et à raison de 15° par heure, l'arc de 48° 17′ 15″,6.

Puisque $15 = \frac{60}{4}$, multipliez par 4 les degrés, les minutes et les secondes; alors le premier, le second et le troisième produit seront des minutes, des secondes et des tierces de temps. D'après cette règle, évidente par elle-même, on voit que

	45°	font.	3^h
	3	. . . . . .	0.12^m
	17′	. . . . . .	1.8^s
	15″,6	. . . . . .	$1.2^t,4.$
donc. . . .	48° 17′ 15″,6	font.	$3^h 13^m 9^s 2^t,4.$

Mais 60 tierces faisant 1^s, on a, en convertissant les tierces en décimales de secondes, $48° \, 17' \, 15'',6 = 3^h \, 13^m \, 9^s,04$.

2°. Réduire en degrés $3^h \, 13^m 9^s,04$.

L'opération étant l'inverse de la précédente, prenez le quart des minutes et des secondes; le premier et le second quotient seront des heures et des minutes. Ensuite, multipliez par 6 les dixièmes de seconde de degré, pour les convertir en tierces, et prenez le quart du

produit, vous aurez des secondes de degré. Ainsi, en opérant sur le nombre proposé et multipliant les heures par 15, on a

	3^h	...... =	45°
	13^m	...... =	$3.15'$
	9^s	...... =	$2.15''$
	$0,04$	...... =	$0,6.$
Donc. . .	$3^h 13^m 9^s,04$	...... =	$48^o 17' 15'',6.$

Callet a donné, à la fin de ses *Tables trigonométriques*, deux petites tables au moyen desquelles on peut se dispenser de faire ce calcul ; mais il vaut encore mieux recourir à la table VI de la *Connaissance des Temps*, laquelle a pour titre : *Réduction du temps en parties de l'équateur ou en degrés de longitude terrestre*. Revenons maintenant à notre objet.

Calcul de la déclinaison du Soleil pour un méridien autre que celui de Paris ; détermination des éléments lunaires.

239. Ier EXEMPLE. On demande la déclinaison du Soleil le 20 mars 1803, à midi vrai, à Porto-Ferraio (île d'Elbe), dont la longitude orientale par rapport au méridien de Paris, est de $7^o 59' 20'',2$.

Puisque Porto-Ferraio est à l'orient de Paris, et que la longitude $7^o 59' 20'',2$, réduite en temps à raison de 15° par heure, est de $31^m 57^s,7$; il s'ensuit que lorsqu'il est midi à Porto-Ferraio le 20 mars, il est $31^m 57^s,7$ de moins à Paris, c'est-à-dire $23^h 28^m 2^s,3$, le 19 mars, *temps astronomique*. La question est donc réduite à trouver, pour cette heure, la déclinaison du Soleil.

D'après la *Connaissance des Temps*, la déclinaison australe du Soleil à Paris, le 19 mars 1803, à midi vrai	$0^o 48' 53''$ A
Déclinaison le 20 mars.	$0.25.11$
Variation diurne en déclinaison. .... —	$0.23.42$
Partie proportionnelle pour $23^h 28^m 2^s,3$. ..... —	$0^o 23' 10'',4$
puisqu'en 24^h la déclinaison diminue de $0^h 23^m 42^s$.	
Déclinaison du ⊙, le 19, à Paris.	$0.48.53$
Déclinaison du ⊙, à Porto-Ferraio, le 20 mars 1803, à midi	$0.25.42,6$

II[e] EXEMPLE. Trouver la déclinaison du Soleil, le 21 mars 1803, à Porto-Ferraio.

Déclinaison du ☉ à Paris, pour midi, 20 mars. . .		0° 25′ 11″
Déclinaison le 21.		0. 1.28
Variation diurne.	—	0.23.43
Partie proportionnelle pour 23ʰ 28ᵐ 2ˢ,3.	—	0° 23′ 11″ ,4
Déclinaison le 20, à Paris.		0.25.11
Déclin. austr. le 21 mars, à midi, à Porto-Ferraio .		0. 1.59 ,6

III[e] EXEMPLE. Trouver la déclinaison du Soleil, le 22 mars 1803, à Porto-Ferraio.

Déclinaison du ☉ à Paris, pour midi, le 21 mars 1803	0° 1′ 28″	Australe.
Déclinaison le 22 mars	0.22.13	Boréale.
Changement en déclinaison pour 24ʰ . . .	0.24.41	
(Ces deux déclinaisons s'ajoutent parce qu'elles sont de dénominations différentes.)		
Partie proportionnelle pour 23ʰ 28ᵐ 2ˢ,3. .	0° 23′ 9″,4	
Déclinaison du ☉ à Paris, le 21 mars. . .	0. 1.28 ,0	
Déclinaison boréale du ☉, pour Porto-Ferraio, à midi, le 22 mars.	0.21.41 ,4	

Ainsi la variation diurne du 21 au 22 mars, à midi, à Porto-Ferraio comme à Paris, était de 23′ 41″.

Dans la *Connaissance des Temps* de 1835, et dans celle des années postérieures, les déclinaisons du Soleil se rapportent à midi moyen ; et, comme il est quelquefois nécessaire de les avoir pour midi vrai, on évalue le mouvement de cet astre pour le temps qui s'est écoulé entre ce midi vrai et le midi moyen correspondant, c'est-à-dire pour l'intervalle marqué par l'équation du temps.

Par exemple, quelle était à Paris la déclinaison du ☉ à midi vrai le 1[er] mars 1835?

On trouve que cette déclinaison était, à midi moyen, de 7° 44′ 40″,2 A, et qu'elle diminuait de 22′48″,2 en 24 heures moyennes, ce qui fait

57″,01 en 1^h et 12″,06 en $12^m 42^s$,41 qui sont l'équation du temps. Or cette équation étant additive, ou, ce qui est de même, le temps moyen étant en avance sur le temps vrai, la correction de déclinaison 12″,06 devra s'ajouter à 7° 44′ 40″,2; on aura donc 7° 44′ 52″,26 pour la déclinaison cherchée.

240. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les déclinaisons croissent proportionnellement au temps, supposition qui peut être admise si les résultats qu'on a en vue d'obtenir n'exigent pas une plus grande exactitude. Dans le cas contraire, il sera nécessaire d'avoir égard aux différences secondes.

Par exemple, suivant la *Connaissance des Temps* de 1813, on a

DÉCLINAISON DU ☉ A MIDI VRAI.		DIFFÉRENCES 1res.	DIFFÉRENCES 2es.
Le 1er mars.............	7° 36′ 42″		
2	7.13.52	— 22′ 50″	
3	6.50.55	— 22.57	— 7″
4	6.27.53	— 23.02	— 5
18	0.59. 5		
19	0.35.23	— 23.42	
20	0.11.42	— 23.41	+ 1

On voit donc que les différences secondes sont fort petites aux environs des équinoxes, et qu'il est alors permis de supposer la variation de déclinaison proportionnelle au temps, dans l'intervalle de 24 heures. Mais dans toute autre circonstance, lorsque l'on connaîtra les déclinaisons du Soleil à midi, pour plusieurs jours de suite, on aura celle qui correspond à i heures de temps solaire, à l'aide de la formule générale d'interpolatiou de l'art. **106**, savoir :

$$\text{déclinaison cherchée} = D + \frac{idD}{h} + \frac{i}{2h^2}(h-i)\,d^2D\,,$$

dans laquelle D exprime la déclinaison pour le midi qui précède le

temps i, dD les différences premières, d^2D let différences secondes, enfin $h = 24$, ou le nombre d'heures comprises entre deux midis consécutifs. Cette règle suppose que les jours solaires vrais sont égaux, ce qui n'est pas tout-à-fait exact.

Application. Trouver la déclinaison du Soleil pour le 2 mars 1813, à 15 heures, à Paris. On a, d'après le tableau précédent et la notation actuelle, et en prenant, pour plus de précision, la moyenne des deux différences secondes consécutives qui diffèrent un peu entre elles,

$$h = 24^h, \quad i = 15^h, \quad dD = -22'57'', \quad d^2D = -\left(\frac{7+5}{2}\right) = -6\,;$$

de là

$$\begin{aligned} \text{décl. cherchée} &= 7^\circ 13' 52'' - \frac{15}{24}(22'57'') - \frac{15}{2(24)^2}(9)(6) \\ &= 7^\circ 13' 52'' - 14'20'',62 - 0'',70 \\ &= 7^\circ 13' 52'' - 14'21'',32 = 6^\circ 59' 30'',68. \end{aligned}$$

Le second terme est la partie proportionnelle à 15^h, et n'est relatif qu'aux différences premières ; le troisième terme est la correction qu'il s'agissait de trouver.

Les différences premières et deuxièmes se prennent avec leurs signes ; ainsi, dans l'exemple ci-dessus, dD et d^2D sont négatives.

Si le temps i était donné en heures, minutes et secondes, il faudrait réduire les minutes et les secondes en décimales d'heure.

241. Cette méthode d'interpolation s'applique aux nombres quelconques qui correspondent à des époques équidistantes. Pour seconde application, cherchons quel a été le lieu de la Lune le 22 mai 1835 à 4^h du matin, à Paris.

La *Connaissance des Temps* de cette année-là donne

LIEU DE LA LUNE.	DIFFÉRENCES 1res.	DIFFÉRENCES 2es.	DIFFÉR. 3es.
Long. ☾ le 21 à midi . . 353° 18′ 12″,4			
le 21 à minuit. 359.23. 9,5	+ 6° 4′ 57″,1		
le 22 à midi . . 5.25.12,8	+ 6. 2. 3,3	— 2′ 53″,8	
le 22 à minuit. 11.24.50,9	+ 5.59.38,1	— 2.25,2	+ 28″6
le 23 à midi . . 17.22.30,3	+ 5.57.39,4	— 1.58,7	+ 26,5
Latit. ☾ le 21 à midi . . — 5. 6.19,2			
le 21 à minuit. — 4.55.57,6	+ 10.21,6		
le 22 à midi . . — 4.42.23,4	+ 13.34,2	+ 3.12,6	
le 22 à minuit. — 4.25.48,8	+ 16.34,6	+ 3. 0,4	— 12,2
le 23 à midi . . — 4. 6.26,2	+ 19.22,6	+ 2.48,0	— 12,4

Cela posé, soient $L_{(n)}$ la longitude cherchée, L la longitude des tables, qui précède immédiatement celle que l'on cherche ; on aura en général, en prenant pour unité de temps l'intervalle de 12^h,

$$L_{(n)}=L+n\delta L+n\left(\frac{n-1}{2}\right)\delta^2L+n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\delta^3L+\ldots,$$

ou bien, ordonnant par rapport à n,

$$L_{(n)}=L+(\delta L-\tfrac{1}{2}\delta^2L+\tfrac{1}{3}\delta^3L)\,n+(\tfrac{1}{2}\delta^2L-\tfrac{1}{2}\delta^3L)\,n^2+\tfrac{1}{6}\delta^3Ln^3.$$

Or, pour le cas particulier ci-dessus $n=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; et de plus

$$\begin{aligned} L &= 359^\circ 23'\ 9'',5 \\ \delta L &= +\ 6.\ 2.\ 3\,,3 \\ \delta^2 L &= -\ \ 2.25\,,2 \\ \delta^3 L &= +\ \ 27\,,5=\frac{28'',6+26'',5}{2}\,; \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} L_{(n)} &= 359^\circ 23'\ 9'',5+\frac{6^\circ 3'25'',08}{3}-\frac{1'26'',35}{9}+\frac{4'',58}{27} \\ &= 361^\circ 24' 18'',03-9'',6=1^\circ 24' 8'',43. \end{aligned}$$

Soient pareillement $\lambda_{(n)}$ la latitude cherchée, λ celle des tables pour le

21 mai à minuit; on aura, en changeant dans la formule précédente, L en λ,

$$\lambda = -4^\circ 55' 57'',6$$
$$\delta\lambda = + \quad 13.34,2$$
$$\delta^2\lambda = + \quad 3.\ 0,4$$
$$\delta^3\lambda = - \quad 12,3$$

et enfin

$$\lambda_{(n)} = -4^\circ 55' 57'',6 + \frac{11'59'',9}{3} + \frac{1'36'',35}{9} - \frac{2'',05}{27}$$
$$= -4^\circ 55' 57'',6 + 4'10'',59 = -4^\circ 51' 47'',01 \text{ austr.}$$

Si l'on faisait $n=1$, on retrouverait la longitude et la latitude de la Lune telles que les tables les donnent pour le 22 mai à midi moyen.

M. Mathieu a construit une Table de correction des différences secondes, qui est insérée chaque année dans la *Connaissance des Temps*: on pourra en faire usage quand il n'y aura aucun inconvénient à supprimer les troisièmes différences.

Calcul du temps moyen par le temps vrai.

242. Ier EXEMPLE. On a fait une observation le 21 janvier 1811, à $2^h 30^m 47^s,3$ temps vrai astronomique, dans un lieu dont la longitude ouest, comptée de l'Observatoire royal de Paris, est de 1^m en temps; on demande le temps moyen de l'observation.

Le lieu étant à l'ouest de Paris, on comptait dans cette capitale $2^h 31^m 47^s,3$ à l'instant de l'observation; il s'agit donc de connaître, pour cette heure-là, l'équation du temps et de l'introduire dans la relation

temps moyen = *temps vrai* ± *équat. du temps.*

Or on trouve dans la *Connaissance des Temps* de 1811, et dans la colonne intitulée *temps moyen au midi vrai*, que
le 21 janvier à midi, à Paris, l'équation du temps $= 11^m 33^s,1$,
et que la variation diurne du 21 au 22. . . . . . = $16^s,9$;
ainsi on fera cette proportion :

$$24^h : 16^s,9 :: 2^h 31^m 47^s,3 = 2^h,53 : x,$$

et l'on aura pour la variation cherchée. . . . . $x = \quad 1^s,8.$

L'équation du temps allant en augmentant, elle devient, pour l'heure donnée,

$$11^m33^s,1+1^s,8=11^m34^s,9;$$

d'ailleurs le temps moyen est en avance sur le temps vrai; donc l'équation du temps est additive, donc le temps moyen de l'observation, dans le lieu où elle s'est faite, $=2^h30^m47^s,3+11^m34^s,9=2^h42^m22^s,2$.

IIe EXEMPLE. Le 12 décembre 1813 on a observé un phénomène à $3^h17^m15^s,50$ temps vrai, dans un lieu dont la longitude orientale est de 1^m1^s en temps; on demande le temps moyen.

A l'instant du phénomène, on comptait à Paris $3^h16^m14^s,50$ temps vrai. C'est pour cette heure qu'il s'agit de calculer l'équation du temps. Or les Éphémérides de 1813 donnent

le 12 décembre, à midi, équation du temps $=6^m\ 2^s,3$,
et pour la variation diurne du 12 au 13. . $28,3$;

on a donc

$$24^h:28^s,3::3^h16^m14^s=3^h,27:x=3^s,85.$$

L'équation du temps allant en diminuant, on a

Le 12 décembre	$6^m\ 2^s,30$
Partie proportionnelle . . .	$-\ 3,85$
Équation du temps actuelle	$-\ 5.58,45$
Temps vrai	$3^h\ 17.15,50$
TEMPS MOYEN	$3^h11^m17^s,05$

Si l'on connaissait le temps moyen et qu'il fallût trouver le temps vrai, on calculerait de la même manière l'équation du temps; puis on l'ajouterait au temps moyen, si le temps vrai était en avance, ou on la soustrairait dans le cas contraire.

Calcul du temps sidéral par le temps vrai et le temps moyen, et réciproquement.

243. Supposons les mêmes données que dans le premier exemple ci-dessus, et cherchons le temps sidéral.

Soient S (*fig.* 1) le lieu du Soleil vrai, PM le méridien du lieu A, ♈ le point équinoxial du printemps; l'arc M♈ de l'équateur sera le temps sidéral, l'arc MS′ le temps vrai, et ♈S′ l'ascension droite du Soleil; ainsi

temps sidéral = temps vrai + ascension droite du Soleil.

En désignant par Σ la distance de l'équinoxe au Soleil et par Æ son ascension droite, on a par conséquent

$$Æ = 24^h - \Sigma,$$

et

$$\textit{temps sidéral} = \textit{temps vrai} + 24^h - \Sigma.$$

Les anciennes Éphémérides donnant la distance de l'équinoxe au Soleil pour midi vrai, il faut la déterminer pour l'heure de l'observation; c'est ce que l'on fera ainsi qu'il suit :

Le 21 janvier 1811, à midi, à Paris, Σ =	$3^h 48^m 38^s 8$
Le 22. . . . . Σ′ =	3.44.25 ,3
Variation en 24^h.	4.13 ,5
Partie proport. pour $2^h 31^m 47^s,3$. . .	− 26 ,72
Le 21 . . . . . . Σ =	3.48.38 ,80
Distance actuelle de l'équinoxe au ☉	3.48.12 ,08
Complément à 24^h ou ascens. droite .	20.11.47 ,92
Temps vrai.	2.30.47 ,30
TEMPS SIDÉRAL. . .	$22^h 42^m 35^s,22$

Tous ces calculs supposent que dans l'intervalle de 24 heures vraies le mouvement du Soleil en ascension droite et en déclinaison est uniforme, ce qui s'éloigne en effet très-peu de la vérité.

Si le temps moyen était connu et qu'il fallût le convertir en temps sidéral à l'aide des anciennes Éphémérides, on changerait d'abord le temps moyen en temps vrai, et ensuite on satisferait à la relation précédente; mais cette réduction est bien plus simple au moyen de la table V et des *nouvelles Éphémérides*, qui donnent le lieu du Soleil

pour midi moyen, puisque

temps sidéral cherché = temps moy. donné + temps sidér. à midi moy.
+ réduction (table V).

Exemple. Quel est le temps sidéral correspondant au 20 avril 1840, à $18^h56^m27^s,9$ temps moyen ?

Temps sidér. à midi moy. ou asc. droite moy. ⊙ le 20 avril	$1^h54^m31^s,20$
Temps moyen donné.	18.56.27 ,90
Réduction de ce temps (table V).	3. 6 ,70
Temps sidéral demandé.	20.54. 5 ,80

Ce temps obtenu, on le convertit en degrés à raison de 15° pour une heure, afin d'avoir ce qu'on appelle l'*ascension droite du milieu du ciel* (art. **7**).

La table (IV) sert évidemment pour résoudre le problème inverse ; ainsi, en supposant le temps sidéral ci-dessus, sa conversion en temps moyen aura lieu à l'aide de cette relation :

temps moyen cherché = temps sidér. donné — temps sidér. à midi moy.
— réduction (tab. IV) ;

et en ajoutant 24^h, s'il est nécessaire, pour pouvoir effectuer la première soustraction.

Exemple.

Temps sidéral donné	$20^h54^m\ 5^s,80$
Temps sidéral à midi moyen.	— 1.54.31 ,20
Temps sidéral écoulé depuis midi . . .	18.59.34 ,60
Réduction de ce temps (table IV) . . .	— 3. 6 ,70
Temps moyen demandé	18.56.27 ,90

On résout aussi les questions précédentes avec une grande précision à l'aide des tables du Soleil qui servent à calculer les Éphémérides. Nous allons donner quelques exemples à ce sujet.

Calcul d'un lieu du Soleil par les Tables astronomiques du Bureau des Longitudes.

244. On détermine le lieu du Soleil dans l'écliptique, c'est-à-dire sa longitude, pour un instant quelconque, à l'aide des tables dressées pour cet effet. Celles de Delambre, que le Bureau des Longitudes a publiées en 1806, donnent d'abord la position moyenne du Soleil et celle du périgée pour le premier janvier de chaque année, dont l'origine est prise à minuit moyen, à Paris, c'est-à-dire au minuit du 31 décembre au 1er janvier : telle est l'*époque* de ces tables. Ajoutant ensuite les moyens mouvements depuis cette époque jusqu'à l'instant donné, et ayant égard aux variations séculaires, on a la longitude moyenne du Soleil et celle du périgée. La différence de ces deux quantités, qu'on nomme *anomalie moyenne,* sert d'argument pour trouver l'équation du centre, qu'on ajoute à la longitude moyenne du Soleil pour avoir sa longitude vraie dans l'ellipse comptée de l'équinoxe moyen.

Les tables fournissent en outre huit arguments au moyen desquels on obtient cinq petits termes ou équations qui expriment les perturbations de la Lune, de Vénus, de Mars, de Jupiter et de Saturne : ajoutant ces équations au lieu déjà déterminé par approximation, l'on a la longitude vraie du Soleil, toujours comptée de l'équinoxe moyen; enfin, ajoutant encore les nutations lunaire et solaire ainsi que l'aberration, le résultat exprime la longitude vraie comptée de l'équinoxe apparent.

Les mêmes tables font connaître l'obliquité moyenne de l'écliptique, à laquelle on réunit deux petits termes dont l'ensemble représente la nutation luni-solaire, ce qui donne l'obliquité apparente; ensuite, avec cette obliquité et la longitude vraie du Soleil, on calcule son ascension droite vraie et sa déclinaison au moyen des deux formules suivantes, tirées de la trigonométrie sphérique :

$$\text{tang. asc. vr.} \odot = \text{tang longit. vr.} \odot \times \cos \text{obliq. appar. de l'éclipt.},$$
$$\sin \text{décl.} \odot = \sin \text{ longit. vr.} \odot \times \sin \text{obliq. appar.}$$

A la rigueur, la déclinaison du point de l'écliptique déterminée par la seconde formule n'est pas celle apparente du centre du Soleil, car M. Laplace, en approfondissant la théorie des perturbations plané-

taires, a reconnu que cet astre ou plutôt la Terre ne décrit pas un orbe parfaitement plan; mais les écarts qui ont lieu de part et d'autre de l'écliptique sont si petits, que les observations les plus précises n'ont pu encore en constater l'existence. Néanmoins les astronomes en tiennent compte maintenant dans les observations qui demandent l'exactitude la plus scrupuleuse, c'est-à-dire qu'ils évaluent l'effet de la *latitude du Soleil* sur l'ascension droite et la déclinaison observées.

Après ces notions, calculons le lieu du Soleil pour le 15 décembre 1813 à midi vrai, à Paris.

DÉSIGNATION des TABLES SOLAIRES.	LONGITUDE du SOLEIL.	LONGITUDE du PÉRIGÉE.	ARGUMENTS DE PERTURBATIONS.							
			M	A	B	C	D	E	F	N
III. (1813).........	$9^s\,10^\circ 14' 42'' 4$	$9^s\ 9^\circ 42' 28'' 0$	37	932	278	534	559	324	784	606
V. (varia. séc.)......	...... + 0,6	.... + 0,7	...	...	...	...	...	...	...	...
VI. (15 décemb.).....	11.13. 0.18,8	.... + 59,0	630	787	953	548	507	81	32	51
Long. ⊙ à minuit moy.	8.23.15. 1,8	+ 9. 9.43.27,7	267	719	231	82	66	405	816	657
VII................	....	....	...	43	...	...				
XI................	...... 29.22,4	....	18	17	1	1	1			
Part. prop..........	..... + 0,3	+ 8.23.44.24,5	...	...	...	...				
Long. ⊙ à midi vrai.	8.23.44.24,5	11.14. 0.56,8 ou	285	779	232	83	67			
XII. Équat. du centre.	11.29.26.46,5	$11^s 14^\circ\ 0' 95''$ = anomalie moyenne.								
Part. prop..........	..... + 1,9									
Variat. séc..........	..... + 0,2									
XV. A 1re partie...	 0,1									
XV. 2e partie...	 0,2									
XV. 3e partie...	 0,2									
XV. Constante.....	..... — 0,5									
XVI. BC.........	 14,8									
XVII. BD.........	 3,2									
XVIII. BE.........	 14,9									
XIX. BF.........	 0,9									
Long. vr. ⊙ comptée de l'équinoxe moy..	8.23.11.46,9									
XIII.. (nut. lun.)..	..... — 15,0									
XXX. (nut. sol.) ..	..... — 0,3									
XXI. (aber.).......	..... — 0,3									
Long. vr. ⊙ comptée de l'équinoxe appar.	8.23.11.31,3									

Latitude.

Tab. XXXI.
- A + B + N = 668.... + 0,59
- 2B — C = 381.... — 0,09
- 3C — 4B = 321.... — 0,04
- B — 2E = 422.... — 0,16

Latitude boréale........ + 0,30 = λ.

Dans la formation de ces arguments l'on ne tient compte que des centaines, et l'on ajoute 1000, s'il est nécessaire, à l'argument positif, afin de pouvoir effectuer la soustraction.

Obliquité.

Table V..	1800..................	$23^\circ 27' 57''$
	variation..............	— 7,3
Tab. XIII.	nutat. lun.............	— 5,3
	nutat. sol.............	— 0,4
Obliquite apparente......		23.27.44,0 = ω.

Lorsque l'on calcule le lieu du Soleil pour un temps moyen donné, pour midi moyen, par exemple, on emploie en place de la table XI celle X, qui donne le mouvement moyen du Soleil pour les heures, minutes et secondes.

Cherchons maintenant le log. du rayon vecteur.

Perturbat. tab. XXIV, argument A.....		4,47		
Table XV, 2e partie..	+ 0,00			
3e partie....	+ 0,32			
Constante..........	— 0,30			
Argument..........	+ 0,02	+ 0,02		
Table XXV, perturbat. planétaires. BC.........		1,75		
BD.........		0,97		
BE.........		3,30	Table XXIII.....	9.9928430
BF.........		0,06	Part. proport.....	+ 0,06
Somme des équations..............		10,57	Variations sécul...	+ 0,05
ou argument de la table XXVIII........				10,21
			Log. du rayon vecteur..........	9.9929450

CALCUL DE L'ASCENSION DROITE.

⊙ = 263°11′31″,3	log. tang long. ⊙ = 0,9230543	
− 180	log. cos ω = 9,9625222	
83°11′31″,3	log. tang. Æ = 0,8855765 =	82°35′5″,95
		180
	asc. dr. vraie Æ =	262.35.5,95
Convertissant cette ascension droite en temps, on a . .	temps sidéral =	17h30m20s4
et prenant le complément à 24h, on a	dist. de l'équin. au ⊙ =	6.29.39,6.

On peut avoir aussi l'ascension droite par cette série :

$$Æ = \odot - \tang^2 \tfrac{1}{2}\omega \frac{\sin 2\odot}{\sin 1''} + \tang^4 \tfrac{1}{2}\omega \frac{\sin 4\odot}{\sin 2''} - \ldots,$$

qui dérive des principes exposés aux art. **56** et **94**. La différence ⊙ − Æ se nomme la réduction de l'écliptique à l'équateur.

CALCUL DE LA DÉCLINAISON.

$$\begin{aligned} \text{log. sin long.} \odot &= 9{,}9969269 \quad - \\ \text{log. sin } \omega &= 9{,}6000405 \\ \text{log. sin D} &= 9{,}5969674 = -23^{\circ}17'13'',17 \end{aligned}$$

Telle est la déclinaison australe du point de l'écliptique qui a pour longitude 263°11'31",3. Mais en supposant que la déclinaison apparente du centre du Soleil observée fût exempte de toute erreur, elle différerait d'une petite quantité due à l'effet de la latitude λ de cet astre. Or, d'après le précepte joint à la table XXXII, on a

$$\begin{aligned} \text{correction de longit.} &-0''05 \times \lambda = -0''05 \times 0''3 = -0''01, \\ \text{d'asc. dr.} &-0{,}05 \times \lambda = -0{,}05 \times 0{,}3 = -0{,}01, \\ \text{de décl.} &-1{,}00 \times \lambda = -1{,}00 \times 0{,}3 = -0{,}30; \end{aligned}$$

de là

déclinaison du point de l'écliptique	D = −23°17'13"17
correct. de décl. prise avec un signe contraire	= + 0,30
déclinaison apparente du Soleil	D = −23.17.12,87

Nous emploierons par la suite cette déclinaison apparente pour déterminer la latitude de l'Observatoire de l'ancienne École d'application des ingénieurs géographes, et à cet égard nous ferons abstraction de la longitude de ce lieu, parce que, comme elle n'est que de 4ˢ en temps, elle n'a aucune influence sensible sur la déclinaison dont il s'agit.

On corrigerait de la même manière la longitude et l'ascension droite, calculées par les tables, pour avoir la longitude et l'ascension droite apparentes du Soleil.

CALCUL DE L'ÉQUATION DU TEMPS.

Au temps vrai donné on ajoute l'équation du temps fournie par la table VIII, et la somme est le temps moyen approché : à celui-ci l'on ajoute encore sept petites équations qui sont dues aux perturbations

planétaires, et l'on a le temps moyen exact correspondant au temps vrai donné; enfin la différence de ces deux temps est l'équation du temps cherchée. Voici ce calcul pour l'époque du 15 décembre 1813 à midi vrai, à Paris :

	Temps vrai donné. . . .		$12^h\ 0^m\ 0^s,0$
Table VIII, corrigée d'après celle de la *Conn. des Temps* de 1810, p. 492.	pour $8^s\ 23^o$.	−	4.56,3
	part. prop. pour 44′,4 .	+	21,8
	variat. sécul. pour 4 ans	−	0,6
	Temps moyen approché .		$11^h55^m24^s,9$
Table IX.	BC		1,0
	BD		0,3
	BE		0,9
	BF		0,0
	A.		0,0
	N		0,2
	500+2B+N=621 . . .		0,2
	constante.	−	3,1
	Temps moy. au midi vrai		$11^h55^m24^s,4$
	Temps vrai		12. 0. 0
	Différ. ou équat. du temps		0. 4.35,6
	ou en nombre rond. . .		0. 4.36

Mais l'équation du temps est la différence entre l'ascension droite vraie et l'ascension droite moyenne comptée de l'équinoxe apparent. D'ailleurs, si à la longitude moyenne du Soleil correspondante à midi vrai on ajoute la nutation lunaire en ascension droite, fournie par la table XIII, on aura l'ascension droite moyenne comptée de l'équinoxe apparent. Ainsi

longitude moyenne à midi vrai =	$8^s\ 23^o44'24'',5$
nutation en Æ (table XIII) =	− 13,8
ascension droite moyenne	−263.44.10,7
ascension droite vraie ci-dessus	+262.35. 5,9
donc diff. ou équat. du temps en arc =	− 1. 9. 4,8
équat. du temps cherchée =	− $0^h\ 4^m36^s,3$

la même que celle donnée par la *Connaissance des Temps*.

L'ascension droite moyenne étant plus grande que l'ascension droite vraie, il en résulte que le Soleil moyen suit le Soleil vrai, et que par conséquent l'équation du temps est soustractive du temps vrai.

On doit espérer plus d'exactitude par cette dernière méthode que par la précédente, dans laquelle on emploie beaucoup de nombres donnés en dixièmes de secondes seulement; parce que la petite erreur qui peut affecter la longitude se porte en grande partie sur l'ascension droite, et qu'elle disparaît presque tout à fait en prenant la différence de ces deux quantités pour avoir l'équation du temps.

Il est encore d'autres éléments qu'il importe de connaître ; les voici :

Table XXIX.	demi-diamètre du ⊙.	$=0^\circ 16' \; 17'',12$
	mouvement horaire en longit. .	$= \; 2.\; 32,71$
	parallaxe horizontale	$8,94$.
Table XXXIII.	mouvement horaire en asc. dr.	$= \; 165,95$
	en déclinaison.	$= \; 7,94$

Le demi-diamètre du Soleil, son aberration, le mouvement horaire en longitude, etc., se trouvent actuellement dans la *Connaissance des Temps*, aux pages 34 à 36.

Dans l'application que nous venons de faire des tables solaires françaises, nous n'avons pas eu égard aux dernières modifications proposées par M. Bessel et indiquées dans la *Connaissance des Temps* pour 1831. Elles s'appliquent notamment à l'époque de ces tables. Par exemple, le savant astronome de Kœnisberg a trouvé qu'en partant de 1800 il fallait, en général, ajouter aux époques les quantités suivantes :

$$+\;2'',65+0'',144477t \text{ à la longitude moyenne}$$

$$\text{et}\quad 64'',99-0'',41015t \text{ à celle du périgée,}$$

en désignant par t les années écoulées depuis 1800.

Voy. pour plus de détails l'*Astronomie pratique* de M. Francœur; 2e édit., p. 380.

Conversion du temps sidéral en temps moyen, et réciproquement, à l'aide des tables I, II, III, etc., *de cet ouvrage.*

245. Ier EXEMPLE. On a fait une observation le 1er avril 1805, à $2^h 8^m 17^s$, temps sidéral; on demande le temps moyen astronomique.

Pour résoudre cette question, nous ferons usage des tables de notre recueil, qui ont été calculées sur celles du Soleil, et pour midi moyen à Paris, mais que nous avons assujetties aux derniers éléments déterminés par M. Bessel.

		N
Table I, le 1er avril.	$0^h35^m30^s,51$	13
Table II, 1805.	2. 1 ,93	176
	0. 37. 32 ,44	189
Table III (argument, 189), Nutat. lunaire en Æ	+ 1 ,02	
— Asc. dr. moyenne du ⊙ à midi moyen.	— 0. 37. 33 ,46	
Temps sidéral donné.	2. 8. 17 ,00	
Temps moyen approché	1 .30. 43 ,54	
Table IV, mouv. du ⊙ pend. $1^h30^m43^s,48$. .	— 14 ,86	
TEMPS MOYEN ASTRONOMIQUE,	$1^h30^m28^s,68$	

compté du méridien supérieur.

L'ascension droite moyenne du Soleil, comptée de l'équinoxe apparent, ayant été calculée pour midi moyen, au lieu de l'avoir été pour $1^h30^m43^s,48$, c'est pour cela qu'on a eu recours à la table IV, qui donne la quantité dont cette ascension droite doit être augmentée, et qui a pour argument le temps sidéral.

La lettre N désigne le supplément du nœud de la Lune, c'est-à-dire l'excès de la circonférence entière ou de 1000 parties sur la longitude du nœud ascendant : il sert d'argument pour trouver la nutation. Nous avons négligé la nutation solaire (art. **37**), parce qu'elle va à peine à un dixième de seconde de temps.

En calculant le mouvement propre du Soleil pendant $1^h30^m28^s,62$

de temps moyen, à raison de $9^s,8568$ pour une heure (art. **14**), on trouverait $14^s,86$, comme par la Table IV.

Calculons pareillement le temps sidéral du 20 avril 1840 obtenu à l'art. **243**.

		N
Table I, 20 avril	$1^h 50^m 25^s,02$	16
Table II, 1840	4. 5,72	56
Table III, nutation	+ 0,47	72
Asc. dr. à midi moyen, ou temps sidéral . .	1.54. 31,21	

comme la *Connaissance des Temps*.

Temps moyen donné.	+ 18.56. 27,90
Table V, réduction de ce temps.	+ 3. 6,70
TEMPS SIDÉRAL	20.54. 5,81

comme à l'art. cité.

C'est par une opération toute semblable que l'on détermine le temps moyen du passage d'une étoile au méridien. En effet, si pour le jour proposé l'on calcule l'ascension droite apparente de l'étoile, et qu'on la convertisse en temps à raison de 15° par heure, elle représentera le temps sidéral du passage au méridien supérieur, qu'il ne s'agirait plus que de réduire en temps moyen, comme on vient de l'expliquer. Si l'on demandait en outre le temps solaire vrai de ce passage, on l'obtiendrait sur-le-champ, en ajoutant l'équation du temps au temps moyen. On ne se rendra bien compte de la solution de ce problème qu'après avoir appris à calculer la position apparente des étoiles; c'est ce que nous enseignerons bientôt.

IIe EXEMPLE. Résolvons maintenant la question inverse, c'est-à-dire le temps moyen astronomique $1^h 30^m 28^s,68$ étant donné pour le 1er avril 1805, cherchons le temps sidéral.

On aura, comme ci-dessus,

Æ moy. du ⊙ à midi, le 1er avril 1805	$0^h 37^m 33^s,46$
et la table V donne, pour le mouvement du ⊙ pendant $1^h 30^m 28^s,6$	$+ 14^s,86$
Æ moyenne actuelle.	0.37. 48,32
Temps moyen donné.	1.30. 28,68
TEMPS SIDÉRAL	$2^h 8^m 17^s,00$

IIIe EXEMPLE. Calculons le temps sidéral de l'observation du 21 janvier 1811 (art. **242**) faite à $2^h42^m22^s,2$ temps moyen, dans un lieu dont la longitude occidentale est de 1^s en temps.

Temps moyen à Paris, $2^h43^m22^s,2$.

		N
Table I, le 21 janvier	$19^h59^m31^s,74$	3
Table II, 1811.	0. 14 ,66	499
	19.59. 46 ,40	502
Table III, nutation lunaire.	0 ,00	
Table V, mouv. du ⊙ pour $2^h43^m22^s,2$ . . .	+ 26 ,83	
Æ moy. comptée de l'équin. appar.	20. 0. 13 ,23	
Temps moyen donné. . . .	2.42. 22 ,20	
TEMPS SIDÉRAL	$22^h42^m35^s,43$	

Le résultat de l'art. **243** est de $0^s,21$ plus faible que celui-ci, qui est préférable.

IVe EXEMPLE. Le 2 janvier 1840, Sirius passa au méridien de Marseille à $11^h51^m25^s,89$, temps moyen astronomique; on demande le temps sidéral, sachant d'ailleurs que la différence des méridiens est de $0^h12^m8^s$.

Au même instant physique l'on comptait à Paris $11^h39^m17^s,89$, puisque Marseille est à l'est de cette ville. Cela posé, voici le type du calcul :

		N
Table I, le 1er janv., puisq. l'an 1840 est bissext.	$18^h40^m40^s,59$	0
Table II (1840).	4. 5 ,72	56
Table III (nut. ⊙)	+ 0. 0 ,37	56
Asc. dr. moy. ⊙ à midi à Paris.	18.44. 46 ,68	
Table V (corr. due à la diff. des mérid.) . .	− 1 ,99	
Æ⊙ à midi à Marseille	18.44. 44 ,69	
Temps moyen donné.	11.51. 25 ,89	
Table V (réduct. en temps sidér.)	+ 1. 56 ,87	
TEMPS SIDÉRAL.	6.38. 7 ,45	

Telle a été précisément l'ascension droite apparente de Sirius à cette époque.

Remarquez bien que, dans tout ce qui précède, le temps moyen et le temps sidéral se comptent à partir du méridien supérieur.

Pour résoudre cette question par les Tables mêmes du Soleil, qui ont pour époque minuit moyen, on procédera ainsi qu'il suit :

	Temps moyen compté de minuit. . .	$23^h 51^m 25^s,89$	
	Différence des méridiens	— 0. 12. 8 ,00	
	Temps moyen *civil* à Paris	23.39. 17 ,89	
			N
Tables solaires.	Table III, long. moy. du ☉ pour 1840.	$9^s\ 9^\circ 42' 42'',3$	56
	Table VI, le 2 janvier à minuit. . . .	59. 8 ,3	0
	Table X, Pour 23^h	56.40 ,5	56
	Table X, 39^m	1.36 ,1	
	Table X, $17^s,89$. . . .	0 ,7	
	Table XIII, nutation en ascens. dr. .	+ 5 ,7	
	Asc. dr. moy. du ☉ compt. de l'équin. app.	$9^s 11^\circ 40' 13'',6$	
	laquelle étant réduite en temps. . . . . . =	$18^h 46^m 40^s,93$	
	Temps moyen donné	11.51.25 ,89	
	TEMPS SIDÉRAL	6.38. 6 ,82	

ou asc. droite du milieu du ciel à Marseille, comptée du méridien supérieur. La petite différence de $0^s,63$ que présente ce résultat avec le précédent, tient à ce que la longitude moyenne du ☉ pour 1840, tirée des tables solaires, devrait être augmentée de $8'',4$, d'après ce qui a été dit à la fin de l'article précédent.

Ve EXEMPLE. Le 8 octobre 1749, l'ascension droite apparente du Soleil, observée par Lacaille au méridien de Paris, était de $6^s 14^\circ 5' 1''$; en la réduisant en temps, à raison de 15° pour une heure, on a $12^h 56^m 20^s,07$; c'est le temps sidéral de l'observation. On demande de le convertir en temps moyen solaire.

		N
Table I, le 7 octobre.	$13^h\ 0^m 39^s,47$	41
Table II, 1749.	4. 15 ,91	168
Table III, nutat. (argum. 209).	1 ,07	209
Asc. dr. moy. du ⊙ à midi moyen . . . . . —	13. 4. 56 ,45	
Temps sidéral observé. . .	12. 56. 20,07	
	24	
Heure moyenne approchée.	23.51. 23,62	
Table IV (réduction).	— 3. 54,50	
Temps moyen.	23.47. 29,12	

Nous avons ajouté 24^h au temps sidéral, afin de pouvoir effectuer la soustraction dans le sens qu'elle est indiquée, et nous avons pris l'ascension droite moyenne pour le 7 octobre à midi, parce que l'observation de l'ascension droite apparente du Soleil a réellement eu lieu à $12^m\ 31^s$, à très-peu près, avant l'arrivée du Soleil moyen au méridien. Lalande s'étant servi, pour faire cette transformation, de ses tables astronomiques insérées dans la troisième édition de son *Astronomie*, trouva $23^h\ 47^m 29^s,47$. En général l'ascension droite moyenne donnée par la table I doit toujours correspondre au midi qui précède l'heure cherchée, afin de ne rien changer au mode de calcul précédent.

CHAPITRE II.

DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

246. Le phénomène de la réfraction, dont nous avons donné brièvement l'explication au chapitre IV du livre premier, se manifeste lorsqu'on observe les étoiles circompolaires à leurs deux passages au méridien; car en prenant pour chaque étoile la demi-somme des distances zénithales méridiennes, on trouve pour résultats des distances polaires qui diminuent d'autant plus que les étoiles sont plus éloignées du pôle; et il arrive toujours que la déclinaison apparente d'une étoile, lors de son passage supérieur, est plus petite qu'à son passage inférieur. Les astronomes qui ont remarqué pour la première fois cette différence de déclinaison, ont pu croire que les étoiles tournaient autour de différents pôles; mais il est bien plus naturel de l'attribuer à la déviation de la lumière produite par l'attraction des couches atmosphériques.

On a reconnu, par un grand nombre d'observations de ce genre, que la réfraction, au-delà de 10° de hauteur, est à très-peu près proportionnelle à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith, moins trois fois un quart de réfraction. Donnons une idée des moyens par lesquels on est parvenu à établir une théorie à cet égard.

Démonstration d'une formule de réfraction de Laplace; formules de Bradley et de Simpson.

247. Pour trouver l'équation différentielle de la trajectoire décrite par un rayon de lumière qui traverse l'atmosphère, nous supposerons, 1° que quel que soit l'angle sous lequel une molécule lumineuse passe

du vide dans l'air, le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction dans un rapport constant; 2° que les forces réfractives des couches d'air sont proportionnelles aux densités de ces couches : c'est en effet ce que les expériences confirment.

Cela posé, soient AM′M″...MN (*fig.* 2) la trajectoire d'un rayon de lumière, AN l'atmosphère dont toutes les couches AM′, M′M″... sont supposées concentriques et sphériques, et de densités croissantes suivant une certaine loi, depuis le point où le rayon de lumière entre dans l'atmosphère, jusqu'à celui où il atteint l'œil de l'observateur.

Désignons par r, γ', γ'',...,γ les rayons AC, M′C, M″C,..., MC de la trajectoire lumineuse; par Z, z', z'',..., z les angles que les éléments consécutifs AM′, M′M″,...,MN de cette courbe font respectivement avec les verticales CZ, Cz', Cz'',...,Cz; enfin par ω', ω'',..., ω les angles que ces mêmes éléments font avec les rayons γ', γ'',...,γ.

Supposons maintenant que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction soit celui de . . . . $(n):1$,
lorsque la lumière passe du vide dans une couche d'air infiniment mince, et dont la densité ainsi que la chaleur soient les mêmes qu'en AM′, près de la surface de la Terre.

Supposons encore que, relativement au même rayon qui traverse la seconde couche M′M″, on ait dans la même circonstance . . $n':1$;
que pour la troisième couche M″M, on ait pareillement. . . . $n'':1$;
ainsi de suite, jusqu'à la dernière couche MN pour laquelle on ait $n:1$.

Il est évident, d'après le premier principe énoncé ci-dessus, que si u', u'',..., u sont aux points M′, M″,..., M les angles d'incidence d'un rayon de lumière qui passerait du vide dans l'air, on aura au point M′

$$\frac{\sin u'}{\sin \omega'} = (n), \qquad \frac{\sin u'}{\sin z'} = n';$$

au point M″,

$$\frac{\sin u''}{\sin \omega''} = n', \qquad \frac{\sin u''}{\sin z''} = n'';$$

. . . .

au point M,

$$\frac{\sin u}{\sin \omega} = n'', \qquad \frac{\sin u}{\sin z} = n.$$

Ainsi, éliminant successivement u' u'',..., u, il viendra

$$\frac{\sin\omega'}{\sin z'}=\frac{n'}{(n)},\qquad \frac{\sin\omega''}{\sin z''}=\frac{n''}{n'},\ldots,\qquad \frac{\sin\omega}{\sin z}=\frac{n}{n''}.$$

D'ailleurs les triangles élémentaires AM'C, M'M''C,... pouvant être considérés comme rectilignes, on a

$$\frac{\sin Z}{\sin\omega'}=\frac{\gamma'}{r},\qquad \frac{\sin z'}{\sin\omega''}=\frac{\gamma''}{\gamma'},\ldots,\qquad \frac{\sin z''}{\sin\omega}=\frac{\gamma}{\gamma''}.$$

Multipliant entre eux ces rapports et les précédents, puis réduisant, on obtiendra

$$(1)\qquad \frac{\sin Z}{\sin z}=\frac{n}{(n)}\cdot\frac{\gamma}{r}.$$

Cette dernière relation est indépendante du nombre des couches comprises entre la surface de la Terre et le point N; ainsi elle exprime en général une propriété de la trajectoire cherchée. En considérant donc AM'M'',...,N comme une courbe continue dont la convexité est tournée vers le ciel, et les droites NMP, AM'R comme les tangentes aux extrémités de cette courbe, la première représentera la direction primitive de la lumière d'un astre, la seconde sera la ligne sur laquelle on rapporte le lieu apparent de cet astre, et l'angle de ces deux droites mesurera la réfraction qui a lieu en A.

Maintenant, si l'on mène la droite MB parallèle à AM', l'angle PMB sera aussi égal à la réfraction PRA. Or, à une même distance zénithale apparente ZAR=Z peuvent correspondre plusieurs réfractions différentes. Supposons donc que la tangente supérieure PMN à la trajectoire lumineuse prenne, dans cette hypothèse, la position infiniment voisine P'M ; alors l'angle P'MP, vu sa petitesse, sera la différentielle de la réfraction PMB.

D'après ces considérations, l'expression de cette différentielle s'obtiendra aisément ainsi qu'il suit :

Abaissons du centre C de la Terre, sur la droite PM, la perpendiculaire CP'; désignons par x la base PM du triangle rectangle PMC, par y sa hauteur CP, et par θ la réfraction qui a lieu entre A et M, c'est-à-

dire l'angle PMB; on aura en général

$$\text{tang}\, d\theta = \frac{P'P}{PM} \quad \text{ou bien} \quad d\theta = \frac{dy}{x}.$$

Mais par ce qui précède, et à cause de $y = \gamma \sin PMC = \gamma \sin z$, on a

$$y = \frac{r\,(n)}{n} \sin Z.$$

D'ailleurs la force réfractive de l'air étant supposée proportionnelle à la densité ρ et se trouvant exprimée par $P\rho$ dans la région MN, on a $P\rho = n^2 - 1$, P étant le pouvoir réfringent de l'air à cette hauteur (*Traité de Physique* de M. Biot, tome III, page 266). De là

$$n = \sqrt{1 + P\rho};$$

et il est à remarquer que n est la vitesse de la lumière au point M de la trajectoire MM″M′A où la densité du milieu est ρ, lorsque cette vitesse dans le vide est représentée par l'unité.

Soit (ρ) la densité de l'air à la surface de la Terre ou au point A, on aura de même pour la vitesse en ce point

$$(n) = \sqrt{1 + P(\rho)};$$

ainsi d'une part la relation (1) devient

$$\frac{\sin Z}{\sin z} = \frac{\gamma}{r} \frac{\sqrt{1 + P\rho}}{\sqrt{1 + P(\rho)}} \ (^*),$$

(*) Cette relation est d'ailleurs une conséquence de la théorie des forces centrales, dans laquelle on démontre que les vitesses d'un mobile, constamment attiré vers un point fixe C, sont réciproquement proportionnelles aux longueurs des perpendiculaires menées de ce centre sur les tangentes à la courbe MM″M′A qu'il décrit, et dont les points de contact sont ceux où l'on considère ces vitesses. En effet, celles qui animent successivement une molécule lumineuse qui passe de M en A étant respectivement n et (n), et les perpendiculaires correspondantes à ces vitesses étant $CP = \gamma \sin z$, $CQ = r \sin Z$, on a, conformément au théorème énoncé,

$$n : (n) :: r \sin Z : \gamma \sin z,$$

ou bien

$$r \sin Z \sqrt{1 + P(\rho)} = \gamma \sin z \sqrt{1 + P\rho}.$$

et d'autre part on a

$$y = \frac{r \sin Z . \sqrt{1+P(\rho)}}{\sqrt{1+P\rho}}, \quad x = \frac{\gamma \sqrt{1 + P\rho - \frac{r^2}{\gamma^2} \sin^2 Z . [1+P(\rho)]}}{\sqrt{1+P\rho}};$$

enfin

$$(2) \qquad d\theta = \frac{dy}{x} = \frac{-rPd\rho \sin Z . \sqrt{1+P(\rho)}}{2(1+P\rho)\gamma \sqrt{1+P\rho - \frac{r^2}{\gamma^2} \sin^2 Z . [1+P(\rho)]}}.$$

Telle est l'équation différentielle de la page 244 du tome IV de la *Mécanique céleste*, et à laquelle le docteur Brinkley est parvenu par une méthode qui me paraît analogue à la précédente, autant que j'en puis juger par la courte analyse de son Mémoire insérée dans la *Connaissance des Temps* de 1819, page 405.

248. Il faudrait, pour intégrer cette équation, connaître ρ en fonction du rayon γ, c'est-à-dire connaître la loi de décroissement des couches de l'atmosphère. Laplace considère en pareil cas les deux limites de cette loi, qui sont une densité constante et une densité décroissante en progression géométrique, quand la hauteur au-dessus du niveau des mers croît en progression arithmétique; ce qui suppose une température uniforme dans toute l'étendue de l'atmosphère, comme on le verra bientôt.

Ne voulant ici traiter que le cas le plus simple, qui est aussi celui où la formule de réfraction est la plus exacte, nous supposerons que les distances zénithales observées sont comprises entre 0° et 74°, parce qu'alors les variations de la réfraction ne dépendent que de celles du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observation.

Adoptons à cet effet l'hypothèse d'une température uniforme, et faisons d'abord

$$\frac{r}{\gamma} = 1 - s, \quad \alpha = \frac{P(\rho)}{2[1+P(\rho)]}.$$

L'équation différentielle précédente se changera en celle-ci :

$$d\theta = -\frac{\alpha \frac{d\rho}{(\rho)} (1-s) \sin Z}{\left[1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{(\rho)}\right)\right] \sqrt{\cos^2 Z - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{(\rho)}\right) + (2s - s^2) \sin^2 Z}};$$

puis en la réduisant en série, et négligeant les produits de trois divisions de α et de s, on aura

$$d\theta = -\alpha\frac{d\rho}{(\rho)}\text{tang } Z\left[1 - \frac{s}{\cos^2 Z} + \alpha\left(1 - \frac{\rho}{(\rho)}\right).\frac{(2\cos^2 Z + 1)}{\cos^2 Z}\right];$$

et intégrant, il viendra

$$\theta = -\alpha\,\text{tang } Z\left[\frac{\rho}{(\rho)} - \int\frac{sd\rho}{(\rho)\cos^2 Z} + \alpha\left(\frac{\rho}{(\rho)} - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(\rho)^2}\right).\frac{2\cos^2 Z + 1}{\cos^2 Z}\right] + \text{constante}.$$

Or, si l'on prend cette intégrale depuis $\rho = (\rho)$ jusqu'à $\rho = 0$, c'est-à-dire depuis la surface de la Terre jusqu'aux limites de l'atmosphère, et qu'on fasse attention qu'à la limite $\rho = (\rho)$ on a $s = 0$, on obtiendra

$$\theta = \alpha\,\text{tang } Z\left[1 + \frac{1}{2}\alpha\frac{(2\cos^2 Z + 1)}{\cos^2 Z} + \frac{1}{\cos^2 Z}\int\frac{sd\rho}{(\rho)}\right].$$

D'ailleurs en intégrant par parties,

$$\int\frac{sd\rho}{(\rho)} = \frac{s.\rho}{(\rho)} - \int\frac{\rho ds}{(\rho)};$$

mais en étendant l'intégrale aux limites désignées, et observant qu'au point où $\rho = 0$, on a $s = 1$ ou γ infini, on trouve que

$$\int\frac{sd\rho}{(\rho)} = -\int\frac{\rho ds}{(\rho)}.$$

Reste à obtenir cette dernière intégrale. Pour cet effet, soit p la pression de l'air dans la région où g exprime la gravité : il est évident que puisque la masse est égale au produit du volume par la densité, et que le poids est égal à la masse multipliée par la gravité, on a

$$dp = -g\rho d\gamma = -g\frac{\gamma^2}{r}\rho ds.$$

Nous adoptons le signe moins, parce que la pression diminue à mesure que la hauteur augmente.

Soit donc (g) la pesanteur à la surface de la Terre; on a $g=(g)\frac{r}{\gamma^2}$, et par conséquent

$$p=-(g)\ r\int\rho ds.$$

Ainsi, l'intégrale $\int\rho ds$ est égale à la pression entière (p) à la surface de la Terre, divisée par $(g)r$. Voyons maintenant comment on peut exprimer cette pression en fonction de la hauteur l de l'atmosphère, dont la densité serait (ρ) et la température partout la même.

Lorsque la température est uniforme, les forces élastiques de deux molécules d'air sont proportionnelles à leurs densités, c'est-à-dire que

$$p=(p)\frac{\rho}{(\rho)},$$

et comme, par ce qui précède,

$$dp=-(g)\frac{r^2}{\gamma^2}\rho d\gamma,$$

on a

$$(p).\frac{d\rho}{(\rho)}=(g)\ r\rho.d.\frac{r}{\gamma};$$

puis intégrant, il vient

$$\log\rho=\frac{(g)r(\rho)}{(p)}.\frac{r}{\gamma}+\text{ const.}$$

Pour déterminer la constante, soit $\gamma=r$; dans ce cas, $\rho=(\rho)$, et

$$\log(\rho)=\frac{(g)r(\rho)}{(p)}+\text{const.},$$

d'où

$$\text{const.}=\log(\rho)-\frac{(g)r(\rho)}{(p)},$$

et par conséquent

$$\log\rho=\frac{(g)r(\rho)}{(p)}\left(\frac{r}{\gamma}-1\right)+\log(\rho);$$

ou bien, passant aux nombres,

$$\rho=(\rho).c^{\frac{(g)r(\rho)}{(p)}\left(\frac{r}{\gamma}-1\right)},$$

c étant la base des logarithmes népériens. Mais par hypothèse, l est la hauteur d'une colonne d'air de la densité (ρ), et qui, animée de la pesanteur (g), fait équilibre à (p); donc

$$(p) = (g)(\rho).l; \qquad (m)$$

et enfin

$$\rho = (\rho).c^{-\frac{rs}{l}}:$$

équation qui prouve que quand on suppose une température uniforme dans toute l'atmosphère, la densité décroît en progression par quotients, tandis que la hauteur croît en progression par différences; mais cette hypothèse n'est pas sans doute parfaitement conforme à ce qui a lieu réellement, et l'on doit en dire autant de celle d'une composition uniforme des couches atmosphériques; néanmoins en l'admettant avec l'illustre géomètre qui nous sert de guide, il est visible qu'à cause de

$$\int \rho ds = \frac{(p)}{(g)r} \quad \text{et} \quad (p) = (g)(\rho)\,l,$$

on a

$$\int \frac{\rho ds}{(\rho)} = \frac{l}{r};$$

et définitivement

$$\theta = \alpha \text{ tang Z} \left[1 + \frac{\frac{1}{2}\alpha(2\cos^2 Z + 1) - \frac{l}{r}}{\cos^2 Z} \right].$$

Cette expression n'est assujettie à aucune hypothèse sur la constitution de l'atmosphère; elle dépend seulement des valeurs de (ρ) et de l qui sont données par les hauteurs du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observation : ainsi il convient d'assigner le terme où cette formule cesse d'être exacte. M. Laplace évalue pour cet effet le terme de la série précédente, parmi ceux qui ont été négligés; il le trouve de $1'',1$ à la distance zénithale apparente de 79°, et tout à fait insensible à une distance zénithale moindre.

Cherchons les valeurs numériques des éléments de cette formule. D'abord, l représentant par hypothèse la hauteur d'une atmosphère

dont la densité est (ρ) et la température zéro, on a, par ce qui précède,

$$(p) = (g)\,(\rho)\,l.$$

Soient ensuite Δ la densité du mercure et h^o la hauteur du baromètre à la même température zéro; on aura aussi

$$(p) = (g)\,\Delta h^o,$$

et par conséquent, en égalant ces deux valeurs, il vient

$$l = \frac{\Delta}{(\rho)}\,h^o.$$

Or, par les expériences de MM. Biot et Arago, faites à Paris et correspondantes à l'état moyen de l'humidité de l'air,

$$\frac{\Delta}{(p)} = 10473{,}04,$$

à la température zéro, et lorsque la hauteur barométrique $h^o = 0^m{,}76$; on a donc

$$l = 7960^m\ (*).$$

M. Laplace a trouvé

$$l = 7974^m,$$

par la combinaison d'un grand nombre d'observations du baromètre, faites sur les hauteurs et au pied des montagnes et comparées aux mesures trigonométriques. En nous arrêtant à ce dernier résultat, et

---

(*) Plus exactement, l'air atmosphérique étant parfaitement sec, on a à la température zéro

$$l = 10462 . 0^m{,}76\,\frac{G}{g} = 7951^m{,}12\,\frac{G}{g},$$

G étant la gravité à l'Observatoire royal de Paris, et g la gravité dans un autre lieu d'observation.

remarquant que $r = 6366198^m$, on a

$$\frac{l}{r} = 0,00125254.$$

Les expériences citées ont donné dans les mêmes circonstances barométriques et thermométriques, mais l'air étant parfaitement sec,

$$\tfrac{1}{2} \mathrm{P}(\rho) = 0,00029438,$$

d'où, en parties du rayon,

$$\alpha = 0,000294412.$$

(*Voyez* le Mémoire de M. Biot sur les *Affinités des corps pour la lumière*, Institut, 1806.)

Delambre, par la comparaison d'un grand nombre d'observations astronomiques, a trouvé

$$\tfrac{1}{2} \mathrm{P}(\rho) = 0,0002940470,$$

et par suite

$$\alpha = 0,000293876,$$

valeur qui est presque identique avec la précédente déterminée directement et par des expériences très-délicates. Comme elle est proportionnelle à la densité (ρ), et qu'à température égale la densité de l'air est proportionnelle à la pression qu'il éprouve ou à la hauteur du baromètre, il est nécessaire d'introduire dans l'expression précédente de θ la correction relative à cet instrument. De plus, cette densité, à même pression, décroissant dans le même rapport que la température augmente, il faut aussi appliquer à la formule la correction relative à l'état du thermomètre.

Or, suivant les expériences de M. Gay-Lussac, un volume d'air exprimé par l'unité, à zéro de température, et sous une pression équivalente à celle d'une colonne de mercure de $0^m,76$ de hauteur, se dilate de 0,00375, par chaque degré du thermomètre centigrade; ainsi, à t degrés de température, le volume d'air devient $= 1 + 0,00375t$. Si donc h désigne la hauteur observée du baromètre, qu'on la corrige de l'effet de la dilatation du mercure réduit à zéro degré de tempéra-

ture, et à raison de $\frac{1}{5550}$ pour chaque degré du thermomètre centigrade, selon les expériences de Dulong et Petit; la densité de l'air à la température t degrés étant représentée par 1 au terme de la glace fondante, sera

$$\frac{h}{0^{m},76\,(1+0,00375t)\left(1+\frac{t}{5550}\right)},\ \text{ou, pour abréger,}\ \frac{h}{0^{m},76\,(1+mt)\,(1+nt)};$$

puisqu'à masses égales les densités sont réciproques aux volumes (*).

Quant à la valeur de l, il est visible, d'après l'équation (m), qu'elle ne change point par les hauteurs du baromètre, lorsque la température est constante; mais si la température change et que la pression reste la même, alors l varie en raison inverse de (ρ), et dans ce cas

$$l=7974^{m}\,(1+0,00375t).$$

Il résulte de là que

$$\theta=\frac{\alpha h\ \text{tang}\ Z}{0^{m},76(1+0,00375t)\left(1+\frac{t}{5550}\right)}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\alpha^2h^2\,(1+2\cos^2 Z)}{(0^{m},76)^2(1+0,00375t)^2\left(1+\frac{t}{5550}\right)^2}\cdot\frac{\text{tang}\ Z}{\cos^2\ Z}$$
$$-\frac{\alpha h}{0^{m},76}\cdot 0,00125254\,\frac{\text{tang}\ Z}{\cos^2\ Z};$$

formule dans laquelle $\alpha=60'',616$ (*Tables du Soleil*). Pour la commodité du calcul, on altère un peu le second et le troisième terme, en

---

(*) Nous supposons la température du mercure du baromètre la même que celle de l'air, parce que la formule suivante, qui donne θ, et qui a été réduite en Table, a été évaluée numériquement conformément à cette hypothèse. Nous conservons en outre le coefficient de la dilatation de l'air tel que l'a trouvé M. Gay-Lussac, quoiqu'il soit constaté par des expériences très-récentes qu'il doit être réduit à 0,003665 (tome I, page 496).

écrivant

$$\theta = \frac{\alpha h \tang Z}{0^m,76\,(1+0,00375t)\left(1+\frac{t}{5550}\right)}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 h(1+2\cos^2 Z)\tang Z}{0^m,76\,(1+0,00375t)\left(1+\frac{t}{5550}\right)\cos^2 Z}$$

$$- \frac{\alpha h\,.\,0,00125254}{0^m,76\,(1+0,00375t)\left(1+\frac{t}{5550}\right)} \cdot \frac{\tang Z}{\cos^2 Z}$$

$$- \alpha\,.\,0,00375t\,.\,0,00125254\,\frac{\tang Z}{\cos^2 Z}.$$

249. C'est à l'aide de cette formule qu'ont été calculées en partie les Tables de réfraction insérées dans la *Connaissance des Temps*, depuis plusieurs années. Mais à partir de 74° de distance zénithale jusqu'à l'horizon, les réfractions moyennes ont été obtenues à l'aide d'une autre formule donnée également par Laplace (*Mécanique céleste,* t. IV, page 264). Quoique ces tables servent dans toute leur étendue, cependant les astronomes évitent en général d'observer les astres trop près de l'horizon, à cause de l'inconstance des réfractions.

Enfin, si l'on fait abstraction du facteur $\frac{h}{0^m,76\,(1+0,00375t)\left(1+\frac{t}{5550}\right)}$, et qu'on développe cette expression par rapport aux puissances de tang Z, on aura, à cause de $\cos^2 Z = \frac{1}{1+\tang^2 Z}$,

$$\theta = \left(0,99874746 + \frac{3\alpha \sin 1''}{2}\right)\alpha \tang Z$$
$$- \left(0,00125254 - \frac{\alpha}{2}\sin 1''\right)\alpha \tang^3 Z\,..,$$

ou prenant $\alpha = 60'',525$, comme M. Biot (*Astronomie physique*, deuxième édition, t. I, page 439), on aura

$$\alpha \sin 1'' = 0,000293434,$$

et par suite

$$\theta = 0,9991876 1\alpha \tang Z - 0,00110582 3\alpha \tang^3 Z. \qquad \text{(N)}$$

250. Avant la belle théorie dont nous venons de donner une idée, d'après l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*, les astronomes faisaient usage de deux formules de réfraction, qui peuvent être considérées comme des cas particuliers de la précédente, et qu'il importe de connaître (*).

Par exemple, la formule de Bradley est

$$\theta = \text{A tang}\,(\text{Z} - \mu\theta)\,;$$

A et μ étant deux coefficients constants qu'il s'agit d'obtenir. Pour la développer, comme la précédente, suivant les puissances de tang Z, supposons d'abord $\text{Z}=90^\circ$, et désignons par R la réfraction correspondante; on aura

$$\text{R} = \text{A cot}\,\mu\text{R}, \quad \text{d'où} \quad \text{A} = \text{R tang}\,\mu\text{R},$$

et par suite

$$\theta = \text{R tang}\,\mu\text{R}\,.\,\text{tang}\,(\text{Z} - \mu\theta),$$

ou bien

$$\mu\theta = \mu\text{R tang}\,\mu\text{R}\,.\,\text{tang}\,(\text{Z} - \mu\theta).$$

Par ce moyen, cette formule ne renferme plus que l'inconnue μR, que l'on dégagera ainsi qu'il suit :

D'abord l'expérience prouve que μR est une très-petite quantité angulaire. En effet, pour un état moyen de l'atmosphère, $\text{R}=33'$ environ, et d'ailleurs μ diffère peu de $3\frac{1}{4}$, comme on le verra bientôt. Cette circonstance permet donc de substituer au rapport des arcs $\mu\theta$, μR, celui de leurs tangentes ou de leurs sinus. Partant,

$$\text{tang}\,\mu\theta = \text{tang}^2\,\mu\text{R tang}(\text{Z} - \mu\theta).$$

Mais

$$\text{tang}\,(\text{Z} - \mu\theta) = \frac{\text{tang Z} - \text{tang}\,\mu\theta}{1 + \text{tang Z tang}\,\mu\theta}\,;$$

(*) Comme nous ne pouvons exposer ici, dans tous ses développements, la théorie des réfractions astronomiques, on fera bien de consulter sur cette matière délicate, la *Mécanique céleste*, et les savants Mémoires de MM. Plana, Ivory et Biot, insérés dans les ouvrages suivants :

Académie de Turin, tome XXVII, page 255; *Transactions philosophiques* pour 1823, partie II; et Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1839.

ainsi

$$\text{tang}\, Z\, \text{tang}^2\, \mu\theta + \frac{1}{\cos^2 \mu R}\, \text{tang}\, \mu\theta = \text{tang}^2\, \mu R\, \text{tang}\, Z,$$

et de là

$$\text{tang}\, \mu\theta = \frac{-1+\sqrt{1+\sin^2 . 2\mu R\, \text{tang}^2 Z}}{2 \cos^2 \mu R\, \text{tang}\, Z}. \qquad \text{(P)}$$

Nous rejetons la valeur négative de tang $\mu\theta$, parce que la réfraction est nécessairement positive, surtout pour les astres éloignés de l'horizon.

On remarquera en outre que la distance zénithale apparente Z étant moindre que 90°, la valeur de tang $\mu\theta$ peut être réduite en une série convergente qui procède suivant les puissances ascendantes de tang Z. Effectuant cette opération, qui ne présente aucune difficulté, on a

$$\text{tang}\, \mu\theta = \sin^2 \mu R\, \text{tang}\, Z - \sin^4 \mu R \cos^2 \mu R\, \text{tang}^3 Z + \ldots,$$

ou bien, supposant $\text{tang}\, \mu\theta = \frac{\theta\, \text{tang}\, \mu R}{R}$, on obtiendra aisément

$$\theta = \frac{R}{2} \sin 2\mu R\, \text{tang}\, Z - \frac{R}{8} \sin^3 2\mu R\, \text{tang}^3 Z + \ldots$$

Comparant cette série à celle (N), on a ces deux équations :

$$\frac{R}{2} \sin 2\mu R = 0{,}99918761\alpha, \qquad \frac{R}{8} \sin^3 2\mu R = 0{,}001105823\alpha,$$

pour déterminer R et μ. En effet, divisant la seconde par la première, il vient

$$\tfrac{1}{4} \sin^2 2\mu R = \frac{0{,}001105823}{0{,}99918761}, \quad 2\mu R = 137'34'',$$

et de la première on tire

$$R = 0{,}99918761\alpha \sqrt{\frac{0{,}99918761}{0{,}001105823}} = 1817'',9 = 30'17'',9.$$

Ensuite, on a

$$\mu = \frac{2\mu R}{2R} = 3{,}78;$$

enfin, A est donné par la formule

$$A = R \operatorname{tang} \mu R = 60'',510;$$

mais sans erreur sensible

$$A = R \sin \mu R = \frac{R}{2} \sin 2\mu R = 0,99918761\alpha;$$

ainsi A est très-peu différent de α. C'est de cette manière que M. Biot, dans la deuxième édition de son *Astron. physique*, a évalué les constantes de la formule de Bradley, après avoir déterminé α à l'aide des observations astronomiques faites par Méchain à Barcelone, et rapportées dans la *Base du Système métrique décimal*, tome II, page 643. Mais la combinaison d'un plus grand nombre d'observations de ce genre a donné $\mu = 3,25$ et $\alpha = 60'',616$, comme nous l'avons déjà annoncé.

251. La formule de Simpson, qui est de la forme suivante :

$$\sin(Z - \eta\theta) = M \sin Z,$$

η et M étant deux constantes, se déduit facilement de la précédente. En effet, si dans la formule

$$\operatorname{tang} \mu\theta = \operatorname{tang}^2 \mu R \operatorname{tang}(Z - \mu\theta)$$

on met pour $\frac{\operatorname{tang}(Z - \mu\theta)}{\operatorname{tang}.\mu\theta}$ sa valeur $\frac{\sin Z + \sin(Z - 2\mu\theta)}{\sin Z - \sin(Z - 2\mu\theta)}$, on aura

$$\frac{1}{\operatorname{tang}^2 \mu R} = \frac{\sin Z + \sin(Z - 2\mu\theta)}{\sin Z - \sin(Z - 2\mu\theta)}.$$

Mais $\frac{1}{\operatorname{tang}^2 \mu R} = \frac{1 + \cos 2\mu R}{1 - \cos 2\mu R}$, par conséquent

$$\frac{1 + \cos 2\mu R}{1 - \cos 2\mu R} = \frac{\sin Z + \sin(Z - 2\mu\theta)}{\sin Z - \sin(Z - 2\mu\theta)}.$$

Enfin, chassant les dénominateurs et réduisant, il viendra

$$\sin(Z - 2\mu\theta) = \cos 2\mu R . \sin Z.$$

Voici une *méthode empirique* qui conduit très-facilement à cette formule de Simpson.

La densité de l'air diminuant à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la Terre, on peut concevoir une atmosphère d'une densité moyenne et uniforme dans laquelle un rayon de lumière n'éprouverait par conséquent qu'une seule déviation dont l'effet, sur la position apparente d'un astre, serait sensiblement le même que celui qui serait produit par l'atmosphère véritable.

Soient CZ (*fig.* 3) la hauteur de l'atmosphère fictive dont il s'agit, A le lieu de l'observateur, EM un rayon incident de lumière réfracté suivant MA. L'astre E paraîtra en E′ sur le prolongement de MA, et l'angle EME′ sera la réfraction observée. Or, par le premier principe énoncé (art. **247**),

$$\frac{\sin \mathrm{EMV}}{\sin \mathrm{E'MV}} = n,$$

n étant un rapport constant. Ou bien, soient $\mathrm{E'MV} = \psi$, $\mathrm{E'ME} = \theta$, et la distance zénithale apparente $\mathrm{ZAM} = \mathrm{Z}$; on a

$$\frac{\sin(\psi + \theta)}{\sin \psi} = n;$$

mais si, dans le triangle CAM, on fait $\mathrm{CA} = r$, $\mathrm{CM} = \gamma$, il est évident que $\frac{\sin \psi}{\sin \mathrm{Z}} = \frac{r}{\gamma}$; de là

$$\frac{\sin(\psi + \theta)}{\sin \mathrm{Z}} = \frac{\gamma}{r} n = \mathrm{M}.$$

D'ailleurs, en désignant l'angle au centre MCA par φ, on a

$$\psi = \mathrm{Z} - \varphi,$$

et par conséquent

$$\frac{\sin(\mathrm{Z} - \varphi + \theta)}{\sin \mathrm{Z}} = \mathrm{M}.$$

L'expérience prouve que la réfraction décroît depuis l'horizon H jusqu'au zénith Z où elle est nulle, et qu'à une distance zénithale φ très-petite, cette réfraction lui est à fort peu près proportionnelle; ainsi

l'on a $\theta = q\varphi$, le coefficient q étant supposé constant. Substituant cette valeur dans la relation précédente, il vient

$$\sin[Z - (q-1)\theta] = M \sin Z;$$

ou bien, soit, pour abréger, $q - 1 = 2\mu$, et désignons par R la réfraction horizontale, ou ce que devient θ lorsque $Z = 90^\circ$, on a $\cos 2\mu R = M$, et enfin, comme ci-dessus,

$$\sin(Z - 2\mu\theta) = \cos 2\mu R . \sin Z.$$

Ce calcul est fondé sans doute sur des hypothèses fort gratuites; mais il donne une idée de la manière dont les astronomes étaient parvenus à lier approximativement les réfractions entre elles, avant d'en connaître les véritables lois.

252. Delambre détermine très-simplement les valeurs de μ et R, au moyen de l'observation de deux réfractions θ et θ'. Voici sa méthode.

D'abord, si dans la formule (P) on introduit un angle auxiliaire ε, tel que

$$\text{tang}\,\varepsilon = \sin 2\mu R \,\text{tang}\, Z, \qquad (1)$$

on aura

$$\text{tang}\,\mu\theta = \frac{(\text{séc}\,\varepsilon - 1)\sin\mu R}{2\cos^2\mu R \sin\mu R \,\text{tang}\, Z} = \frac{\text{tang}\,\mu R\,(\text{séc}\,\varepsilon - 1)}{\sin 2\mu R\,\text{tang}\, Z}$$

$$= \frac{\text{tang}\,\mu R\,(1 - \cos\varepsilon)}{\sin\varepsilon} = \text{tang}\,\mu R\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon. \qquad (2)$$

Mais cette dernière formule, à cause de la petitesse des angles $\mu\theta$ et μR, donnant

$$\theta = R\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

à la distance zénithale apparente Z; on a de même

$$\theta' = R\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon',$$

à une autre distance zénithale apparente Z: ainsi,

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varepsilon'}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Mais $\tang \varepsilon = \frac{2 \tang \frac{1}{2}\varepsilon}{1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon}$; donc, en ayant égard à la relation (1),

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\frac{1}{2} \tang \varepsilon' (1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon')}{\frac{1}{2} \tang \varepsilon \, (1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon)} = \frac{\tang Z' (1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon')}{\tang Z \, (1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon)},$$

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tang Z'}{\tang Z} \left(\frac{1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon'}{1 - \left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^2 \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon'} \right),$$

$$\frac{\tang Z'}{\tang Z} = \frac{\frac{\theta'}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^2 \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon'}{1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{\frac{\theta'}{\theta} - \frac{\theta}{\theta'} \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon'}{1 - \tang^2 \frac{1}{2}\varepsilon'},$$

$$\frac{\theta'}{\theta} - \frac{\theta}{\theta'} \tang^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \tang Z' \cot Z - \tang Z' \cot Z \tang^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon',$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\tang Z \cot Z - \frac{\theta'}{\theta}}{\tang Z \cot Z - \frac{\theta}{\theta'}} = \frac{\tang A - \tang B}{\tang A - \cot B} = \frac{\sin(A - B) \tang B}{\sin(A + B - 90^\circ)}.$$

Par cette dernière formule, on connaîtra $\frac{1}{2}\varepsilon'$, après quoi l'on aura

$$\tang \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\theta}{\theta'} \tang \tfrac{1}{2}\varepsilon', \quad R = \theta \cot \tfrac{1}{2}\varepsilon = \theta' \cot \tfrac{1}{2}\varepsilon';$$

enfin

$$\sin 2\mu R = \tang \varepsilon \cot Z = \tang \varepsilon' \cot Z', \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2\mu R}{2R}.$$

Supposons que $Z' = 90^\circ$, alors $\theta' = R$, $\tang \frac{1}{2}\varepsilon' = 1$ et $\tang \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\theta}{R}$; par conséquent

$$\sin 2\mu R = \tang \varepsilon \cot Z = \frac{2\left(\frac{\theta}{R}\right) \cot Z}{1 - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2} = \frac{2R\theta \cot Z}{(R + \theta)(R - \theta)}.$$

Je ferai connaître plus loin de quelle manière on obtient θ par l'observation.

C'est par cette méthode que Delambre a pu comparer à la formule de Simpson toutes les tables existantes (*Astronomie*, tome I, page 304.

Il a remarqué en outre, que cette formule, en modifiant les deux constantes, pourrait servir pour tous les usages astronomiques, depuis le zénith jusqu'à 82°; mais il est probable qu'à une distance zénithale plus grande, on ne pourra jamais former une table exacte de réfractions. Toutefois, Laplace, comme je l'ai déjà dit (art. **249**), a étendu la sienne jusqu'à l'horizon, et les considérations physiques sur lesquelles elle est toute fondée, lui ont fait donner la préférence sur toutes les autres. (Voyez la *Mécanique céleste*, et le Discours préliminaire des *Tables solaires*.)

253. La Table de réfractions, publiée dans la *Connaissance des Temps* de chaque année, quoique construite d'après les formules de Laplace, est tout à fait indépendante des logarithmes, et c'est quelquefois un avantage dans la pratique. Néanmoins, j'ai jugé convenable de conserver à la table VI la forme que Delambre lui a donnée, d'après les idées de son illustre auteur : elle a pour argument la distance zénithale apparente. J'en ai calculé une toute semblable pour les distances zénithales vraies ; on en verra l'utilité dans les observations azimutales.

On remarquera que la table VI donne le logarithme de la réfraction moyenne, c'est-à-dire de la réfraction qui aurait lieu à la température de 10 degrés du thermomètre centigrade, et sous la pression barométrique de $0^m,76$.

Pour trouver la réfraction actuelle, il faut ajouter au logarithme de la réfraction moyenne ceux des deux facteurs barométrique et thermométrique donnés par la table VII. On concevra aisément la raison de cette règle, en se rappelant que l'expérience ayant prouvé que la réfraction est proportionnelle à la densité de l'air, on a (article **248**, en désignant par θ la réfraction réelle pour l'état présent de l'atmosphère, par $\theta_{(0)}$ la réfraction à zéro de température et pour la hauteur moyenne $0^m,76$ du baromètre ; on a, dis-je,

$$\theta = \frac{\theta_{(0)}h}{0^m,76\,(1+mt)(1+nt)},$$

t étant la température et h la hauteur barométrique observées.

Soit maintenant $\theta_{(10)}$ la réfraction moyenne des tables; on aura (sans

changer le point o de départ, pour compter les degrés de température, et à cause de $h = 0^m,76$, $t = 10$, dans ce cas)

$$\theta_{(10)} = \frac{\theta_{(0)}}{(1 + 10m)\,(1 + 10n)}.$$

Éliminant $\theta_{(0)}$ entre ces deux relations, il vient

$$\theta = \theta_{(10)} \cdot \frac{h}{0^m,76} \cdot \frac{(1 + 10m)\,(1 + 10n)}{(1 + mt)\,(1 + nt)}.$$

Or, la réfraction moyenne $\theta_{(10)}$ est fournie par la table VI, le facteur $\frac{h}{0,76}$ est donné par la table VII, et le troisième facteur par la même table. La valeur de θ s'obtient donc en suivant la règle énoncée ci-dessus.

EXEMPLES.

On a observé une étoile à 72°15′ de distance du zénith, au moment où le baromètre métrique marquait $0^m,744$, et le thermomètre centigrade $11^d,25$; on demande la distance zénithale vraie.

Dans la table VI, vis-à-vis 72°, on a		2,2493
Pour 15′, on a (4,32) × 15.	=	65
Facteur barométrique, table VII.		9,9906
Facteur thermométrique, table VII.		9,9979
log. réfraction vraie.	=	2,2443 = 175″,51.

De là

Distance zénithale apparente. . . .	72° 15′ 0″,00
Réfraction vraie	+ 2.55 ,51
Distance zénithale vraie . . .	72.17.55 ,51.

Pour renverser la question, cherchons la distance apparente au moyen de la distance vraie, et supposons que les circonstances atmosphériques soient les mêmes.

Avec la table VIII on trouve, vis-à-vis de 72°,	2,2481
Pour 17',91.	77
Facteur barométrique, table VII.	9,9906
Facteur thermométrique, table VII	9,9979
log. réfraction vraie. . . . . =	2,2443 = log θ ;

donc, comme ci-dessus, $\theta = 2'55'',51$.

De là

Distance zénithale vraie. . . .	72° 17' 55''51
Réfraction vraie.	— 2. 55,51
Dist. zénithale appar. .	72. 15. 0.

Si la hauteur du baromètre était exprimée en pouces et en lignes, et qu'on eût employé le thermomètre de Réaumur en 80 parties, on ferait préalablement usage de la table IX de conversion ; après quoi l'on opérerait comme dans l'exemple précédent. Quant aux mesures thermométriques anglaises, on les convertira en degrés de Réaumur et en degrés centigrades, à l'aide des relations suivantes :

Soient F les degrés de Fahrenheit, R les degrés de Réaumur, C les degrés centigrades ; on a

$$F = \tfrac{9}{4} R + 32, \quad F = \tfrac{9}{5} C + 32.$$

La Table de réfractions de Bradley a prévalu pendant longtemps, et même il est des astronomes qui en font encore usage. Il est nécessaire qu'on sache quelles sont les tables de cette espèce dont on s'est servi pour calculer certaines observations qu'on veut comparer entre elles.

N. B. Dans le calcul ci-dessus, nous n'avons point employé la petite *table complémentaire* qui contient le quatrième terme de l'expression de θ donnée à la fin de l'art. **248**, et qui est relatif à la température moyenne de 10^d. Si l'on veut ne rien négliger, cette petite table donnera, pour la distance zénithale apparente 72°, la quantité — 0'',1 ; alors la réfraction vraie sera définitivement 175'',41.

La raison pour laquelle le quatrième terme de la formule citée n'a été calculé que depuis Z = 67° jusqu'à Z = 85°, c'est parce qu'à la première limite il est déjà insensible, et que passé 85° les réfractions sont

trop incertaines pour y appliquer avec quelque exactitude les corrections relatives à la température et à la hauteur du baromètre.

DE LA RÉFRACTION TERRESTRE.

254. Afin de tirer d'autres conséquences utiles de cette théorie du mouvement de la lumière, nous supposerons, outre la notation précédente, qu'un rayon vecteur $\gamma' = Cm$ (*fig.* 2) de la trajectoire $AM'M = v$ est mené infiniment près de $\gamma = CM$; alors $\gamma' = \gamma + d\gamma$, l'angle de ces deux rayons sera la différentielle de v, et la portion de tangente comprise entre ces mêmes rayons sera évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle élémentaire dont les deux côtés de l'angle M seront $d\gamma$ et γdv. Or dans ce triangle on a tang $M = \frac{\gamma dv}{d\gamma}$, et dans le triangle rectangle CMP on a de même tang $M = \frac{y}{x}$; partant

$$\frac{\gamma dv}{d\gamma} = \frac{r \sin Z . \sqrt{1 + P(\rho)}}{\gamma \sqrt{1 + P\rho - \frac{r^2}{\gamma^2} \sin^2 Z [1 + P(\rho)]}}.$$

Mais en ayant égard à ce que

$$\frac{r}{\gamma} = 1 - s, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{P(\rho)}{2[1 + P(\rho)]},$$

on a

$$\frac{r d\gamma}{\gamma^2} = ds, \quad \frac{r^2}{\gamma^2} = 1 - 2s + s^2:$$

ainsi d'abord

$$(1) \qquad dv = \frac{ds \sin Z . \sqrt{1 + P(\rho)}}{\sqrt{1 + P\rho - \frac{r^2}{\gamma^2} \sin^2 Z [1 + P(\rho)]}};$$

ensuite, si l'on adopte l'hypothèse de densité énoncée art. 248, et qu'on fasse attention que $c^{-\frac{ir}{l}s} = 1 - \frac{ir}{l} s + \ldots$, i étant un coefficient constant dépendant de la loi suivant laquelle la chaleur décroît à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, on aura

$$\rho = (\rho)\left(1 - \frac{ir}{l} s\right),$$

et il viendra par substitution

$$dv = \frac{ds \sin Z . \sqrt{1 + P(\rho)}}{\sqrt{[1 + P(\rho)] \cos^2 Z - P(\rho)\frac{irs}{l} + 2[1 + P(\rho)] \sin^2 Z - [1 + P(\rho)] s^2 \sin^2 Z}}.$$

Divisant haut et bas par $\sqrt{1 + P(\rho)}$, on aura

$$dv = \frac{ds \sin Z}{\sqrt{\cos^2 Z - 2\alpha \frac{irs}{l} + 2s \sin^2 Z - s^2 \sin^2 Z}};$$

et comme s est très-petit pour toute l'étendue que peut avoir la trajectoire lumineuse dans les opérations géodésiques, il est permis de supprimer le terme $- s^2 \sin Z$. L'équation différentielle restante, savoir :

$$(2) \qquad dv = \frac{ds . \sin Z}{\sqrt{\cos^2 Z - P(\rho) . \frac{irs}{l} + 2s \sin^2 Z}},$$

sera donc exactement intégrable. Effectuant cette opération et déterminant la constante de manière que $v = 0$ lorsque $s = 0$, on trouvera

$$\frac{v}{\sin Z} = \frac{\sqrt{\cos^2 Z + 2s \sin^2 Z - P(\rho) . \frac{irs}{l}} - \cos Z}{\sin^2 Z - \frac{1}{2} P(\rho) . \frac{ir}{l}}.$$

Dans cette expression, rs est à très-peu près la hauteur du point observé au-dessus de celui d'où a été prise la distance zénithale Z : en chassant donc le radical, et négligeant les termes insensibles, on obtiendra, en définitive,

$$(3) \qquad rs = rv \cot Z + \frac{(rv)^2}{2r} \left[1 - \frac{1}{2} P(\rho) . \frac{ir}{l \sin^2 Z} \right].$$

Il est à remarquer que rv est l'arc de distance K entre les deux objets dont on cherche la hauteur relative $rs = r' - r$. Reste à savoir ce que représente $P(\rho) \frac{ir}{l}$: or, en comparant terme à terme la formule (3)

à celle (8) de l'art. **221**, qui est, d'après la notation actuelle,

$$rs = \frac{(rv)\cot Z}{\cos\frac{1}{2}(rv)} + \frac{(rv)^2}{2r}\left(\frac{1}{\sin^2 Z} - \frac{2n}{\sin^2 Z}\right),$$

et qui se réduit, à cause de rv et rs très-petits, à

$$rs = (rv)\cot Z + \frac{(rv)^2}{2r}\left(1 - \frac{2n}{\sin^2 Z}\right),$$

on reconnaît sur-le-champ qu'on doit avoir

$$(4) \qquad n = \tfrac{1}{4}\mathrm{P}(\rho)\frac{ir}{l}.$$

Telle est l'expression théorique du coefficient de la réfraction terrestre, laquelle dépend principalement de l'état de l'atmosphère à la station d'où la distance zénithale Z a été observée. Ainsi la réfraction à cette station est (art. **214**)

$$(5) \qquad \theta = \tfrac{1}{4}\mathrm{P}(\rho)\frac{ir}{l}v,$$

(ρ) étant, comme précédemment, la densité de l'air à zéro de température, et v l'amplitude de la trajectoire lumineuse; ce qui ne suppose pas cette réfraction égale à celle qui agit à l'autre extrémité de cette ligne.

Laplace, traitant le cas de la simultanéité des observations météorologiques aux extrémités d'une même trajectoire, suppose, pour de très-petites hauteurs, le décroissement de la densité de l'air proportionnel à la première puissance de la variable s; c'est-à-dire qu'il fait, d'après ce qui précède,

$$\rho' = \rho\left(1 - \frac{ir}{l}s\right),$$

ou, ce qui est de même,

$$i = \frac{l}{r'-r}\left(\frac{\rho-\rho'}{\rho}\right), \text{ et } n = \tfrac{1}{4}\mathrm{P}r\frac{\rho-\rho'}{r'-r};$$

en sorte que, l'origine des s étant au niveau de la mer, cet illustre géometre trouve que $\frac{ir}{l} = 571{,}551$. Mais M. Plana, dans ses recher-

ches sur la densité des couches de l'atmosphère (tome XXVII des *Mém. de l'Acad. des sciences de Turin*), donne au contraire au coefficient i dépendant de la chaleur, la forme $1 - \varepsilon l$, ε étant un autre coefficient dont la valeur numérique actuelle se déduit de la formule

$$\varepsilon = \frac{0,00375\,(T - T')}{z\,(1 + 0,00375\,T)},$$

lorsque z représente une hauteur parfaitement connue, et que T, T′ sont respectivement les températures observées au même instant au pied et au sommet de cette hauteur. Dans ce cas, et pour l'état actuel de l'air à la station où l'on opère, on a donc

$$(6) \qquad n = \tfrac{1}{4} P \rho \frac{r}{l} (1 - \varepsilon l).$$

De plus, suivant les expériences citées de MM. Arago et Biot, qui prouvent que l'air humide réfracte la lumière sensiblement comme l'air sec, sous la même pression et la même température, on a

$$\frac{1}{4} P \rho = 0,000\,14719 \cdot \frac{h}{0^{m},76\,(1 + mt)\,(1 + nt')},$$

lorsqu'on fait abstraction de la variation de la gravité en passant d'un lieu à un autre plus ou moins élevé au-dessus du niveau des mers, qu'on désigne par h la hauteur observée du baromètre, et par t, t' les températures respectives de l'air et de la colonne mercurielle. Enfin l'on a à fort peu près

$$l = 7960^{m}\,(1 + mt).$$

Cette manière d'exprimer théoriquement le coefficient de la réfraction, d'après M. Plana, nous ayant paru se rapprocher singulièrement des résultats de l'expérience (art. **217**), nous avons en outre supposé $\varepsilon = 0,0000275$ à la latitude de 45°, parce que c'est la valeur que ce savant astronome a déduite de la réfraction astronomique à l'horizon, donnée par les tables de M. Carlini, mais qu'il faudrait très-probablement modifier selon les lieux et les saisons. Montrons donc par quelle voie l'on arrive au coefficient $i = 1 - \varepsilon l$.

D'abord, la pression p étant proportionnelle à la densité ρ d'une molécule d'air, multipliée par sa chaleur que nous désignerons par ζ, nous ferons, avec Laplace,

$$p = k\rho\zeta,$$

k étant un coefficient constant: et comme cette pression est en outre simplement proportionnelle à la densité, lorsque la température est la même, il est clair que si nous appelons T, T′ les températures correspondantes aux densités (ρ), ρ et aux pressions (p), p, nous aurons

$$p : (p) :: \rho(1 + mT') : (\rho)(1 + mT)$$

ou bien

$$\frac{p\,(\rho)}{(p)\,\rho} = \frac{1 + mT'}{1 + mT};$$

puis, mettant pour p sa valeur ci-dessus en fonction de la chaleur, il vient

$$\zeta = \frac{(p)}{(\rho)\,k} \cdot \frac{1 + mT'}{1 + mT}.$$

D'un autre côté, l'on sait, par ce qui précède, que

$$dp = -g\rho\, d\gamma;$$

ainsi l'on a

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gd\gamma}{k\zeta},$$

équation différentielle qui, à cause de $\gamma = r + rs$ ou de $d\gamma = rds$, devient

$$\frac{dp}{p} = -\frac{grds}{k\zeta},$$

et dont l'intégrale est

$$\log p + C = -\frac{gr}{k}\int \frac{ds}{\zeta}.$$

Pour déterminer la constante arbitraire C, il faut faire attention que la valeur initiale de cette intégrale est nulle, et qu'alors p se change

en (p). Ainsi l'on a

$$\log \frac{p}{(p)} = -\frac{gr}{k}\int\frac{ds}{\zeta}, \quad \text{ou} \quad p = (p)\, c^{-\frac{gr}{k}\int\frac{ds}{\zeta}},$$

par suite

$$\rho = \frac{p}{k\zeta} = \frac{(p)}{k\zeta}.\ c^{-\frac{gr}{k}\int\frac{ds}{\zeta}}.$$

M. Plana observe que pour que l'équation $p = k\rho\zeta$ donne (p) lorsque $\rho = (\rho)$, il faut poser $k = \frac{(p)}{(\rho)}$; et comme alors $T' = T$, on a nécessairement $\zeta = 1$. Substituant cette valeur de k dans les équations ci-dessus, il vient

(7)

$$p = (p)\, c^{-\frac{gr(\rho)}{(p)}\int\frac{ds}{\zeta}}, \qquad \rho = \frac{(\rho)}{\zeta}.\ c^{-\frac{gr(\rho)}{(p)}\int\frac{ds}{\zeta}}.$$

puis, divisant celles-ci l'une par l'autre, on a

$$\frac{p(\rho)}{(p)\rho} = \zeta = \frac{1 + mT'}{1 + mT};$$

telle est la relation qui lie les pressions aux températures.

Maintenant si l'on prend le log. de la valeur de ρ donnée par l'équation (7), il viendra

$$\log \rho = \log(\rho) - \log\zeta - \frac{gr(\rho)}{(p)}\int\frac{ds}{\zeta},$$

dont la différentielle est

$$d\zeta + \zeta\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{gr(\rho)}{(p)}\, ds.$$

Or cette dernière équation étant linéaire et du premier ordre, puisque ρ est censé fonction de s, il suffit de la comparer à celle-ci :

$$d\zeta + P\zeta\, ds = Q ds,$$

dont l'intégrale est

$$\zeta = c^{-\int P ds}\left[\int c^{\int P ds}.\, Q ds + C\right],$$

pour trouver sur-le-champ

$$\zeta = \frac{1}{\rho}\left[C - \frac{gr(\rho)}{(p)}\int\rho\, ds\right].$$

Alors, en substituant cette valeur dans la relation $p = \frac{(p)}{(\rho)}\rho\zeta$, on obtient

$$p = \frac{C\,(p)}{(\rho)} - gr\int \rho\, ds;$$

et comme à la surface de la Terre $\rho = (\rho)$, $p = (p)$, $z = 1$, on satisfera à cette condition en faisant $C = (\rho)$. Partant

$$\zeta = \frac{(\rho)}{\rho} - \frac{gr(\rho)}{(p\,\rho)}\int \rho\, ds, \quad p = (p) - gr\int \rho\, ds;$$

en observant que l'intégrale doit être prise de manière que sa valeur soit nulle à la surface de la Terre. Par exemple, dans le cas purement hypothétique d'une densité constante,

$$\zeta = 1 - \frac{gr}{(p)}(\rho)s, \quad p = (p) - gr(\rho)s,$$

c'est-à-dire que la température et la pression varient proportionnellement à la hauteur rs ou z. Mais, quelles que soient les lois de cette variation, on peut poser généralement

(8) $$\zeta = 1 - \varepsilon rs + \varepsilon''(rs)^2 + \varepsilon'''(rs)^3 + \ldots,$$

vu que ζ décroît à mesure que s augmente; et si l'on compare cette valeur à cette autre $\zeta = \frac{1 + mT'}{1 + mT} = 1 - \frac{m(T - T')}{1 + mT}$, on aura à très-peu près

$$\varepsilon = \frac{m(T - T')}{z(1 + mT)}, \quad m = 0{,}00375.$$

Maintenant si on élimine de l'équation (7) la pression $(p) = g\,(\rho)\,l$, il viendra

$$\rho = \frac{(\rho)}{\zeta}\, c^{-\frac{r}{l}\int \frac{ds}{\zeta}},$$

et à cause de $\frac{1}{\zeta} = c^{-\log\zeta} = c^{-\int \frac{d\zeta}{\zeta}}$ on aura

$$\rho = (\rho)\; c^{-\left(\frac{r}{l} + \frac{d\zeta}{ds}\right)\int \frac{ds}{\zeta}} = (\rho)\; c^{-\int \frac{V}{\zeta} ds},$$

en faisant, pour abréger, $V = \frac{r}{l} + \frac{d\zeta}{ds}$.

Tirant alors de la série (8) le rapport $\frac{d\zeta}{ds}$, on obtiendra

$$V = \frac{r}{l} - \varepsilon r + 2\varepsilon'' r^2 s + \ldots,$$

et de là

$$V = \frac{r}{l}(1 - \varepsilon l).$$

Enfin l'expression précédente de ρ prendra, après l'intégration, cette forme

$$\rho = (\rho)\, c^{-\frac{r}{l}(1-\varepsilon l)s} = (\rho)\left[1 - \frac{rs}{l}(1 - \varepsilon l)\ldots\right];$$

d'où l'on voit que le coefficient dépendant de la loi du décroissement de la chaleur, et que nous avons désigné par i, d'après Laplace, a pour expression $1 - \varepsilon l$ selon M. Plana.

Les applications que nous avons faites de cette théorie des réfractions terrestres (art. **217** et **225**), et notamment dans l'Appendice qui termine le II[e] vol. de la *Nouvelle description géométrique de la France*, montrent les avantages qu'elle offre en Géodésie dans certaines circonstances. Cependant, avant de passer à un autre sujet, nous ferons remarquer que l'on déduit de la relation (1), art. **247**, une formule qui semble être propre à donner exactement la différence de niveau de deux points M, M′ dont on aurait observé *simultanément* les distances zénithales réciproques, et recueilli les mesures météorologiques à chacun d'eux, leur distance respective étant d'ailleurs inconnue.

En effet, si δ et δ' sont les distances zénithales observées, l'une du point M, l'autre du point M′; si de plus r et r' sont les rayons vecteurs de ces points, partant du centre de la Terre, et que ρ et ρ' désignent les densités actuelles qui leur correspondent, on aura, en vertu de la relation citée,

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin\delta\sqrt{1+P\rho}}{\sin\delta'\sqrt{1+P\rho'}};$$

et par suite

$$\frac{r'-r}{r'+r} = \frac{\sin\delta\sqrt{1+P\rho} - \sin\delta'\sqrt{1+P\rho'}}{\sin\delta\sqrt{1+P\rho} + \sin\delta'\sqrt{1+P\rho'}}.$$

Or, le second membre ayant la forme $\frac{AB - A'B'}{AB + A'B'}$, il est évident que

$$\frac{2(AB - A'B')}{2(AB + A'B')} = \frac{(A - A')(B + B') + (A + A')(B - B')}{(A + A')(B + B') + (A - A')(B - B')},$$

et qu'en faisant

$$\frac{A - A'}{A + A'} = \frac{\sin\delta - \sin\delta'}{\sin\delta + \sin\delta'} = U, \qquad \frac{B - B'}{B + B'} = \frac{\sqrt{1 + P\rho} - \sqrt{1 + P\rho'}}{\sqrt{1 + P\rho} + \sqrt{1 + P\rho'}} = u,$$

on a

$$\frac{r' - r}{r' + r} = \frac{U + u}{1 + Uu} = x;$$

par conséquent

$$\frac{r'}{r} = \frac{1 + x}{1 - x} \quad \text{ou} \quad r' - r = \frac{2rx}{1 - x},$$

ou enfin

$$r' - r = \frac{2r(u + U)}{(1 - u)(1 - U)};$$

mais, à cause de la petitesse de u et de U, on a plus simplement

(9) $$r' - r = 2ru + 2rU.$$

Telle est l'expression de la différence de niveau des points M, M' donnée par M. Biot, et dans laquelle il est facile de voir que

$$U = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta + \delta')} \quad \text{et} \quad u = \frac{P(\rho - \rho')}{2 + P(\rho + \rho') + 2\sqrt{1 + P(\rho + \rho') + P^2\rho\rho'}},$$

ou assez exactement

$$u = \frac{\frac{1}{4}P(\rho - \rho')}{1 + \frac{1}{2}P(\rho + \rho')}.$$

Toutefois cette quantité u, qui doit être multipliée par le double du rayon de la Terre, et qui résulte de l'hypothèse d'une force centrale réglant la courbure de la trajectoire lumineuse, aurait en général trop d'influence sur la différence de niveau cherchée. Il ne serait donc pas étonnant qu'elle rendît souvent cette différence très-défectueuse, et même beaucoup plus que la formule (5) que nous avons donnée

(art. **218**) pour le cas présent où l'angle des deux verticales est inconnu ; aussi est-ce la remarque que nous fîmes tout d'abord lorsque l'application de la formule (9) fut recommandée en Géodésie (*) ; mais, pour en rendre la justesse plus sensible, reprenons les observations rapportées (art. **217**), savoir :

A Clermont-Ferrand :

Distance zénithale du Puy-de-Dôme. . . . . $\delta = 92^c,8436,32$
Baromètre. . . . . $h = 0^m,7325$
Thermomètre du baromètre. $T = 11^o,5$ centig.
Thermomètre libre. . . . . $t = 7^o,3$

$$\text{De là } \rho = \frac{h}{0,76\,(1+\beta t)\,(1+\beta' T)} = 0,936195.$$

Au Puy-de-Dôme :

Distance zénithale de Clermont. . . . . $\delta' = 107^c,2341,59$
Baromètre . . . . $h' = 0^m,644725$
Thermomètre du baromètre. $T' = 10^o,6$
Thermomètre libre. . . . . $t' = 9^o,4$

$$\text{De là } \rho' = \frac{h'}{0,76(1+\beta t')(1+\beta' T')} = 0,817875.$$

D'après ces données, et à cause de

$$\tfrac{1}{4}\,P = 0,000147192, \qquad r = 6366198^m,$$

on a

$$\log u = 5.2407221, \qquad \log U = 5.8410407 ;$$

enfin

$$\text{différence de niveau } r' - r = 2ru + 2rU$$
$$= 221^m,63 + 882^m,98 = 1104^m,61$$

Par la formule trigonométrique (4') (art. **218**), et la valeur de K donnée art. **216**, on a exactement. . . . . $1063^m,16$

Erreur. . . . . + $41^m,45$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1838, 2e semestre, page 6.

Ainsi, bien que la formule que nous venons d'évaluer soit une conséquence exacte de la théorie actuelle, elle n'offrirait aucune sécurité pour déterminer rigoureusement les différences de niveau à l'aide de seules distances zénithales réciproques et simultanées, n'y eût-il pas même accidentellement, comme ci-dessus, inversion des températures de l'air, et ne fût-ce que parce que le terme dépendant de la différence des pouvoirs réfringents entre en trop grande proportion dans le résultat cherché. Voilà ce qui explique en partie ce dont il est question dans la note de la page 448 du tome I, et ce qui prouve que les nivellements trigonométriques dégagés, autant que possible, de l'influence du phénomène qui nous occupe, sont toujours les meilleurs. Il faut donc réserver l'usage de la formule (9) pour des épreuves théoriques destinées à constater le caractère de la centralité des forces réfringentes, comme le dit d'ailleurs M. Biot dans ses nouvelles méditations sur la théorie des réfractions terrestres. (*Traité élémentaire d'Astronomie physique*, troisième édition, tome I, page 271.)

CHAPITRE III.

DES DIFFÉRENTES FORMULES DE PARALLAXE, ET DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES CIRCULAIRES.

---

255. Nous avons dit (art. 25) que la parallaxe de hauteur d'un astre est l'angle sous lequel on verrait du centre de cet astre le rayon de la Terre mené au lieu de l'observateur. Cette parallaxe est une fonction de la distance zénithale apparente et de la parallaxe horizontale, ainsi qu'on va le voir.

Soient Π cette parallaxe horizontale, ϖ la parallaxe de hauteur, ρ le rayon de la Terre supposée sphérique, Z la distance zénithale ZAS (*fig.* 4) de l'astre S observé, N la distance zénithale ZCS géocentrique, r la distance rectiligne CS.

Le triangle ASC donne

$$\frac{\sin \varpi}{\sin Z} = \frac{\rho}{r};$$

mais lorsque l'astre est à l'horizon, $\sin Z = 90°$ et $\sin \Pi = \frac{\rho}{r}$; de là

$$\sin \varpi = \sin \Pi \sin Z. \qquad (1)$$

Pour le Soleil, la valeur de Π ne va pas à $9''$; on peut donc prendre les arcs pour les sinus; ainsi,

$$\varpi = \Pi \sin Z; \qquad (1')$$

c'est-à-dire que *la parallaxe de hauteur est égale à la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la distance zénithale apparente.*

Si l'on voulait la parallaxe de hauteur en fonction de la distance zénithale géocentrique, il faudrait, dans la formule (1), substituer à

la place de Z, sa valeur $N + \varpi$; alors on aurait

$$\sin\varpi = \sin\Pi \sin(N + \varpi),$$

et en développant le second membre, il viendrait

$$\sin\varpi = \sin\Pi \sin N \cos\varpi + \sin\Pi \cos N \sin\varpi;$$

d'où

$$\tang\varpi = \frac{\sin\Pi \sin N}{1 - \sin\Pi \cos N};$$

enfin, réduisant en série et en secondes, on obtiendrait (art. 93)

$$\varpi = \Pi \sin N + \frac{\Pi^2}{2} \sin 1'' \sin 2N + \ldots$$

256. Pour montrer comment on doit tenir compte de la parallaxe de hauteur dans les calculs astronomiques, soient S (*fig.* 4) le lieu vrai, S′ le lieu apparent du centre du Soleil, et, comme ci-dessus, $N = ZCS$ sa distance vraie au zénith, telle qu'elle serait prise du centre de la Terre, $\theta = S'AS$ la réfraction vraie, ϖ la parallaxe ASC de l'astre S; on a évidemment

$$ZAS = ZCS + ASC = N + \varpi;$$

mais parce que la réfraction élève les objets, ou, ce qui est de même, diminue leur distance au zénith, on a ensuite

$$ZAS' = ZCS' + AS'C = ZCS - S'CS + AS'C;$$

d'ailleurs $S' = S$, $S'AS = S'CS$, du moins à très-peu près; désignant donc par Z la distance zénithale apparente ZAS′, on a

$$Z = N - \theta + \varpi,$$

et réciproquement

$$N = Z + \theta - \varpi.$$

Ainsi, 1°. la distance apparente au zénith, observée de la surface de

la Terre, est égale à la distance vraie géocentrique, diminuée de la réfraction et augmentée de la parallaxe;

2°. La distance vraie géocentrique est au contraire égale à la distance apparente observée de la surface, augmentée de la réfraction et diminuée de la parallaxe. L'effet de la parallaxe, opposé à celui de la réfraction, est donc d'abaisser les astres dans leurs verticaux respectifs.

Nous prévenons une fois pour toutes, que dans le calcul de la position des astres, on fait toujours usage des triangles sphériques dont les côtés sont des arcs de grand cercle de la sphère céleste : ainsi, en pareille circonstance on doit employer pour distance vraie d'un astre au zénith, celle qui serait prise du centre de la Terre. Mais quand il s'agit d'une étoile, il n'y a plus de différence sensible entre les angles ZAS' et ZCS', c'est-à-dire entre les angles qui seraient mesurés de la surface de la Terre, et ceux qui seraient observés du centre.

257. Un des moyens qu'on peut employer pour déterminer la parallaxe horizontale du Soleil, est celui-ci : supposons que deux observateurs, l'un dans l'hémisphère boréal, l'autre dans l'hémisphère austral, et placés sous le même méridien, observent le même jour la distance zénithale du Soleil à midi, qui est l'instant de la *médiation;* puis appelons Z, Z' les deux distances observées, et H, H' les latitudes connues des lieux d'observation A, B; on aura, par ce qui précède,

$$\varpi = \Pi \sin Z, \qquad \varpi' = \Pi \sin Z'.$$

Mais dans le quadrilatère ACBS (*fig.* 5), la somme des quatre angles égalant quatre angles droits, on a, dans l'hypothèse que les latitudes sont de différentes dénominations,

$$\Pi(\sin Z + \sin Z') + H + H' + 360^\circ - (Z + Z') = 360^\circ,$$

d'où

$$\text{parallaxe horiz. } \Pi = \frac{Z + Z' - H - H'}{\sin Z + \sin Z'} = \frac{Z + Z' - H - H'}{2\sin\left(\frac{Z+Z'}{2}\right)\cos\left(\frac{Z-Z'}{2}\right)}.$$

Cette méthode a en effet été pratiquée en 1751, par Lacaille au cap de Bonne-Espérance, et par Lalande à Berlin, pour déterminer la parallaxe horizontale de la Lune. Mais quoique ces deux astronomes ne fussent pas placés précisément sous le même méridien, comme nous venons de le supposer, cela ne les empêcha pas de rendre leurs observations comparables, en tenant compte du mouvement de la Lune en déclinaison, pour l'intervalle de temps correspondant à la différence des méridiens. Bien entendu qu'il fallut aussi ajouter à chaque distance zénithale observée, la réfraction dont elle se trouvait affectée. Il y a d'autres moyens pour déterminer la parallaxe horizontale des planètes (*voyez* les Traités d'Astronomie).

Comme la parallaxe de hauteur du Soleil s'emploie fréquemment dans les calculs astronomiques, nous avons donné, d'après Delambre, la table X, qui la fait connaître pour tous les temps de l'année.

258. Passons maintenant à la recherche des formules de parallaxes d'ascension droite et de déclinaison; mais, pour plus de généralité et d'élégance, ayons recours à la méthode analytique.

Si, par le centre C de la Terre (*fig.* 6), pris pour origine des coordonnées, l'on conçoit trois axes rectangles; que celui des x passe par l'équinoxe du printemps; que celui des y soit situé dans l'équateur; et que l'axe des z passe par le pôle boréal de ce cercle : la position du point E de l'espace sera connue par ses distances à ces trois axes, c'est-à-dire par les droites CP, PM, ME.

Soient donc x, y, z les coordonnées rectangles du centre E d'un astre situé dans l'hémisphère boréal, r sa distance CE au centre de la Terre, Æ son ascension droite ♈N, D sa déclinaison EN; on aura, en vertu de la propriété des deux triangles rectangles CPM, CME,

$$x = r \cos Æ \cos D, \quad y = r \sin Æ \cos D, \quad z = r \sin D. \quad (\alpha)$$

Soient pareillement X, Y, Z les coordonnées rectangles du point A où se trouve l'observateur sur la surface de la Terre, et g, h l'ascension droite du zénith et sa déclinaison ou la latitude géocentrique (art. **21**); on aura de même, à cause de CA $= \rho$,

$$X = \rho \cos g \cos h, \quad Y = \rho \sin g \cos h, \quad Z = \rho \sin h. \quad (\beta)$$

Enfin, prenant le lieu de l'observateur pour l'origine commune de trois autres axes rectangulaires respectivement parallèles aux primitifs; puis désignant par r' la distance de l'observateur à l'astre, et par Æ$'$, D$'$ l'ascension droite et la déclinaison apparentes de cet astre, on aura

$$x' = r'\cos Æ'\cos D', \quad y' = r'\sin Æ'\cos D', \quad z' = r'\sin D'. \quad (\gamma)$$

Or, il existe évidemment entre les coordonnées du lieu vrai et du lieu apparent de l'astre, les relations suivantes :

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z - Z, \quad (\delta)$$

ou bien, en ayant égard à celles (α), (β), (γ),

$$\left.\begin{aligned} r'\cos Æ'\cos D' &= r\cos Æ\cos D - \rho\cos g\cos h, \\ r'\sin Æ'\cos D' &= r\sin Æ\cos D - \rho\sin g\cos h, \\ r'\sin D' &= r\sin D \qquad\quad - \rho\sin h; \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

et si l'on divise successivement la seconde et la troisième équation par la première; qu'on fasse $\frac{\rho}{r} = \sin \Pi$, Π étant alors la plus grande parallaxe de hauteur (art. 24), on aura

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} Æ' &= \frac{\sin Æ\cos D - \sin\Pi\sin g\cos h}{\cos Æ\cos D - \sin\Pi\cos g\cos h}, \\ \operatorname{tang} D' &= \frac{\cos Æ'(\sin D - \sin\Pi\sin h)}{\cos Æ\cos D - \sin\Pi\cos g\cos h}. \end{aligned}\right\} \quad (\zeta)$$

Dans le calcul des éclipses on a en outre besoin d'avoir égard à l'augmentation du demi-diamètre de la Lune; or, en désignant par d, d' les angles sous lesquels on verrait ce demi-diamètre, respectivement du centre et d'un point de la surface de la Terre, les sinus de ces angles sont nécessairement en raison inverse des distances r, r'; c'est-à-dire que

$$\sin d' = \frac{r}{r'}\sin d.$$

Substituant, dans cette relation, la valeur de $\frac{r}{r'}$ tirée de la première

des équations (ε), il vient

$$\sin d' = \sin d \frac{\cos Æ' \cos D'}{\cos Æ \cos D - \sin \Pi \cos g \cos h}; \qquad (\zeta')$$

et dans ce cas, d est le demi-diamètre *vrai* et d' le demi-diamètre *apparent*.

Les formules (ζ) donnent le lieu apparent en fonction du lieu vrai et de la plus grande parallaxe de hauteur, ou de la parallaxe horizontale : elles sont attribuées à Olbers, qui les a obtenues, comme nous, par la méthode analytique de Lagrange. Mais il est plus simple, dans la pratique, d'évaluer les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison, pour en déduire ensuite le lieu apparent. La première parallaxe, qu'on désigne aussi sous le nom de *parallaxe d'angle horaire*, est $Æ' - Æ$, et la seconde est $D' - D$. Voici un moyen très-direct pour les obtenir.

La première équation (ζ) ayant lieu quelle que soit l'origine des ascensions droites, on peut retrancher de chacune d'elles la même quantité, l'arc $Æ$ par exemple; ce qui revient évidemment à changer la direction des axes x, y, en les laissant toutefois dans leur plan primitif. D'après cette remarque, on a sur-le-champ

$$\text{tang}(Æ' - Æ) = \frac{\sin \Pi \sin (Æ - g) \cos h}{\cos D - \sin \Pi \cos (Æ - g) \cos h} = \frac{\frac{\sin \Pi \cos h}{\cos D} \sin (Æ - g)}{1 - \frac{\sin \Pi \cos h}{\cos D} \cos (Æ - g)},$$

et l'on tire facilement de là,

$$\frac{\sin \Pi \cos h}{\cos D} = \frac{\sin (Æ' - Æ)}{\sin (Æ' - g)};$$

mais la différence $Æ' - Æ$ étant toujours très-petite, même pour la Lune, on pourra réduire cette expression en série, comme on l'a enseigné (art. 93), et n'en conserver que les termes les plus sensibles; on aura alors, en secondes de degré,

$$Æ' - Æ = \frac{\sin \Pi \cos h}{\cos D} \frac{\sin (Æ - g)}{\sin 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \Pi \cos h}{\cos D}\right)^2 \frac{\sin 2 (Æ - g)}{\sin 1''} + \ldots \qquad (A)$$

Par un raisonnement semblable au précédent, les équations (ζ) se

changent tout de suite en celles-ci :

$$\tang(\text{Æ}' - g) = \frac{\sin(\text{Æ} - g)\cos D}{\cos(\text{Æ} - g)\cos D - \sin \Pi \cos h},$$

$$\tang D' = \frac{\cos(\text{Æ}' - g)(\sin D - \sin \Pi \sin h)}{\cos(\text{Æ} - g)\cos D - \sin \Pi \cos h};$$

en sorte qu'en les divisant l'une par l'autre, on a

$$\tang D' = \frac{\sin(\text{Æ}' - g)}{\sin(\text{Æ} - g)}\left(\tang D - \frac{\sin \Pi \sin h}{\cos D}\right),$$

ou bien, introduisant les distances polaires vraie et apparente, c'est-à-dire faisant $D = 90^\circ - \Delta$, $D' = 90^\circ - \Delta'$, il vient

$$\cot \Delta' = \frac{\sin(\text{Æ}' - g)}{\sin(\text{Æ} - g)}\left(\cot \Delta - \frac{\sin \Pi \sin h}{\sin \Delta}\right).$$

Pour tirer de cette formule la valeur de la parallaxe de déclinaison ou plutôt de distance polaire, savoir $\Delta' - \Delta = \sigma$, on remarquera que l'on a d'abord

$$\cot \Delta - \cot \Delta' = \cot \Delta - \frac{\sin(\text{Æ}' - g)}{\sin(\text{Æ} - g)}\left(\cot \Delta - \frac{\sin \Pi \sin h}{\sin \Delta}\right),$$

et par suite

$$\frac{\sin(\Delta' - \Delta)}{\sin \Delta \sin(\Delta + \sigma)} = \cot \Delta\left[1 - \frac{\sin(\text{Æ}' - g)}{\sin(\text{Æ} - g)}\right] + \frac{\sin(\text{Æ}' - g)}{\sin(\text{Æ} - g)}\frac{\sin \Pi \sin h}{\sin \Delta};$$

mais de la valeur ci-dessus de $\cot \Delta'$ on tire

$$\cot \Delta = \cot \Delta' \frac{\sin(\text{Æ} - g)}{\sin(\text{Æ}' - g)} + \frac{\sin \Pi \sin h}{\sin \Delta},$$

et en substituant celle-ci dans la relation précédente, on arrive sans peine à cette expression

$$\frac{\sin(\Delta' - \Delta)}{\sin \Delta \sin(\Delta + \sigma)} = \frac{\sin \Pi \sin h}{\sin \Delta} + \cot \Delta'\left[\frac{\sin(\text{Æ} - g)}{\sin(\text{Æ}' - g)} - 1\right]$$

$$= \frac{\sin \Pi \sin h}{\sin \Delta} - 2\cot \Delta' \frac{\sin\frac{1}{2}(\text{Æ}' - \text{Æ})\cos\left(\frac{\text{Æ}' + \text{Æ}}{2} - g\right)}{\sin(\text{Æ}' - g)}.$$

Multipliant maintenant le second terme du deuxième membre, haut et bas, par $\cos \frac{1}{2}(\text{Æ}' - \text{Æ})$, il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{\sin(\Delta' - \Delta)}{\sin(\Delta + \sigma)} = \sin \Pi \sin h - \frac{\cot \Delta' \sin \Pi \cos h \cos\left(\frac{\text{Æ}' + \text{Æ}}{2} - g\right)}{\cos\frac{1}{2}(\text{Æ}' - \text{Æ})},$$

ou bien, faisant

$$\tang x = \frac{\cot h \cos\left(\frac{\text{Æ}' + \text{Æ}}{2} - g\right)}{\cos\frac{1}{2}(\text{Æ}' - \text{Æ})},$$

on a

$$\sin(\Delta' - \Delta) = \sin \Pi \sin h \left[\sin(\Delta + \sigma) - \tang x \cos(\Delta + \sigma)\right]$$
$$= \frac{\sin \Pi \sin h}{\cos x} \sin(\Delta - x + \sigma);$$

enfin, divisant les deux membres par $\cos(\Delta' - \Delta) = \cos \sigma$, il vient

$$\tang \sigma = \frac{\frac{\sin \Pi \sin h}{\cos x} \sin(\Delta - x)}{1 - \frac{\sin \Pi \sin h}{\cos x} \cos(\Delta - x)},$$

et en série, $\Delta' - \Delta$ ou

$$\sigma = \frac{\sin \Pi \sin h}{\cos x} \frac{\sin(\Delta - x)}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \Pi \sin h}{\cos x}\right)^2 \frac{\sin 2(\Delta - x)}{\sin 1''} + \ldots \quad \text{(B)}$$

Telle est la valeur de la parallaxe de distance polaire.

La formule finie (ζ') est susceptible aussi d'être rendue propre au calcul logarithmique. En effet, on a évidemment, en changeant comme ci-dessus la direction des axes rectangles,

$$\sin d' = \sin d \frac{\cos(\text{Æ} - \text{Æ}') \cos D'}{\cos D - \sin \Pi \cos h \cos(\text{Æ} - g)},$$

et, à cause de la première expression de $\tang(\text{Æ}' - \text{Æ})$, il vient

$$\sin d' = \sin d \frac{\sin(\text{Æ}' - \text{Æ}) \cos D'}{\sin \Pi \cos h \sin(\text{Æ} - g)}.$$

Multipliant haut et bas par $\sin(\text{Æ}' - g)$ et faisant attention que

$$\frac{\sin \Pi \cos h}{\sin \Delta} = \frac{\sin(\text{Æ}' - \text{Æ})}{\sin(\text{Æ}' - g)},$$

on a définitivement

$$\sin d' = \sin d \frac{\sin \Delta' \sin (Æ' - g)}{\sin \Delta \sin (Æ - g)}. \quad (\zeta'')$$

Ainsi le calcul du demi-diamètre apparent dépend, dans ce cas, de la parallaxe d'angle horaire $(Æ - g)$, et de celle de distance polaire Δ.

On observera que ces formules de parallaxe, dues à Delambre, seraient absolument de même forme, si, au lieu de rapporter l'astre à l'équateur, on le rapportait à l'écliptique ; mais dans ce cas, les ascensions droites se changeraient en longitudes et les déclinaisons en latitudes. Soient donc L la longitude vraie d'un astre et λ sa latitude, n la longitude du zénith ou du *nonagésime*, q la latitude du zénith ou le complément de la hauteur du nonagésime ; puis représentons par L' et λ' les coordonnées du lieu apparent de l'astre ; les formules (ζ) donneront

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} L' &= \frac{\sin L \cos \lambda - \sin \Pi \sin n \cos q}{\sin L \cos \lambda - \sin \Pi \sin n \cos q}, \\ \operatorname{tang} \lambda' &= \frac{\cos L' (\sin \lambda - \sin \Pi \sin q)}{\cos L \cos \lambda - \sin \Pi \cos n \cos q}, \end{aligned}\right\} \quad (\xi)$$

et de là on aura pour la parallaxe de longitude,

$$\operatorname{tang} (L' - L) = \frac{\sin \Pi \sin (L - n) \cos q}{\cos \lambda - \sin \Pi \cos (L - n) \cos q} = \frac{\frac{\sin \Pi \cos q}{\cos \lambda} \sin (L - n)}{1 - \frac{\sin \Pi \cos q}{\cos \lambda} \cos (L - n)},$$

$$L' - L = \frac{\sin \Pi \cos q}{\cos \lambda} \frac{\sin (L - n)}{\sin 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \Pi \cos q}{\cos \lambda}\right)^2 \frac{\sin 2 (L - n)}{\sin 1''} + \ldots \quad (C)$$

Soient $\lambda = 90^\circ - \delta$, $\lambda' = 90^\circ - \delta'$; la parallaxe de latitude sera $\lambda' - \lambda$; par conséquent la parallaxe de distance au pôle de l'écliptique, en la désignant par η, sera $\eta = \delta' - \delta$, et si l'on fait

$$\operatorname{tang} y = \frac{\cot q \cos \left(\frac{L' + L}{2} - n\right)}{\cos \frac{1}{2} (L' - L)},$$

on aura, par ce qui précède,

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{\frac{\sin \Pi \sin q}{\cos y} \sin (\delta - n)}{1 - \frac{\sin \Pi \sin q}{\cos y} \cos (\delta - n)},$$

ou en série très-convergente

$$\eta = \frac{\sin \Pi \sin q}{\cos y} \frac{\sin(\delta - n)}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \Pi \sin q}{\cos y}\right)^2 \frac{\sin 2(\delta - n)}{\sin 1''} + \ldots \qquad \text{(D)}$$

259. Les latitudes et les longitudes sont liées aux ascensions droites et aux déclinaisons par des relations qui se déduisent tout naturellement des formules de la Trigonométrie sphérique. Soient par exemple (*fig.* 7) E une étoile, P le pôle boréal de l'équateur ♈Q, P′ le pôle boréal de l'écliptique ♈Q′, ♈ le point o d'*Aries*, et P′P le *colure* des solstices, ou le grand cercle de la sphère céleste perpendiculaire à l'écliptique et à l'équateur, auquel cas ♈Q = ♈Q′ = 90°; P♈ le *colure* des équinoxes, enfin ω l'obliquité Q′♈Q de l'écliptique ou l'arc P′P.

Cela posé, si, par les pôles P, P′ et par l'astre E, l'on mène des arcs de grand cercle PA, P′L, le premier sera un cercle de déclinaison, le second un cercle de latitude, P′EP l'angle de *position*, et l'on aura, en vertu de la notation adoptée ci-dessus,

$$♈A = Æ, \quad AE = D, \quad ♈L = L, \quad EL = \lambda;$$

de plus, dans le triangle sphérique P′PE, on aura

$$PP' = \omega, \quad PE = 90^\circ - D, \quad P'E = 90^\circ - \lambda,$$
$$\text{angle } P = 180^\circ - (90^\circ - Æ) = 90 + Æ,$$
$$\text{angle } P' = 90 - L;$$

et d'après les propriétés démontrées aux art. **54** et **65**, les relations cherchées seront

$$\left.\begin{aligned} \sin D &= \cos\omega \sin\lambda + \sin\omega \cos\lambda \sin L, \\ \text{tang } Æ &= \frac{\cos\omega \sin L - \sin\omega \text{ tang}\lambda}{\cos L}; \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\lambda &= \cos\omega \sin D - \sin\omega \cos D \sin Æ, \\ \text{tang } L &= \frac{\cos\omega \sin Æ + \sin\omega \text{ tang} D}{\cos Æ}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Les deux premières font connaître l'ascension droite et la déclinaison par la latitude et la longitude, les deux autres donnent la solution du problème inverse.

L'analyse adoptée dans ce chapitre conduit de même fort simplement à ces relations. Pour le prouver, représentons par x', y', z' le système de coordonnées rectangles relatif à l'écliptique, mais supposons que l'axe des x' soit le même que celui des x; on aura, pour l'astre E que l'on considère,

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos Æ \cos D, \\ x' = r\cos L \cos \lambda, \end{array}\right\} (a) \quad \left.\begin{array}{l} y = r\sin Æ \cos D, \\ y' = r\sin L \cos \lambda, \end{array}\right\} (b) \quad \left.\begin{array}{l} z = r\sin D, \\ z' = r\sin \lambda. \end{array}\right\} (c)$$

Mais quand on passe du système de coordonnées x, y, z à l'autre x', y', z', on a dans l'hypothèse actuelle, et parce que l'angle des axes y, y' est ω,

$$x = x', \quad y = y'\cos\omega - z'\sin\omega, \quad z = z'\cos\omega + y'\sin\omega; \quad (d)$$

réciproquement,

$$x' = x, \quad y' = y\cos\omega + z\sin\omega, \quad z' = z\cos\omega - y\sin\omega; \quad (e)$$

par conséquent si l'on met dans les relations (d) pour x, y, z leurs valeurs $(a), (b), (c)$, on aura tout d'abord

$$\left.\begin{array}{r} \cos Æ \cos D = \cos L \cos \lambda, \\ \sin Æ \cos D = \sin L \cos\lambda \cos\omega - \sin\lambda \sin\omega, \\ \sin D = \sin\lambda \cos\omega + \sin L \cos\lambda \sin\omega, \end{array}\right\} (f)$$

et si l'on procède de même à l'égard des relations inverses (e), on aura

$$\left.\begin{array}{r} \cos L \cos\lambda = \cos Æ \cos D, \\ \sin L \cos\lambda = \sin Æ \cos D \cos\omega + \sin D \sin\omega, \\ \sin\lambda = \sin D \cos\omega - \sin Æ \cos D \sin\omega. \end{array}\right\} (g)$$

Divisant maintenant la seconde et la troisième formule (f) successivement par la première, on obtiendra, comme par la Trigonométrie sphérique,

$$\operatorname{tang} Æ = \frac{\sin L \cos\omega - \operatorname{tang}\lambda \sin\omega}{\cos L},$$

$$\operatorname{tang} D = \frac{(\operatorname{tang}\lambda \cos\omega + \sin L \sin\omega) \cos Æ}{\cos L}.$$

Enfin, opérant de la même manière sur les formules (g), il viendra

$$\tang \mathrm{L} = \frac{\sin Æ \cos\omega + \tang \mathrm{D} \sin\omega}{\cos Æ},$$

$$\tang \lambda = \frac{(\tang \mathrm{D} \cos\omega - \sin Æ \sin\omega)\cos \mathrm{L}}{\cos Æ}.$$

On voit par ce procédé analytique, tout fondé sur la simple transformation des coordonnées, qu'on retrouve avec une extrême facilité les formules principales de la Trigonométrie sphérique.

260. Revenons à notre sujet. En Astronomie, la position du zénith, à l'égard de l'équateur, est donnée par son ascension droite g et sa déclinaison h; car cette ascension droite est le temps sidéral à l'époque de l'observation de l'astre, et la déclinaison du zénith est la latitude géocentrique, laquelle est égale à la latitude géographique H, moins l'angle ω de la verticale avec le rayon de la Terre (art. **21**). Cet angle se calcule par la formule suivante :

$$\omega = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\frac{\sin 2\mathrm{H}}{\sin 1''} - \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \frac{\sin 4\mathrm{H}}{\sin 2''} + \ldots = \tfrac{1}{2}e^2\frac{\sin 2\mathrm{H}}{\sin 1''} + \ldots,$$

qui dérive de celle (8) de l'art. **168**. Mais la table XI le donne sur-le-champ pour l'aplatissement $\frac{1}{309}$.

Quant à la longitude n et à la latitude q du zénith, on ne peut les déterminer qu'à l'aide des formules démontrées ci-dessus, savoir :

$$\tang n = \cos\omega \tang g + \frac{\sin\omega \tang h}{\cos g}, \qquad \cos q = \frac{\cos g \cos h}{\cos n},$$

ou, pour lever le doute sur l'espèce de l'angle q,

$$\sin q = \sin h \cos\omega - \cos h \sin\omega \sin g.$$

Les valeurs de n et q étant trouvées, il sera facile ensuite de calculer les parallaxes de longitude et de latitude qui sont fonctions de ces valeurs. Les unes et les autres se calculent ordinairement avec les logarithmes à cinq décimales, comme on le verra par la suite.

261. Afin de tirer quelques conséquences des formules générales de parallaxe, déduisons d'abord l'expression de la parallaxe de hauteur de celle de distance polaire $\sigma = \Delta' - \Delta$. Pour cela, faisons coïncider le pôle de l'équateur avec le zénith, ou, ce qui est de même, prenons l'équateur pour l'horizon; alors Δ deviendra égal à la distance zénithale vraiment géocentrique N, et Δ' sera la distance zénithale apparente Z. Dans la même hypothèse, la parallaxe d'ascension droite $Æ' - Æ$ sera nulle; ainsi la formule dont il s'agit donnera sur-le-champ, à cause de $h = 90^\circ$,

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\Delta+\sigma)} = \sin \Pi \sin 90^\circ;$$

ou changeant σ en ϖ, et Δ en N, on a

$$\sin\varpi = \sin\Pi \sin(\mathrm{N}+\varpi) = \sin\Pi \sin \mathrm{Z};$$

c'est la formule de parallaxe de hauteur démontrée à l'art. **255**.

262. Pour arriver aux formules de parallaxe annuelle, on supposerait l'observateur sur un point de l'écliptique; dans ce cas, la latitude q du zénith serait nulle, et la longitude n de ce point représenterait la longitude terrestre, tandis que Π désignerait la parallaxe annuelle ou du grand orbe, lorsqu'elle est la plus grande possible.

Cela posé, soient ♁ la longitude héliocentrique de la Terre (art. **19**), ☉ le lieu du Soleil, p la parallaxe annuelle en longitude, η celle en latitude; la formule (C) donnera, à cause de ♁ $=$ ☉ $+ 180^\circ$,

$$p = \frac{\Pi \sin(\mathrm{L} - ♁)}{\cos\lambda} = -\frac{\Pi\sin(\mathrm{L} - ☉)}{\cos\lambda};$$

L et λ étant la longitude et la latitude d'une étoile.

La série (D) fournira la parallaxe annuelle en latitude, et se réduira, avec un peu d'attention, à

$$\eta = \Pi \sin\lambda \cos(\mathrm{L} - ♁) = -\Pi\sin\lambda\cos(\mathrm{L} + ☉).$$

Ces deux formules ne sont qu'approximatives; mais elles suffisent,

puisque l'existence de Π est encore révoquée en doute pour les étoiles même les plus brillantes. (Voyez l'*Astronomie* de Delambre, tome III, page 137 et suivantes.)

Calcul des parallaxes d'ascension droite et de déclinaison.

263. Lorsque la Terre est considérée comme sphérique, la parallaxe horizontale d'un astre qui reste à une distance constante de la Terre, est la même pour tous les lieux où elle peut être observée. Elle est au contraire variable pour la Terre elliptique. Par exemple, sous l'équateur elle est à son *maximum*, et au pôle elle est la plus petite possible, toutes choses égales d'ailleurs. Comme dans les éphémérides on ne donne que les valeurs des parallaxes équatoriales, et que dans les calculs astronomiques on fait usage des parallaxes horizontales, ou pour mieux dire, des plus grandes parallaxes de hauteur, pour un lieu dont la latitude est donnée; on exprimera celles-ci en fonction des premières, ainsi qu'il suit :

Soient a le rayon de l'équateur terrestre, R le rayon correspondant au point dont la latitude est H, Π' la parallaxe équatoriale, et Π la parallaxe horizontale; on aura, en désignant en outre par r la distance de la Terre à l'astre,

$$\sin \Pi' = \frac{a}{r}, \quad \sin \Pi = \frac{R}{r};$$

par conséquent

$$\sin \Pi = \frac{R}{a} \sin \Pi';$$

enfin, substituant pour R sa valeur (art. **167**), on a à très-peu près

$$\Pi = \Pi' (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H) = \Pi' (1 - \alpha \sin^2 H).$$

Supposons maintenant, avec Delambre (*Astron.*, tome I, p. 385), les données suivantes :

ascension droite de la Lune Æ = 9°49′14″
déclinaison de la Lune D = 4.49.44 boréale
ou distance polaire Δ = 85.10.16
parallaxe horizontale ☾, ou Π = 54. 2″,5; demi-diam. ☾ = 14′47″
obliquité de l'écliptique ω = 23.28.21
asc. droite du zénith g = 311. 5.24
déclinaison du zénith h = 48.39.50.

Cela posé, on trouvera la parallaxe d'ascension droite au moyen de la série (A) dans laquelle $Æ - g + 360^\circ = 58^\circ 44' 50'' = P$ (nous ajoutons 360°, afin de pouvoir effectuer la soustraction dans l'ordre indiqué). Voici le calcul :

log. sin Π	= 8,1964370	log. $\frac{1}{2}$	= 9,69897
l. cos h	= 9,8198564	c.l. sin 1″	= 5,31443
c.log. sin Δ	= 0,0015442	$2m$	= 6,03568
m	= 8,0178376	l. sin 2P	= 9,94808
log. sin P	= 9,9318319	l. 2e terme	= 0,99716
c.log. sin 1″	= 5,3144251		
l. 1er terme	= 3,2640946		

1er terme	0°30′36″,94
2e terme	+ 9 ,93
paral. d'asc. dr. =	30.46 ,87 = p
Æ =	9.49.14 ,00
asc. dr. apparente Æ′ =	10.20. 0 ,87

La parallaxe de distance polaire se déterminera à l'aide de la série (B); mais il s'agit de calculer en premier lieu l'arc auxiliaire x par sa tangente. Or comme, d'après ce qui précède,

$$\frac{Æ' + Æ}{2} - g = P + \tfrac{1}{2} p = 58^\circ 59' 13'',5,$$

on a

c.log. cos $\frac{1}{2}$(Æ′ − R) =	0,0000043
l. cos (P + $\frac{1}{2}$ p) =	9,7124221
l. cot h =	9,9443044
l. tang x =	9,6567308

x =	24°21′ 8″
Δ =	85.10.16
Δ − x =	60.49. 8

Évaluant ensuite les deux termes de la série (B), il vient

$$\log. \frac{\sin \Pi \sin h}{\cos x} = m' = 8{,}1124574 \qquad 2m' = 6{,}224915$$

$$\text{l.}\sin(\Delta - x) = 9{,}9410555 \qquad \text{l.}\sin 2(\Delta - x) = 9{,}930124$$

$$\text{c.log.}\sin 1'' = 5{,}3144251 \qquad \text{c.log.}\sin 2'' = 5{,}013395$$

$$\text{l. } 1^{er} \text{ terme} = 3{,}3679380 \qquad \text{l. } 2^{e} \text{ terme} = 1{,}168434$$

$$\begin{array}{rl} 1^{er} \text{ terme} & 0^\circ 38' 53'',13 \\ 2^{e} \text{ terme} & +\ 14,74 \\ \hline \text{paral. de dist. pol.} = & 0.39.\ 7,87 = \sigma \\ \Delta = & 85.10.16,00 \\ \hline \text{distance polaire apparente } \Delta' = & 85.49.23,87. \end{array}$$

Calcul de l'augmentation du demi-diamètre.

On sait d'abord que le demi-diamètre ☾ $= 14'47'' = d$, et à cause de

$$Æ' - g = Æ - g + p = \text{P} + p = 59^\circ 14' 36'',9,$$

la formule finie (ζ'') donne

$$\begin{array}{rl} \text{l.}\sin(Æ' - g) = & 9{,}9341697 \\ \text{c.l.}\sin(Æ - g) = & 0{,}0681681 \\ \text{l.}\sin \Delta' = & 9{,}9988450 \\ \text{c.l.}\sin \Delta = & 0{,}0015442 \\ \hline & 0{,}0027270 \\ \log.\ d = 687''. \ . \ . & 2{,}9479236 \\ \hline \log\ d' = & 2{,}9506506 = 892'',59 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{on a donc} & d' = & 14'52'',59 \\ & -\,d = & 14.47,00 \\ \hline \text{augment. cherchée } d' - d = & & 5,59 \end{array}$$

Calcul des parallaxes de longitude et de latitude.

264. On remarquera que le nonagésime et le milieu du ciel ou le zénith sont toujours l'un et l'autre d'un même côté, par rapport au colure des solstices (art. **259**).

Soient encore, comme l'a supposé Delambre,

longitude de la Lune. . L= 10°55′11″, latit. boréale λ= 0°32′45″,
nonagésime ou longit. dist. polaire δ=89.27.15,
du zénith . . . . . . n=340. 3.15, lat. du zénith q=62.29.50,
latitude géocentrique. . h= 48.39.50,
parall. horizont. ☾, ou Π= 54. 2,5;

au surplus, en effectuant le calcul du nonagésime par les formules de l'art. **260**, il viendrait, en vertu des données précédentes,

	tang n=−0,36290,	log. tang n=9,55979−
d'où	n=−19°56′45″,	ou bien n=340°3′15″;
ensuite	sin q= 0,88699,	log. sin q=9,94792,
et enfin	q= 62°29′50″.	

Quant à la parallaxe de longitude L′−L, on l'obtiendra par la formule (C), dont voici le calcul :

L= 10°55′11″
n=−19.56.40
L−n= 30.51.51.

1er terme.	2e terme.
sin Π =8,19644	
cos q =9,66445	
c. cos λ =0,00002	log ½ =9,69897
7,86091.	7,86091
sin (L−n) =9,71012	7,86091
c. sin 1″=5,31443	sin 2 (L−n) =9,94483
log 1er terme =2,88546	c. sin 1″ =5,31443
	log. 2e terme =0,68005.

$$
\begin{aligned}
1^{er}\ \text{terme} &= 768'',16\\
2^{e}\ \text{terme} &= \underline{4\ ,79}\\
\text{parallaxe de longitude} &= 772\ ,95 = 12'52'',95.
\end{aligned}
$$

Le troisième terme négligé est seulement $+\,0'',03$; on a donc

$$
\begin{aligned}
\text{longitude apparente } L' &= 10^{\circ}55'11'' + 12'53''\\
&= 11.\ 8.\ 4.
\end{aligned}
$$

La parallaxe de distance polaire s'obtiendra à l'aide de la formule (D) et ainsi qu'il suit :

$$
\begin{array}{rlrl}
\frac{L+L'}{2} = & 11^{\circ}\ 1'37'' & L' = & 11^{\circ}\ 8'\ 4''\\
n = & -\underline{19.56.40} & n = & -\underline{19.56.40}\\
\frac{L+L'}{2} - n = & 30.58.17 & L' - n = & 31.\ 4.44
\end{array}
$$

$$\frac{L'-L}{2} = 0^{\circ}\ 6'\ 26'',5$$

$$\delta = 90^{\circ} - \lambda = 89.27.15.$$

Calcul de l'angle subsidiaire y.

$$
\begin{aligned}
\cot q &= 9,7165281\\
\cos\left(\frac{L'+L}{2} - n\right) &= 9,9331952\\
\text{c.}\cos\tfrac{1}{2}(L'-L) &= \underline{0,0000008}\\
\operatorname{tang} y &= 9,6497241 = 24^{\circ}\ 3'21''\\
\delta &= \underline{89.27.15}\\
\delta - y &= 65.23.54\\
2(\delta - y) &= 130.47.48
\end{aligned}
$$

Calcul de la parallaxe de distance polaire $\delta' - \delta = \eta$.

$$
\begin{array}{rlrl}
\sin \Pi = & 8,1964370 & & \\
\sin q = & 9,9479187 & & \\
\text{c.}\cos y = & \underline{0,0394585} & & \\
\log.\ m = & 8,1838142 & 2\log.\ m = & 6,36763\\
\sin(\delta - y) = & 9,9586709 & \sin 2(\delta - y) = & 9,87911\\
\text{c.}\sin 1'' = & \underline{5,3144251} & \text{c.}2\sin 1'' = & \underline{5,01340}\\
\log.\ 1^{er}\ \text{terme} = & 3,4569102 & \log.\ 2^{e}\ \text{terme} = & 1,26014
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}}\ \text{terme} &= 47'43'',590 \\ 2^{\text{e}}\ \text{terme} &= 18,202 \\ \hline \text{parallaxe}\ \eta &= 48.\ 1,792 \end{aligned}$$

Si l'on tenait compte du 3e terme, qui est $-0'',068$, on aurait $\eta = 48'1'',72$; mais la valeur de cette parallaxe s'obtient assez simplement ainsi qu'il suit. D'abord, à cause de l'expression finie

$$\cot \delta' = \frac{\sin(\mathrm{L}' - n)}{\sin(\mathrm{L} - n)}\left(\cot \delta - \frac{\sin \Pi \sin q}{\sin \delta}\right),$$

on a, en faisant $\tang \theta = \frac{\sin \Pi \sin q}{\sin \delta}$,

$$\cot \delta' = \frac{\sin(\mathrm{L}' - n)\cos(\delta + \theta)}{\sin(\mathrm{L} - n)\sin \delta \cos \theta},$$

formule qui donne la distance apparente au pôle de l'écliptique. Opérant avec les logarithmes à sept décimales, il vient

$$\begin{aligned} \sin \Pi &= 8,1964370 \\ \sin q &= 9,9479187 \\ \text{c.} \sin \delta &= 0,0000197 \\ \hline \tang \theta &= 8,1443754 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= 0^\circ 47' 55'' 9 \\ \delta &= 89.27.15,0 \\ \hline \delta + \theta &= 90.15.10,9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{c.} \cos \theta &= 0,0000422 \\ \text{c.} \sin \delta &= 0,0000197 \\ \cos(\delta + \theta) &= 7,6450441 - \\ \sin(\mathrm{L}' - n) &= 9,7128330 \\ \text{c.} \sin(\mathrm{L} - n) &= 0,2898798 \\ \hline \cot \delta' &= 7,6478188 - \\ \text{c.} \sin 1'' &= 5,3144251 \\ \hline \log \delta' &= 2,9622439 - = 916'',73. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de là} \ldots\ldots\ldots\ldots\ \delta' &\doteq 90^\circ 15' 16'' 73 \\ \text{et puisque} \ldots\ldots\ldots\ \delta &= 89.27.15,00 \\ \hline \text{on a, parall. cherchée} \ldots\ \eta &= 0.48.\ 1,73. \end{aligned}$$

CHAPITRE IV.

DES FORMULES DE PRÉCESSION EN ASCENSION DROITE ET EN DÉCLINAISON, ET DE LEUR USAGE POUR CALCULER LES POSITIONS MOYENNES DES ÉTOILES.

265. Le phénomène en vertu duquel tous les astres semblent doués d'un mouvement commun d'occident en orient et se mouvoir parallèlement à l'écliptique, lorsque l'on compare leurs positions à celle du point équinoxial du printemps, affecte les ascensions droites et les déclinaisons ; mais le mouvement progressif le long de l'écliptique n'étant que de 50",1 par an environ, ces deux coordonnées n'éprouvent elles-mêmes que de petits changements dans le même intervalle de temps. Toutefois ces changements ne sont pas entièrement dus à la variation de la longitude; une partie, très-petite à la vérité, dépend de la variation séculaire de l'angle des plans de l'écliptique et de l'équateur. Pour avoir égard à ces deux circonstances, il faut donc considérer en général la longitude L et l'obliquité ω comme des quantités variables. Mais, afin de pouvoir traiter les variations actuelles comme des différentielles, nous supposerons qu'elles correspondent à un intervalle de temps très-court.

D'abord, en reprenant la notation et les formules de l'art. **258**, on a

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos Æ \cos D, \\ x' = r\cos L \cos\lambda, \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} y = r\sin Æ \cos D, \\ y' = r\sin L\cos\lambda, \end{array}\right\} (2) \qquad \left.\begin{array}{l} z = r\sin D, \\ z' = r\sin\lambda, \end{array}\right\} (3)$$

$$\overset{(4)}{x = x'}, \quad \overset{(5)}{y = y'\cos\omega - z'\sin\omega}, \quad \overset{(6)}{z = z'\cos\omega + y'\sin\omega}.$$

Soient dL le changement de longitude, et $d\omega$ celui de l'obliquité; dÆ, dD les variations qu'éprouvent l'ascension droite et la déclinaison en

vertu de ce changement. Les quantités constantes, par suite de l'hypothèse précédente, sont r, λ et z'; car r est le rayon de la sphère céleste, et λ, z' sont les distances circulaire et rectiligne de l'astre au plan de l'écliptique supposé fixe. Ainsi, en différentiant la première équation (3), il viendra

$$dz = rd\mathrm{D}\cos\mathrm{D};$$

d'ailleurs, de la relation (6) on tire

$$dz = d\omega\,(y'\cos\omega - z'\sin\omega) + dy'\sin\omega = yd\omega + dy'\sin\omega.$$

Différentiant de même la deuxième équation (2), on a

$$dy' = rd\mathrm{L}\cos\mathrm{L}\cos\lambda = rd\mathrm{L}\cos Æ\cos\mathrm{D},$$

puisque $x = x'$. Par suite

$$dz = rd\omega\cos\mathrm{D}\sin Æ + rd\mathrm{L}\cos\mathrm{D}\cos Æ.$$

Égalant ces deux valeurs de z et divisant tout par $r\cos\mathrm{D}$, il vient enfin

$$d\mathrm{D} = d\omega\sin Æ + d\mathrm{L}\sin\omega\cos Æ. \qquad (\alpha)$$

Maintenant, pour obtenir la variation en ascension droite, on différentiera la première équation (2), qui donnera

$$dy = rdÆ\cos Æ\cos\mathrm{D} - rd\mathrm{D}\sin Æ\sin\mathrm{D},$$

et de la relation (5) on tirera, à cause de celle (6),

$$dy = dy'\cos\omega - d\omega\,(y'\sin\omega + z'\cos\omega) = dy'\cos\omega - zd\omega.$$

De plus, la deuxième équation (2) fournit

$$dy' = rd\mathrm{L}\cos\mathrm{L}\cos\lambda = rd\mathrm{L}\cos Æ\cos\mathrm{D},$$

par conséquent

$$dy = rd\mathrm{L}\cos\omega\cos Æ\cos\mathrm{D} - rd\omega\sin\mathrm{D}.$$

Égalant cette valeur à la précédente, et effaçant le facteur commun, on obtient

$$d\text{Æ} \cos \text{Æ} \cos D - dD \sin \text{Æ} \sin D = dL \cos \omega \cos \text{Æ} \cos D - d\omega \sin D;$$

puis remplaçant dD par sa valeur (α), on trouve, après avoir réduit,

$$d\text{Æ} = - d\omega \cos \text{Æ} \operatorname{tang} D + dL (\cos \omega + \sin \omega \sin \text{Æ} \operatorname{tang} D). \quad (\beta)$$

266. Ces calculs étant purement analytiques, voici une autre solution en faveur de ceux qui préfèrent les méthodes trigonométriques.

De la première des relations,

$$(1') \qquad \sin \lambda = \cos \omega \sin D - \sin \omega \cos D \sin \text{Æ},$$
$$(2') \qquad \sin D = \cos \omega \sin \lambda + \sin \omega \cos \lambda \sin L,$$
$$(3') \qquad \cos \text{Æ} \cos D = \cos L \cos \lambda,$$

démontrées à l'art. **259**, on tire, en différentiant,

$$dD = \frac{d\omega (\cos \omega \cos \lambda \sin L - \sin \omega \sin \lambda) + dL \sin \omega \cos \lambda \cos L}{\cos D};$$

mais des valeurs (1'), (2'), on déduit

$$\cos \lambda \sin L = \frac{\sin D - \cos \omega \sin \lambda}{\sin \omega} = \sin \omega \sin D + \cos \omega \cos D \sin \text{Æ};$$

par conséquent, comme ci-dessus,

$$dD = d\omega \sin \text{Æ} + dL \sin \omega \cos \text{Æ}. \quad (\alpha)$$

La relation (3') donne

$$d\text{Æ} = \frac{dL \cos \lambda \sin L - dD \sin D \cos \text{Æ}}{\sin \text{Æ} \cos D}.$$

Substituant pour $\cos \lambda \sin L$ et dD leurs valeurs précédentes, et réduisant, on trouve définitivement

$$d\text{Æ} = - d\omega \cos \text{Æ} \operatorname{tang} D + dL (\cos \omega + \sin \omega \sin \text{Æ} \operatorname{tang} D). \quad (\beta)$$

Ces formules différentielles (α) et (β) ne conviendront au phénomène de la précession des équinoxes, qu'autant que dL sera remplacé par sa valeur annuelle 50″,1 (*); mais alors les termes en $d\omega$ étant insensibles pour un si petit espace de temps, comme on le verra bientôt, on a simplement

(α'), préc. ann. en décl., ou dÆ $= 50'',1 \sin\omega \cos$ Æ,
(β'), précess. ann. en Æ, ou $d\text{D} = 50'',1\,(\cos\omega + \sin\omega \sin$ Æ $\text{tang}\,\text{D})$.

Dans toutes ces formules, ω représente l'obliquité moyenne de l'écliptique (art. **36**).

Lorsque tang D ne croît pas trop rapidement, c'est-à-dire quand la distance polaire de l'astre n'est pas trop petite, il n'y a aucun inconvénient à supposer dL proportionnel au temps, dans le calcul de la variation en ascension droite et en déclinaison pour plusieurs années. Ainsi, au lieu de dL on écrira $\pm\, t.50'',1$, t étant le nombre d'années écoulées depuis la première époque jusqu'à la seconde; mais, pour plus de précision, l'on emploiera au lieu de Æ et D leurs valeurs correspondantes à l'époque moyenne; on verra bientôt une application de cette remarque. Nous ferons observer, quant à présent, que t se prend positivement ou négativement, selon que l'on cherche la position d'une étoile, pour une époque postérieure ou antérieure à celle pour laquelle cette position est connue.

267. Dans les observations qui demandent l'exactitude la plus scrupuleuse, on ne considère pas la variation annuelle en longitude comme constante, on la détermine au contraire d'après des formules de la *Mécanique céleste*. En effet, l'observation et la théorie ont fait connaître d'une part, qu'en rapportant le mouvement progressif du point équinoxial, soit à une écliptique fixe comme celle de 1750, soit à l'écliptique mobile (art. **55**), ce mouvement, produit par l'action des astres sur le sphéroïde terrestre, est irrégulier. Or, la précession luni-solaire ♈♈′ (*fig*. 9, tom. I) étant désignée par Ψ, c'est-à-dire

(*) Selon M. Bessel, $d\text{L} = 50'',2$; *voyez* l'art. suivant.

celle qui aurait lieu sur l'écliptique fixe, par l'action combinée de la Lune et du Soleil, serait, à partir de 1750 et au bout du temps $1750+t$,

$$\Psi = t.50'',37572 - t^2.0'',000\,1217945;$$

c'est en effet ce que donne la première formule de la page 158 du tome III de la *Mécanique céleste*, en la développant suivant les puissances du temps, prenant pour unité la seconde sexagésimale, et adoptant la petite correction faite au 1er terme, par M. Bessel (*Conn. des Temps* pour 1829).

La précession totale Υ, Υ'' ou la rétrogradation du point équinoxial sur l'écliptique vraie, étant représentée par ψ, serait, à partir de la même époque, et en adoptant toujours les nombres de M. Bessel,

$$\psi = t.50'',21129 + t^2.0'',000\,1221483;$$

ainsi la différence de ces valeurs, ou le mouvement direct du point équinoxial, occasionné par le déplacement de l'écliptique, est

$$\Psi - \psi = t.0'',16443 - t^2.0'',0002439428.$$

Si donc on fait $\omega = 23^\circ 28' 18''$, qui était l'obliquité moyenne en 1750, on aura, pour le mouvement direct $\Upsilon' \Upsilon''$ ou μ du point équinoxial en ascension droite,

$$\mu = \frac{\Psi - \psi}{\cos \omega} = \frac{t.0'',16443 - t^2.0'',0002439428}{\cos \omega},$$

et pour son mouvement annuel,

$$\mu = 0'',17926 - t.0'',00053188.$$

De plus, le changement de l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe ou

$$d\omega' = +\,t^2.0'',00000984233,$$

et sur l'écliptique mobile

$$d\omega = -\,t.0'',48368 - t^2.0'',00000272295;$$

de là

précession luni-solaire ann. $\Psi = 50'',37572 - t\ 0'',000243589$,
précession générale ann. $\psi = 50'',21129 + t.0'',0002442966$.

On réduira ces formules à l'an 1800, en supposant $t = 50$; ce qui donnera pour $1800 + t$,

précession luni-solaire ann. $\Psi = 50'',36354 - t.0'',000243589$,
précession générale ann. $\psi = 50'',22350 + t.0'',000244297$,
$\mu = 0'',15267 - t.0'',00053188$.

268. Telles seraient, en partant de l'époque de 1800, les valeurs à substituer dans les formules de précession, savoir :

$$dD = \psi \sin\omega \cos Æ + d\omega' \sin Æ,$$
$$dÆ = -\mu + \psi(\cos\omega + \sin\omega \sin Æ \operatorname{tang} D) - d\omega' \cos Æ \operatorname{tang} D;$$

lesquelles sont précisément celles de la *Mécan. cél.*, tom. II, p. 350.

Quand la déclinaison est australe, on fait tang D négative, et l'on change le signe de la valeur de dD, après quoi l'on ajoute cette valeur à la déclinaison D considérée comme positive; c'est ainsi que procèdent les astronomes. Mais il est suffisant d'employer les formules suivantes :

$$(\alpha'') \quad dD = n \cos Æ,$$
$$(\beta'') \quad dÆ = m + n \sin Æ \operatorname{tang} D,$$

en y supposant alors $m = \psi \cos\omega - \mu$ et $n = \psi \sin\omega$. Les quantités m et n sont ce que les astronomes appellent constantes de la précession en ascension droite et en déclinaison, parce qu'elles ne changent pas de valeur dans l'intervalle de 20 à 30 ans, en les bornant aux deux premières décimales.

Prenant donc pour époque l'an 1840, on aura $\omega = 23°\,27'\,36''$, et, tout calcul fait, selon M. Bessel,

$$(\gamma) \quad \begin{cases} m = 46'',0560 + t.0'',000308645, \\ n = 20'',0557 - t.0'',000097020. \end{cases}$$

Si, au contraire, on choisissait l'époque de 1750, on aurait

$$(\gamma') \quad \begin{cases} m = 46'',02824 + t.0'',000308645, \\ n = 20'',06442 - t.0'',00009702. \end{cases}$$

Quoiqu'il soit extrêmement rare, en Géodésie, qu'on ait besoin de recourir à ces formules de précession, pour remonter à des époques très-éloignées de celle où l'on opère, nous avons pensé devoir les rappeler ici.

APPLICATIONS.

269. La position moyenne de l'Épi de la Vierge ou α♍, étant prise dans le Catalogue d'Étoiles de Bradley, on trouve qu'au 1er janvier 1760,

Æ =	6s 18° 8′ 44″,1,		variation annuelle = 47″,003,
D =	9.54. 3,	(australe),	variation annuelle = 18 ,987.

On demande cette position moyenne pour le 1er janvier 1800?

Solution. De 1760 à 1800 il s'est écoulé 40 ans; l'époque moyenne est conséquemment 1780. Rapportant à cette époque l'ascension droite et la déclinaison précédentes, on aura, en supposant les variables proportionnelles au temps,

$$Æ_1 = 6^s\, 18^\circ\, 24'\, 24''16,$$
$$D_1 = 10.\ 0.22,74.$$

Déterminant ensuite les deux constantes m et n pour l'époque moyenne, on aura, d'après les formules ci-dessus (γ'),

$$m = 46'',0375, \quad n = 20'',0615.$$

Substituant ces valeurs dans les deux formules (β''), (α''), et opérant par logarithmes, on aura, à cause de $t = 40$ ans,

Pour la précession en ascension droite.

$$\begin{aligned}
\log n &= 1.3023635 + \\
\log 40 &= 1,6020600 \\
\text{l. sin Æ}, &= 9,4993573 - \\
\text{l. tang D}, &= \underline{9,2465997} - \\
& \quad 1,6503805 + = + 44'',708 \\
\text{partie constante } 40.m &= \underline{30'41\ ,500} \\
\text{Précession en Æ pour 40 ans, ou } d\text{Æ} &= 31.26\ ,208
\end{aligned}$$

Remarquez que nous avons affecté tang D du signe négatif, parce que l'étoile est dans la région australe.

Pour la précession en déclinaison.

$$\begin{aligned}
\log n &= 1,3023635 - \\
\log 40 &= 1,6020600 + \\
\text{l. cos Æ}, &= \underline{9,9771960} - \\
\log dD &= 2,8816195 + = + 761'',41 \\
\text{Précession en D pour 40 ans, ou } dD &= 12'\ 41\ ,41.
\end{aligned}$$

Nous avons changé le signe de n, parce que la déclinaison est australe (art. **268**). Si on voulait le laisser positif, il faudrait prendre D négativement; mais les astronomes sont, comme nous l'avons dit ci-dessus, dans l'usage de procéder de l'autre manière; c'est-à-dire qu'ils considèrent les déclinaisons australes et boréales comme positives.

Soient A′ et D′ l'ascension droite et la déclinaison cherchées; on a en général

$$\text{Æ}' = \text{Æ} + d\text{Æ}, \quad D' = D + dD;$$

ainsi la position moyenne de α de la Vierge était, au 1er janvier 1800, d'après le Catalogue cité,

$$\begin{aligned}
\text{Æ}' &= 6^s 18^\circ 40' 10'',308, \\
D' &= 10.\ 6.44\ ,41.
\end{aligned}$$

Les formules (I) de l'art. **259** et celles de l'art. **267** servent à résoudre généralement le problème actuel; mais la solution précédente est suffisante pour notre objet.

On a soupçonné dans quelques étoiles des mouvements propres. Par exemple, la position moyenne de α de la Vierge, déduite des observations à l'époque de l'an 1800, ne se trouve pas être exactement la même que celle ci-dessus, conclue des observations faites en 1760. En effet, à l'époque du 1er janvier 1800, et

Suivant Maskeline........ $Æ' = 6^s 18^\circ 40' \, 6'',060$, suivant Piazzi $D' = 10^\circ 6' 42'',8$
Par le calcul précédent.... $Æ' = 6.18.40.10\,,308$............ $D' = 10.6.44\,,4$
Différence pour 40 ans.. $=$ $-4'',248$............. $=$ $-1'',6$

En supposant toutes les observations parfaitement exactes, et la précession moyenne telle que nous l'avons employée bien connue, l'Épi de la Vierge paraîtrait par conséquent avoir un mouvement propre en ascension droite et en déclinaison, l'un de $-4'',248$ pour 40 ans, l'autre de $-1'',6$ pour le même temps. Mais nous laissons aux astronomes le soin de se prononcer à cet égard.

270. Trouver la variation annuelle en ascension droite et en déclinaison de la polaire, pour le 1er janvier 1810, sachant qu'à cette époque

$$Æ = 13^\circ 38' 18'' = 0^h 54^m 33^s,2$$
$$D = 88.17.42 \text{ (boréale)}.$$

Solution. Par les formules précédentes, on a, en 1810,

$$m = 46'',0467, \quad n = 20'',0586;$$

de là les formules (β''), (α'') donnent

$$\begin{aligned} \log n &= 1,3022985 \\ \sin Æ &= 9,3725297 \\ \text{tang } D &= 1,5262701 \\ \hline & 2,2010983 = 158'',891 \\ \text{constante } m &= \;\;46\;,047 \\ \hline dÆ &= 204\;,938 \text{ en arc} \\ \text{ou } & \;\; 13^s,66 \text{ en temps}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log n &= 1,3022985 \\ \cos Æ &= 9,9875784 \\ \hline \log dD &= 1,2898769 = 19'',493; \\ dD &= 19'',493. \end{aligned}$$

Dans les Catalogues d'Étoiles, comme celui qui est inséré dans la *Connaissance des Temps*, et qu'on renouvelle tous les 10 ans, les colonnes intitulées *variation annuelle*, comprennent ordinairement en un seul terme la précession annuelle et le mouvement propre, ce qui dispense du calcul précédent.

Pour les besoins ordinaires, on multiplie chaque variation, prise avec son signe, par le nombre des années, mois et jours compris entre l'époque du Catalogue et celle à laquelle on veut rapporter la position de l'étoile, afin d'avoir la variation totale cherchée. Si la seconde époque est postérieure à celle du Catalogue, on ajoute les produits à l'ascension droite et à la déclinaison données par ce Catalogue; si au contraire la seconde époque est antérieure à la première, on soustrait ces produits. Cependant, cette proportionnalité n'est pas rigoureusement exacte, comme nous l'avons déjà fait remarquer (art. **266**), surtout lorsque les étoiles sont très-près du pôle. Par exemple, la variation annuelle en ascension droite de la Polaire ou de α de la petite Ourse, est, d'après le calcul précédent, de $204'',938$ en 1810, et elle augmente sensiblement d'une année à l'autre; il serait donc nécessaire, en faisant usage de la formule (β'') qui donne la variation annuelle, de calculer cette variation d'année en année, en y changeant chaque fois les valeurs de Æ et D, c'est-à-dire en prenant celles qui correspondent au point de départ; mais on évite ce calcul fastidieux, par la méthode suivante.

Si l'on différentie les formules (α''), (β''), on aura, en regardant m et n comme des constantes et rétablissant l'homogénéité,

$$(\alpha_2) \qquad d^2\mathrm{D} = -n \sin Æ\, dÆ \sin 1'',$$

$$(\beta_2) \qquad d^2Æ = d\mathrm{D} \operatorname{tang} \mathrm{D}\, dÆ \sin 1'' + n \sin Æ \frac{d\mathrm{D}}{\cos^2 \mathrm{D}} \sin 1''.$$

Ces différentielles secondes expriment les changements survenus aux mouvements annuels d'une année à la suivante, en prenant dD et dÆ pour ces mouvements. Ainsi, par des additions répétées des valeurs de d^2D et d^2Æ, on aura les variations d'année en année. Par exemple, appliquant les formules (α_2), (β_2) à la Polaire, pour laquelle les variations annuelles en 1810 sont $d\mathrm{D} = 19'',493$ et $dÆ = 204'',938$,

on trouvera

$$d^2D = -0'',005,$$
$$d^2Æ = 1'',165;$$

c'est-à-dire que dD diminue d'une année à l'autre de 0'',005, et que $dÆ$ augmente de 1'',165; on a donc

En 1810 variat. ann. $dÆ$	=	204'',938	var. ann. dD	=	19'',493
En 1811.	=	206 ,103	. . . .	=	19 ,488
En 1812.	=	207 ,268	. . . .	=	19 ,483
Mouvem. pour 3 ans en Æ	=	618'',309.	en D	=	58'',464

Si l'on voulait calculer par cette méthode le mouvement pour un grand nombre d'années, il conviendrait, pour plus de précision, de déterminer le mouvement annuel correspondant à l'époque moyenne (art. **266**), afin d'éviter d'avoir égard aux différentielles troisièmes. Ce serait surtout nécessaire relativement à l'ascension droite qui varie irrégulièrement.

Il y a plus; si l'on demandait la variation en ascension droite pour un jour quelconque de l'année, à l'aide de la variation annuelle 204'',938, on multiplierait cette variation annuelle ou toute autre par le facteur pris dans la table XII et correspondant à la date proposée de l'année.

CHAPITRE V.

CALCUL DES POSITIONS APPARENTES DES ÉTOILES.

Formules de nutation.

271. Si l'obliquité de l'écliptique et le mouvement du point équinoxial en ascension droite n'éprouvaient aucune inégalité périodique, les positions des astres dont il a été question dans le chapitre précédent, seraient telles dans la nature; mais la Lune, en agissant sur le sphéroïde terrestre d'après les lois de l'attraction universelle, fait osciller l'axe des pôles de l'équateur, de manière qu'il en résulte alternativement une augmentation et une diminution dans l'obliquité, ainsi que dans le mouvement du point équinoxial. Ce phénomène de la nutation, découvert par Bradley en 1747, dépend donc essentiellement de la situation de la Lune dans son orbite ou de celle de ses nœuds; mais la théorie seule a fait voir qu'il est réglé sur le mouvement moyen du nœud ascendant (article **28**).

Étant obligé, comme tous les astronomes, d'emprunter dans cette circonstance les résultats de la théorie, je ferai remarquer que $d\omega$ étant la variation d'obliquité, dL celle de longitude, produites toutes deux par la nutation, et ☊ la longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune, on a, d'après les dernières évaluations numériques de Laplace,

$$d\omega = 9'',4 \cos ☊, \quad dL = -\frac{9'',4 \cos 2\omega}{\cos\omega} \cdot \frac{\sin ☊}{\sin\omega},$$

les deux demi-axes de l'ellipse de nutation étant $9'',4$ et $\frac{9'',4 \cos 2\omega}{\cos\omega}$ (*Mécan. céleste*, tom II, page 351); ou bien, prenant pour ω l'obli-

quité moyenne de l'écliptique en 1830, savoir, 23°27′40″, on obtient

$$d\omega = 9'',4 \cos \Omega\ , \quad dL = -17'',58 \sin \Omega \ (*).$$

Ces deux inégalités coexistantes, dont la période est de 18 ans ½ environ, se portent sur les ascensions droites et les déclinaisons; ainsi, il s'agit maintenant de trouver les corrections à faire aux positions moyennes des étoiles pour avoir leurs positions vraies. Mais ce nouveau problème est tout résolu par les formules (α) et (β) de l'art. **265**, si l'on y met pour $d\omega$ et dL leurs valeurs précédentes; on a donc

$$\begin{aligned} &\text{nutation en D ou } dD' = + 9'',4 \sin Æ \cos \Omega - 6'',999 \cos Æ \sin \Omega\ , \\ &\text{nutation en Æ ou } dÆ' = - 16'',127 \sin \Omega - [6'',999 \sin Æ \sin \Omega \\ &\qquad\qquad + 9'',4 \cos Æ \cos \Omega\,] \tan D. \end{aligned}$$

On suppose ici que la déclinaison est boréale; si elle était australe, il faudrait changer le signe de la valeur de dD′, prendre tang D négativement, et ajouter cette valeur à celle de la déclinaison considérée comme positive, ainsi qu'il a été dit à l'art. **268**.

Il suit de là qu'en désignant respectivement par Æ′ et D′ l'ascension droite et la déclinaison vraies, on aura

$$D' = D + dD', \quad Æ' = Æ + dÆ'.$$

Nous devons cependant faire observer que d'après les valeurs plus générales de $d\omega$ et dL données ci-dessus en note, il faudrait à la rigueur ajouter à la nutation en ascension droite et en déclinaison un petit terme qu'on trouverait en cherchant une seconde fois cette nutation avec le double de la longitude du nœud de la Lune, puis en la prenant avec un signe contraire et la divisant par 100. Cette règle est fondée sur ce que

(*) M. Baily a publié dans les *Mémoires de la Société astronomique de Londres*, tome II, de nouvelles tables d'aberration et de nutation qu'il a construites pour 2881 étoiles, d'après les formules de M. Bessel, dans lesquelles on a plus rigoureusement, à l'epoque de 1830, et en désignant par ☾ la longitude vraie de la Lune,

$$\begin{aligned} d\omega &= 9'',250 \cos \Omega - 0'',0903 \cos 2\Omega + 0'',5447 \cos 2\odot + 0'',0900 \cos 2☾, \\ dL &= -17,2985 \sin \Omega + 0,2082 \sin 2\Omega - 1,2550 \sin 2\odot - 0,2074 \sin 2☾. \end{aligned}$$

les termes additifs sont, pour la déclinaison :

$$+ 0'',083 \cos Æ \sin 2 ☊ - 0'',090 \sin Æ \cos 2 ☊ ;$$

pour l'ascension droite,

$$- (0'',191 + 0'',083 \sin Æ \operatorname{tang} D) \sin 2 ☊$$
$$+ 0'',090 \cos Æ \operatorname{tang} D \cos 2 ☊ .$$

272. Ces formules de nutation ont été données pour la première fois par Lambert ; elles lui ont servi à construire des tables générales très-simples et très-utiles, mais que ne réclament pas les besoins de la Géodésie. Voici néanmoins la manière de les disposer pour cet effet.

Soient $d\omega = m \cos ☊$, $dL = - n \sin ☊$; les formules (α) et (β) se changeront en celles-ci :

$$dD' = m \sin Æ \cos ☊ - n \sin \omega \cos Æ \sin ☊ ,$$
$$dÆ' = - m \cos Æ \cos ☊ \operatorname{tang} D$$
$$- n \sin \omega \sin Æ \sin ☊ \operatorname{tang} D - n \cos \omega \sin ☊ .$$

Mais en général

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2} \sin (x + y) + \tfrac{1}{2} \sin (x - y),$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2} \cos (x + y) + \tfrac{1}{2} \cos (x - y),$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2} \cos (x - y) - \tfrac{1}{2} \cos (x + y);$$

ainsi

$$dD' = \tfrac{1}{2} (m - n \sin \omega) \sin (Æ + ☊) + \tfrac{1}{2} (m + n \sin \omega) \sin (Æ - ☊),$$
$$dÆ' = - n \cos \omega \sin ☊$$
$$- [\tfrac{1}{2} (m - n \sin \omega) \cos (Æ + ☊) + \tfrac{1}{2} (m + n \sin \omega) \cos (Æ - ☊)] \operatorname{tang} D ;$$

ou en nombres

$$dD' = 8'',199 \sin (Æ - ☊) + 1'',200 \sin (Æ + ☊) ,$$
$$dÆ' = - 16'',127 \sin ☊$$
$$- [8'',199 \cos (Æ - ☊) + 1'',200 \cos (Æ + ☊)] \operatorname{tang} D.$$

La table de nutation en déclinaison se composera par conséquent de deux parties qui auront pour arguments l'une $Æ - ☊$, l'autre $Æ + ☊$. Or, on rendra la table de nutation en ascension droite dépendante de

la première, en écrivant la valeur de $d\text{Æ}'$ ainsi qu'il suit :

$$d\text{Æ}' = -16'',127 \sin \Omega + [8'',199 \sin(A - \Omega - 3^s) + 1'',200 \sin(A + \Omega - 3^s)] \text{ tang } D;$$

ce qui est permis, puisqu'en général

$$\sin(x - 3^s) = \sin(x - 90^\circ) = - \cos x.$$

Réciproquement l'on fera dépendre la table de nutation en déclinaison de celle de nutation en ascension droite, en écrivant la valeur de dD' comme il suit :

$$dD' = - 8'',199 \cos(A - \Omega + 3^s) - 1'',200 \cos(\text{Æ} + \Omega + 3^s).$$

Il suffit donc d'ajouter à la table une troisième partie pour le terme $-16'',127 \sin \Omega$. C'est d'après ce précepte qu'ont été construites les tables générales de nutation insérées dans la *Connaissance des Temps* de 1810, mais qu'il faudrait recalculer maintenant pour les rendre plus exactes.

273. Nous venons de calculer l'effet de la nutation lunaire en ascension droite et en déclinaison. Le Soleil produit aussi une nutation toute semblable, mais beaucoup plus faible, et dont la période est d'une demi-année seulement. Lorsqu'on y a égard, on l'ajoute à celle qui provient de la Lune, et l'on a ce qu'on appelle la *nutation luni-solaire*. On évalue séparément la nutation solaire en ascension droite et en déclinaison, à l'aide des mêmes formules (α) et (β) de l'art. **265**, mais dans lesquelles il faut faire (art. précédent)

$$d\omega = 0'',5447 \cos 2\odot, \text{ et } dL = - \frac{0'',5447}{\text{tang } \omega} \sin 2\odot = - 1'',2550 \sin 2\odot;$$

$\odot$ désignant la longitude du Soleil pour le moment où l'on calcule la nutation : alors on a, en secondes de degré,

$$\text{nut. sol. en D} = + 0'',545 \sin \text{Æ} \cos 2\odot - 0'',500 \cos \text{Æ} \sin 2\odot,$$
$$\text{nut. sol. en Æ} = - 0'',545 \cos \text{Æ} \text{ tang D} \cos 2\odot - (1'',151 + 0'',500 \sin \text{Æ} \text{ tang D}) \sin 2\odot;$$

ou, en vertu de la transformation indiquée ci-dessus,

$$\text{nutat. sol. en D} = \quad 0'',522 \sin(Æ - 2\odot) + 0'',023 \sin(Æ + 2\odot),$$
$$\text{nutat. sol. en } Æ = -1'',151 \sin 2\odot$$
$$- [0'',522 \cos(Æ - 2\odot) + 0'',023 \cos(Æ + 2\odot)] \text{ tang D}.$$

Ces deux formules sont absolument de même forme que les précédentes, et leurs coefficients numériques sont à peu près les $\frac{3}{40}$ de ceux qui leur correspondent. Il suit de là que les tables de nutation lunaire serviront pour calculer la nutation solaire, en multipliant leurs nombres par 0,075.

Formules d'aberration.

274. Il résulte de l'explication du phénomène de l'aberration de la lumière des astres, donnée à l'article **38**, que pour déterminer graphiquement l'aberration due au mouvement annuel de la Terre, abstraction faite du mouvement propre de l'astre dont émane la molécule lumineuse qui parvient à notre œil, il faut prendre sur la droite que décrit cette molécule, et à partir de l'observateur, puis sur la direction du mouvement de la Terre ou sur la tangente à l'orbe qu'elle parcourt, deux lignes qui soient entre elles dans le rapport de la vitesse de la lumière à celle de notre globe, et sur ces deux lignes construire un parallélogramme; car la diagonale de ce parallélogramme est la direction suivant laquelle l'œil voit l'astre, et l'angle que cette diagonale fait avec le rayon visuel mené au lieu réel de l'astre est l'aberration absolue de la lumière provenant du mouvement de translation de la Terre. Par rapport au sens de ce mouvement, le lieu apparent d'une étoile fixe est toujours en avant de son lieu vrai.

A cause de l'immense distance à laquelle nous sommes des étoiles, les droites menées de l'une d'elles à tous les points de l'orbite terrestre peuvent être censées parallèles entre elles; par conséquent la diagonale du parallélogramme d'aberration dont on vient de parler, décrit dans une année sidérale une surface conique dont l'axe, qui se meut parallèlement à lui-même, est la direction primitive de la lumière, et dont la base est une courbe située dans un plan parallèle à celui de l'orbe terrestre.

Un des éléments essentiels à connaître pour résoudre le problème qui nous occupe, est le rapport de la vitesse de la lumière à celle de la Terre. Or, on sait que la lumière parcourt en $493^s,2$ le demi grand axe de l'orbe terrestre, ou la moyenne distance de la Terre au Soleil ; ainsi pendant ce temps, la Terre, en vertu de son moyen mouvement, décrit un arc de $20'',25$. Telle serait sa vitesse, si son orbite était circulaire ; mais l'arc dS qu'elle décrit dans l'instant dt a en général pour expression

$$dS = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2\, dv^2 + dr^2)^{\frac{1}{2}};$$

r étant le rayon vecteur, et v l'angle qu'il fait avec l'axe des x.

D'ailleurs,

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos(v - \varpi)} = a\,(1 - e^2)\,[1 + e\cos(v - \varpi)]^{-1};$$

a étant le demi grand axe de l'orbe terrestre, $e = 0{,}016853$ le rapport de l'excentricité à cette droite, et ϖ l'angle que la ligne des apsides fait avec l'axe des x. A la vérité, à cause de la petitesse de cette excentricité et de celle de $dt = 493^s,2$, il suffit de conserver la première puissance de e, ou, ce qui revient au même, de considérer le très-petit arc dS comme circulaire, mais ayant r pour rayon. Ainsi, le rapport de la vitesse de la Terre à celle de la lumière, sera sensiblement représenté par

$$ds = \frac{dS}{a} = \frac{rdv}{a}.$$

D'un autre côté, par la théorie du mouvement elliptique (*Mécan.* de Poisson, tome I, page 419, 2e édition), on a

$$r^2 dv = abndt;$$

b étant le demi petit axe de l'orbe terrestre, et $andt$ le mouvement moyen pendant dt : donc la vitesse de la Terre, celle de la lumière étant prise pour unité, est

$$\begin{aligned} ds = \frac{rdv}{a} &= \frac{bndt}{a\,(1 - e^2)}\,[1 + e\cos(v - \varpi)] \\ &= \frac{andt}{a\,(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}\,[1 + e\cos(v - \varpi)] = \frac{20'',253}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}\,[1 + e\cos(v - \varpi)] \\ &= 20'',253\,[1 + e\cos(v - \varpi)]; \end{aligned}$$

car l'arc moyen ndt faisant partie de la circonférence 2π, et étant réduit en secondes, a pour valeur

$$\frac{2\pi dt}{\mathrm{T}}\,\mathrm{R}'' = \frac{2\pi.493^s,2}{24.3600\mathrm{T}}\,\mathrm{R}'' = 20'',253\,;$$

$\mathrm{T} = 365^j,25637$ étant la révolution sidérale de la Terre, et R″ le rayon réduit en secondes. Dans ce calcul, T et dt sont, comme on le voit, réduits à la même unité de temps.

275. La distance de la Terre au Soleil étant prise pour unité, et celle d'une planète à la Terre étant représentée par D, le temps t que la lumière met à venir de la planète à nous est $t = 493^s,2\mathrm{D}$, puisque l'on suppose le mouvement de la lumière uniforme.

Cela posé, soit m le mouvement géocentrique d'une planète pendant 1^s, c'est-à-dire l'arc qu'elle décrit en longitude ou en latitude, en ascension droite ou en déclinaison pendant l'unité de temps; son mouvement pendant le temps $493^s,2\mathrm{D}$ sera par conséquent $493^s,2m\mathrm{D}$. Telle est la mesure générale de son aberration. Si donc A′ est son lieu apparent, A son lieu vrai, on aura

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A} - 493^s,2m\mathrm{D}\,;$$

puisque la planète paraît, par l'effet de son aberration, moins avancée qu'elle ne l'est effectivement.

Pour le Soleil, dont la longitude apparente est $\odot'$ et la longitude vraie $\odot$, on a, abstraction faite de l'excentricité de l'orbite terrestre,

$$\odot' = \odot - 20'',253\,;$$

car

$$m = \frac{2\pi.\mathrm{R}''}{24.3600\,\mathrm{T}}, \quad \mathrm{D} = a = 1.$$

L'aberration du Soleil est presque constante : elle est, comme on l'a vu à l'art. **244**, renfermée dans la longitude moyenne. Si l'on avait besoin du lieu vrai de cet astre, comme dans le calcul des lieux géocentriques des planètes, on ajouterait 20″,25 au lieu du Soleil tiré des tables ou d'une Éphéméride.

276. Maintenant, exprimons analytiquement les variations en ascension droite et en déclinaison des étoiles, dues au phénomène de l'aberration.

Le rayon de la sphère céleste sur laquelle on projette tous les astres pouvant être pris arbitrairement, supposons-le égal au rayon vecteur r de la Terre. Supposons de plus que ce rayon représente la vitesse de la lumière; dans ce cas, le parallélogramme d'aberration s'étendra nécessairement jusque dans la région de l'étoile que l'on considère, et l'extrémité de la diagonale, qui y est située, marquera à toute époque de l'année le lieu apparent de cette étoile. Or, cette diagonale ne différant de la distance r que d'une quantité extrêmement petite, on pourra la représenter par $r+dr$.

Cela posé, rapportons la position de l'étoile à trois axes rectangles x, y, z, dont le plan des deux premiers soit l'équateur céleste; prenons pour origine des coordonnées le centre de ce cercle ou celui de la Terre, et considérons l'axe des x comme la ligne des équinoxes; on aura (art. **258**)

$$x = r\cos Æ \cos D, \quad y = r\sin Æ \cos D, \quad z = r\sin D; \quad (a)$$

d'où

$$\text{tang}\, Æ = \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (b)$$

On passera du lieu vrai au lieu apparent en faisant varier tous les éléments du lieu vrai. Ainsi, différentiant les équations (b), on aura

$$dÆ = \frac{xdy - ydx}{x^2} \cos^2 Æ, \quad rdr = xdx + ydy + zdz. \quad (c)$$

Soit ds le petit arc que la Terre décrit en $493^s,2$, et nommons α, β, γ les angles que cet élément fait avec les axes des coordonnées; on aura évidemment, en transportant ce mouvement dans la région de l'étoile ou aux confins de la sphère céleste,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \quad (d)$$

Multipliant et divisant par ds le second membre de la première équa-

tion différentielle (c), il viendra

$$d\text{Æ} = \frac{ds}{x}(\cos\beta - \cos\alpha \tang \text{Æ})\cos^2 \text{Æ};$$

enfin éliminant x, l'aberration en ascension droite sera

$$d\text{Æ} = \frac{ds}{r\cos \text{D}}(\cos\beta \cos\text{Æ} - \cos\alpha \sin \text{Æ}). \quad (1)$$

La troisième équation (a) différentiée, donne, par le même procédé,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dr}{ds}\sin \text{D} + \frac{r}{ds}\cos \text{D}.d\text{D},$$

d'où

$$d\text{D} = \frac{\frac{dz}{ds} - \frac{dr}{ds}\sin \text{D}}{\frac{r}{ds}\cos \text{D}} = \frac{ds}{r\cos \text{D}}\left(\cos\gamma - \frac{dr}{ds}\sin \text{D}\right).$$

Mais la seconde équation différentielle (c) pouvant s'écrire ainsi

$$\frac{dr}{ds} = \frac{x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{r}\frac{dz}{ds},$$

on a, en vertu des relations (a), (d),

$$\frac{dr}{ds} = \cos\alpha \cos \text{Æ} \cos \text{D} + \cos\beta \sin \text{Æ} \cos \text{D} + \cos\gamma \sin \text{D};$$

enfin, substituant cette valeur dans celle de dD, il viendra, pour l'aberration en déclinaison,

$$d\text{D} = \frac{ds}{r}\cos\gamma \cos \text{D} - \frac{ds}{r}\sin \text{D}(\cos\alpha \cos \text{Æ} + \cos\beta \sin \text{Æ}). \quad (2)$$

277. Les formules (1) et (2) renferment les angles α, β, γ qu'il faut éliminer. Pour cet effet, soient (*fig.* 8) ♈BC l'équateur, ♈TT′ l'écliptique, S le Soleil, T la Terre, ♈ le point équinoxial, TR une tangente à l'orbite terrestre, ST′ une parallèle à cette tangente, ω l'obliquité T♈B de l'écliptique, enfin X, Y, Z trois axes passant par le centre S du Soleil,

et respectivement parallèles aux axes x, y, z menés par le centre de la Terre. Le triangle sphérique ΥBT′ dans lequel $\Upsilon T' = \alpha$, $BT' = \beta$ et $\Upsilon B = 90^\circ$, donne

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\omega.$$

Le triangle sphérique dont les sommets sont Υ, T′ et le point où l'axe des Z rencontre la surface de la sphère céleste, donne

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\omega.$$

Ainsi, en substituant ces valeurs dans les formules (1) et (2), on a

$$d\text{Æ} = \frac{ds}{r\cos D}(\sin\alpha\cos\omega\cos\text{Æ} - \cos\alpha\sin\text{Æ}), \qquad (1')$$

$$dD = -\frac{ds}{r}(\cos\alpha\cos\text{Æ}\sin D + \sin\alpha\cos\omega\sin\text{Æ}\sin D - \sin\alpha\sin\omega\cos D). \quad (2')$$

Il reste encore à éliminer l'angle α, qui est celui que la tangente à l'orbite terrestre fait avec l'axe des x. Pour y parvenir, désignons par θ l'angle que la tangente dont il s'agit fait avec la ligne des apsides, ou le grand axe de l'orbite terrestre. Dans ce cas, l'on aura $\tang\theta = \frac{dy''}{dx''}$, x'' et y'' étant les coordonnées héliocentriques de Terre, rapportées aux axes de l'orbite ; et comme dans cette hypothèse

$$x'' = r\cos(v - \varpi), \quad y'' = r\sin(v - \varpi),$$

on a

$$\text{tang}\,\theta = \frac{dy''}{dx''} = \frac{dr\sin(v-\varpi) + rdv\cos(v-\varpi)}{dr\cos(v-\varpi) - rdv\sin(v-\varpi)}.$$

De plus, à cause de

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}, \quad \text{on a} \quad dr = \frac{ae(1-e^2)\,dv\sin(v-\varpi)}{[1+e\cos(v-\varpi)]^2};$$

donc, réductions faites,

$$\text{tang}\,\theta = \frac{e+\cos(v-\varpi)}{-\sin(v-\varpi)}.$$

Soit δ l'angle que la normale à la Terre fait avec son rayon vecteur;

on aura visiblement

$$\alpha = \theta + \varpi, \quad \text{et} \quad \delta = \nu + 90 - \alpha = \nu - \varpi + 90 - \theta;$$

de là

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\operatorname{tang}(\nu - \varpi)\operatorname{tang}\theta + 1}{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}(\nu - \varpi)} = \frac{e.\sin(\nu - \varpi)}{1 + e\cos(\nu - \varpi)};$$

par suite

$$\delta = e\sin(\nu - \varpi) - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2(\nu - \varpi) + \ldots;$$

puis

$$\alpha = 90 + \nu - e\sin(\nu - \varpi).$$

On remarquera que ν est la longitude héliocentrique de la Terre, et ϖ celle du périhélie. Soient $\odot$ la longitude du Soleil, et Π celle du périgée ; dans ce cas

$$\nu = \odot + 180^\circ, \quad \varpi = \Pi + 180^\circ \text{ (art. 7)};$$

ou, ajoutant 180° dans chaque membre, on a

$$\odot = 180^\circ + \nu, \quad \Pi = 180^\circ + \varpi;$$

par suite

$$\alpha = \odot - 90^\circ - e\sin(\odot - \Pi),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= -\cos\odot - e\sin\odot\sin(\odot - \Pi), \\ \cos\alpha &= \sin\odot - e\cos\odot\sin(\odot - \Pi). \end{aligned}$$

De là les formules (1′), (2′) se changeront en celles-ci :

$$\text{aber. en } Æ = -\frac{20'',253}{\cos D}\left\{\begin{array}{l}\cos\omega\cos Æ\cos\odot + \sin Æ\sin\odot \\ + e\cos\omega\cos Æ\cos\Pi + e\sin Æ\sin\Pi\end{array}\right\}, \quad (1_{,})$$

$$\begin{aligned}\text{aber. en } D = -20'',253\sin D &\left\{\begin{array}{l}-\cos\omega\sin Æ\cos\odot + \cos Æ\sin\odot \\ -e\cos\omega\sin Æ\cos\Pi + e.\cos Æ\sin\Pi\end{array}\right\} \\ &-20'',253\cos D(\sin\omega\cos\odot + e\sin\omega\cos\Pi). \quad (2_{,})\end{aligned}$$

Vu la petitesse de l'excentricité de l'orbitre terrestre, les astronomes

sont dans l'usage de négliger les termes qui dépendent de cette excentricité; mais il est facile d'en tenir compte si l'on veut (*).

Ces deux formules ont été données par Delambre, qui les a démontrées d'une tout autre manière et mises en tables à l'aide du procédé indiqué à l'art. **272**. (*Voyez* la *Connaissance des Temps* pour 1810). En négligeant les termes en e, puis mettant pour l'obliquité ω la valeur qu'elle avait en 1840, on aura

$$\text{aber. en Æ} = -(18'',580 \cos Æ \cos\odot + 20'',253 \sin Æ \sin\odot)\,\text{séc}\,D, \quad (1'')$$
$$\text{aber. en } D = -[20'',253 \cos Æ \sin\odot - 18'',580 \sin Æ \cos\odot] \sin D - 8'',064 \cos\odot \cos D. \quad (2'')$$

Enfin, celles-ci étant disposées pour former des tables générales, se changent en les suivantes :

$$\text{aber. en Æ} = -\frac{19'',42 \cos(Æ-\odot) - 0'',84 \cos(Æ+\odot)}{\cos D},$$
$$\text{aber. en } D = [19'',42 \sin(Æ-\odot) - 0'',84 \sin(Æ+\odot)] \sin D - 8'',06 \cos\odot \cos D.$$

Lorsque la déclinaison D est australe, on la prend négativement ; alors sin D est négatif et cos D positif; ou bien si l'on veut, à l'exemple des astronomes, considérer la déclinaison australe comme positive, il faut changer simplement le signe du second terme de l'aberration en déclinaison, c'est-à-dire écrire $+ 8'',06 \cos\odot \cos D$.

Le mouvement de rotation de la Terre donne lieu aussi à une aberration diurne, mais qu'on néglige à cause de son extrême petitesse (*Abrégé d'Astronomie* de Delambre, page 502).

(*) Par exemple dans les calculs où il est nécessaire, pour une plus grande exactitude, d'avoir égard à la variation qu'éprouve l'aberration du Soleil, la formule $(1,)$ répond à ce cas en y faisant $\omega = 0$ et changeant Æ en $\odot$, puisqu'il vient alors

$$\text{aber. en longit.} = -20'',253(1 + e\cos(\odot - \Pi)) = -20'',253 - 0'',34\cos(\odot - \Pi):$$

telle est celle par laquelle on a calculé l'aberration du Soleil insérée à la page 36 de la *Connaissance des Temps*.

Nota. Un Mémoire que j'ai lu à l'Académie des Sciences le 11 juillet 1814, et qui est inséré dans le tome X du *Journal de l'École Polytechnique,* renferme une autre solution analytique et générale du problème de l'aberration, de laquelle on déduit, comme cas particulier, des formules d'aberration en longitude et en latitude pour les planètes et les comètes, qui sont beaucoup plus simples que celles données par Delambre (*Astronom.,* tome III, p. 122); et dans le volume de la *Conn. des Temps* pour 1818, j'ai réduit en Tables celles relatives aux neuf planètes : ce phénomène de l'aberration de la lumière, dont Bradley découvrit la cause en 1727, est une preuve sensible du mouvement de la Terre autour du Soleil et vient à l'appui du système de Copernic.

Formation des tables particulières d'aberration et de nutation.

278. Malgré l'utilité des tables générales d'aberration et de nutation, plusieurs astronomes ont formé des tables particulières pour un très-grand nombre d'étoiles, afin de pouvoir évaluer les effets de ce genre avec plus de promptitude et non moins de précision ; mais toutes ces tables n'ont qu'une durée limitée, puisqu'elles sont fondées sur des éléments essentiellement variables. Delambre, dans son *Astronomie,* tome III, a fait connaître les principes d'après lesquels La Caille, et plus récemment M. Gauss ont construit leurs tables particulières. Cagnoli, de son côté, a publié, en 1804, un Recueil de cette espèce pour 500 étoiles. On trouve aussi dans la *Connaiss. des Temps* pour 1812 des tables de précession, d'aberration et de nutation, calculées par Burckhardt et adaptées aux 36 étoiles dont les astronomes se servent le plus souvent. Enfin, dans la même année 1812, le baron de Zach a fait paraître de nouvelles tables d'aberration et de nutation pour 1400 étoiles. Au moyen de celles-ci, fondées sur une méthode analogue à celle de Clairaut et d'autres géomètres, on évalue les effets de ces mouvements apparents d'une manière plus expéditive que par les tables générales. Cette méthode, expliquée très-longuement par Lalande, au XVII[e] livre de son *Astronomie,* peut, ce me semble, être présentée avec plus de concision, ainsi qu'il suit :

On remarquera d'abord que les formules d'aberration et de nutation

ayant la forme

$$A \sin \odot + B \cos \odot, \quad \text{ou} \quad A \sin \Omega + B \cos \Omega,$$

on peut supposer

$$A \sin \odot + B \cos \odot = M \sin (\odot + \theta);$$

expression dans laquelle M et θ sont deux indéterminées. Alors, en développant et égalant terme à terme ceux qui se correspondent dans l'un et l'autre membre, il vient

$$A = M \cos \theta, \quad B = M \sin \theta;$$

de là

$$M = \frac{A}{\cos \theta}, \quad \text{tang}\, \theta = \frac{B}{A},$$

et par suite

$$d\text{Æ} = \frac{A}{\cos \theta} \sin (\odot + \theta).$$

Par exemple, à cause de

$$\text{aber. en Æ} = -20'',253 \sin \text{Æ} \,\text{séc}\, D \sin \odot - 18'',580 \cos \text{Æ} \,\text{séc}\, D \cos \odot,$$

on a

$$M = -\frac{20'',253}{\cos \theta} \sin \text{Æ} \,\text{séc}\, D, \quad \text{tang}\, \theta = \frac{18,580}{20,253} \cot \text{Æ},$$

et enfin, en secondes de degré,

$$\text{aber. en Æ} = +\frac{20'',253}{\cos \theta} \sin \text{Æ} \,\text{séc}\, D \sin (\odot + \theta + 180^\circ),$$

lorsqu'on ajoute six signes ou 180° à l'angle θ pour rendre le coefficient M positif.

On voit par là que le facteur $\frac{20'',253 \sin \text{Æ} \,\text{séc}\, D}{\cos \theta}$ représente la plus grande aberration en ascension droite, et que pour avoir l'aberration actuelle, il faut, à l'argument des tables, savoir, $6^s + \theta$, ajouter le lieu du Soleil pour le jour proposé, puis multiplier par le sinus de ce nouvel argument la plus grande aberration.

Décomposant de même en deux facteurs la formule d'aberration en déclinaison, il viendra

$$d\mathrm{D} = -20'',253 \cos Æ \sin \odot \sin \mathrm{D}$$
$$\times \left[1 - \frac{(18'',580 \sin Æ \sin \mathrm{D} - 8'',06 \cos \mathrm{D}) \cot \odot}{20'',253 \cos Æ \sin \mathrm{D}}\right];$$

soit

$$\frac{\pm 18'',580 \sin Æ \sin \mathrm{D} - 8'',06 \cos \mathrm{D}}{\pm 20'',253 \cos Æ \sin \mathrm{D}} = \operatorname{tang} \theta';$$

le signe supérieur ayant lieu pour les déclinaisons boréales, et le signe inférieur pour les déclinaisons australes, d'après la remarque de l'art. **268**.

Alors on aura

$$d\mathrm{D} = -20'',253 \cos Æ \sin \odot \sin \mathrm{D} [1 - \operatorname{tang} \theta' \cot \odot]$$
$$= -\frac{20'',253 \cos Æ \sin \mathrm{D}}{\cos \theta'} (\sin \odot - \theta')$$
$$= \frac{20'',253 \cos Æ \sin \mathrm{D}}{\cos \theta'} \sin (180^{\circ} - \theta' + \odot);$$

mais $\frac{20'',253 \cos Æ \sin \mathrm{D}}{\cos \theta'}$ est évidemment la plus grande aberration en déclinaison. Si donc à l'argument $6^{s} - \theta'$, pris dans les Tables de de Zach ou dans les nôtres, on ajoute la longitude du Soleil pour le jour proposé, et qu'on multiplie par le sinus de ce nouvel argument la plus grande aberration, le produit sera l'aberration actuelle en déclinaison ; la règle est donc la même dans les deux cas. Il n'y aura aucun doute sur le signe du résultat, en ayant soin d'affecter le sinus de l'argument du signe positif ou du signe négatif, selon que cet argument sera plus petit ou plus grand que deux angles droits.

279. Les deux formules de nutation sont susceptibles du même mode de transformation; en effet, la formule de nutation en ascension droite peut s'écrire ainsi :

$$dÆ' = -9'',4 \cos Æ \operatorname{tang} \mathrm{D} \cos ☊$$
$$\times \left[1 + \frac{(16'',127 + 6'',999 \sin Æ \operatorname{tang} \mathrm{D}) \operatorname{tang} ☊}{9'',4 \cos Æ \operatorname{tang} \mathrm{D}}\right];$$

faisant

$$\frac{16'',127 \pm 6'',999 \sin Ꝝ \operatorname{tang} D}{\pm 9'',4 \cos Ꝝ \operatorname{tang} D} = \cot \varphi,$$

et prenant le signe supérieur si la déclinaison est boréale, le signe inférieur dans le cas contraire, il vient, en secondes de degré,

$$dꝜ' = \mp 9'',4 \cos Ꝝ \operatorname{tang} D \cos \Omega\, [1 + \cot \varphi \operatorname{tang} \Omega],$$
$$= \mp \frac{9'',4 \cos Ꝝ \operatorname{tang} D}{\sin \varphi} \sin(\varphi + \Omega);$$

de là, pour une étoile boréale,

$$dꝜ' = \frac{9'',4 \cos Ꝝ \operatorname{tang} D}{\sin \varphi} \sin(6^s + \varphi + \Omega)$$

et pour une étoile australe

$$dꝜ' = \frac{9'',4 \cos Ꝝ \operatorname{tang} D}{\sin \varphi} \sin(\varphi + \Omega).$$

Ainsi, en multipliant la plus grande nutation en ascension droite $\frac{9'',4 \cos Ꝝ \operatorname{tang} D}{\sin \varphi}$ par le sinus de l'argument des tables $(6^s + \varphi)$, ou φ augmenté de la longitude du nœud de la Lune pour le jour donné, le produit sera la nutation cherchée.

La formule de nutation en déclinaison est

$$dD' = \pm 9'',4 \sin Ꝝ \cos \Omega \mp 6'',999 \cos Ꝝ \sin \Omega;$$

on prend les signes supérieurs pour les déclinaisons boréales et les signes inférieurs pour les déclinaisons australes (art. **268**). En décomposant cette formule en deux facteurs, on a

$$dD' = \pm 9'',4 \sin Ꝝ \cos \Omega \left[1 - \frac{6'',999 \cos Ꝝ}{9'',4 \sin Ꝝ} \operatorname{tang} \Omega\right].$$

Soit

$$\frac{9'',4 \operatorname{tang} Ꝝ}{6'',999} = \operatorname{tang} \varphi',$$

il vient

$$dD' = \pm 9'',4 \sin Ꝝ \cos \Omega\, [1 - \cot \varphi' \operatorname{tang} \Omega]$$
$$= \pm \frac{9'',4 \sin Ꝝ}{\sin \varphi'} \sin(\varphi' - \Omega) = \mp \frac{9'',4 \sin Ꝝ}{\sin \varphi'} \sin(\Omega - \varphi');$$

ainsi pour les étoiles boréales et australes, mais en prenant D positivement dans le 1er cas, et négativement dans le 2e cas,

$$dD' = + \frac{9'',4 \sin Æ}{\sin \varphi'} \sin(6^s - \varphi' + ☊);$$

ou pour les étoiles australes, et en supposant toujours la déclinaison positive,

$$dD' = + \frac{9'',4 \sin Æ}{\sin \varphi'} \sin(12^s - \varphi' + ☊).$$

La règle d'après laquelle on détermine la nutation en déclinaison est donc absolument la même que la précédente; c'est d'après elle que nous avons calculé des Tables particulières pour α, β et δ de la petite Ourse, etc. (*Voyez* tab. XIV.)

Quelle que soit l'étoile pour laquelle on forme une table particulière, il faut avoir soin d'en rendre les arguments positifs. Or, comme dans les formules précédentes les angles auxiliaires φ, φ' sont supposés tels, il faudrait modifier ces formules dans le cas contraire. Par exemple, pour une étoile australe, on a en général

$$dD' = + \frac{9'',4 \sin Æ}{\sin \varphi'} \sin(12^s - \varphi' + ☊);$$

mais si l'angle φ', dont le signe dépend de tang Æ, était négatif, il viendrait

$$dD' = \frac{-9'',4 \sin Æ}{\sin \varphi'} \sin(\varphi' + ☊);$$

et pour rendre le facteur $\frac{-9'',4 \sin Æ}{\sin \varphi'}$ positif, il faudrait, en supposant d'ailleurs Æ plus petit que deux angles droits, écrire

$$dD' = \frac{+9'',4 \sin Æ}{\sin \varphi'} \sin(6^s + \varphi' + ☊),$$

afin que l'argument $6^s + \varphi'$ de la table et le logarithme du facteur dont il s'agit fussent positifs.

EXEMPLE.

280. Calculer, d'après la méthode précédente, une table particulière d'aberration et de nutation pour la polaire, à commencer de 1830.

Au 1er janvier 1830, position moyenne. $\begin{cases} Æ = 14^\circ 52' 45'', & \text{variat. ann.} = 230'',6 \\ D = 88.24.30, & \text{variat. ann.} = 19,4; \end{cases}$

de là, et d'une manière suffisamment exacte, pour former une pareille table,

Au 1er janvier 1835. $\begin{cases} Æ = 15^\circ 11' 58'' \\ D = 88.22.30 \end{cases}$

Au 1er janvier 1840. $\begin{cases} Æ = 15.31.11 \\ D = 88.25.45; \end{cases}$

ainsi de suite. . . .

Nous exprimons ici les ascensions droites en arcs, pour la facilité du calcul; mais comme le plus souvent elles sont employées en heures, minutes et secondes, les maxima d'aberration et de nutation que nous allons déterminer seront, relativement à cette coordonnée, exprimés en secondes de temps, en divisant par 15 les valeurs précédentes de $dÆ$.

Arguments d'aberration en Æ.

$$
\begin{array}{rl}
\log.\dfrac{18,58}{20,253} = & 9,96256 \\
\cot Æ = & \underline{0,57563} \qquad\qquad 180^\circ \\
\text{l. tang}\,\theta = & \underline{0,53819} \qquad \theta = \underline{\;73.50'50''\;} \\
\text{c. log. } 15 = & 8,82391 \quad \text{argum. } 253.50.50 = 8^s 13^\circ 51' \\
\text{c.}\cos\theta = & 0,55565 \\
\sin Æ = & 9,40956 \\
\text{c.}\cos D = & 1,55480 \\
\log.\ 20,253 = & \underline{1,30649} \\
\log.\text{ argum.} = & 1,65041 \quad \text{argument.}\ \ldots\ldots\ 1,65041
\end{array}
$$

Le calcul est le même pour β de la petite Ourse, mais on n'ajoute pas 180° à l'angle θ.

Arguments d'aberration en D.

log. const. =	9,96256	$\log.\ \frac{8,06}{20,253}$ =	9,59985
log. tang Æ =	9,42437	c.cos Æ =	0,01481
log. 1er terme =	9,38693	cot D =	8,44540
		log. 2e terme =	8,06006 —

1er terme +	0,24373			
2e terme —	0,01148			
tang θ' =	0,23225	log. = 9,36596		180°
			θ' =	13.4′30″
c.cos θ' =	0,01141	argum.		193.4.30 = 5^{s}16°5′
cos Æ =	9,98519			
sin D =	9,99983			
log. const. =	1,30649			
log. argum. =	1,30292	argument.		1,30292

Pour β de la petite Ourse, le premier et le deuxième terme ci-dessus sont positifs; et l'on prend le supplément à 360° de l'angle θ', pour former l'argument de la table.

Arguments de nutation en Æ.

$\log.\ \frac{6,999}{9,4}$ =	9,87190	$\log.\ \frac{16,127}{9,4}$ =	0,23442
tang Æ =	9,42437	c.cos Æ =	0,01481
l. 1er terme =	9,29627	cot D =	8,44540
		l. 2e terme =	8,69463

1er terme	0,19782			
2e terme	0,04950			
cot φ	0,24732	l. cot φ = 9,39326		180°
c.log 15 =	8,82391		φ =	76.6′30″
c. sin φ =	0,01229	argum.		256.6.30 = 8^{s}16°7′
cos Æ =	9,98519			
tang D =	1,55460			
log. 6″,4 =	0,97313			
log. argum. =	1,34912	argument		1,34912

Pour β de la petite Ourse, le second terme ci-dessus est négatif, mais on n'ajoute pas 180° à l'angle φ, comme dans cet exemple.

Arguments de nutation en D.

log. const. =	0.12810		
tang Æ =	9,42437		180°
l. tang φ' =	9,55247	φ' = −	19.38′10″
		argument...	160.21.50 = $5^s 10^\circ 22'$
c. sin φ' =	0,47360		
sin Æ =	4606,56		
l. const =	0,97313		
log. argum. =	0,85629	argument	0,85629

Pour β de la petite Ourse, on prend le supplément à 360° de l'angle φ': c'est ainsi qu'ont été trouvés les nombres de la table XIV.

Les arguments de la nutation solaire en ascension droite et en déclinaison dépendants du double de la longitude du Soleil se détermineraient par un calcul tout semblable; ils sont d'ailleurs renfermés dans cette table particulière.

Calculs des positions apparentes des étoiles, et de leurs passages au méridien en temps sidéral et en temps moyen.

281. Ier EXEMPLE. Déterminer la position apparente de α de l'Aigle pour le 1er juillet 1812.

Dans la *Connaissance des Temps* de 1833, page 114, M. Largeteau a publié, à l'exemple de Burckhardt, de nouvelles tables d'aberration et de nutation pour 36 étoiles principales : elles ont l'avantage de donner presqu'à vue les quantités que l'on cherche ; elles sont en outre calculées avec une extrême précision et renferment la nutation solaire. En voici l'usage :

Au 1er juillet 1812, on avait, par hypothèse, au moment de l'observation,

longit. du Soleil ⊙ = $3^s 9^\circ 23'$,
longit. moyenne du nœud de la Lune ☊ = 5.1.31 ;

d'après cela, on a, en faisant usage des Tables de M. Largeteau (*Conn. des Temps* de 1833, page 114),

Æ moy. en 1805...	$19^h41^m15^s9$,	D moy. en 1805...	8°21′50″3 B
variat. pour 7 ans..	20,5,	variat. pour 7 ans.	1. 3,8
Æ moy. au 1er janvier 1812. . . .	$=19^h41^m36^s40$	D moy. au 1er janvier 1812 . . .	=8°22′54″1.
Page 141. Variation . .	1,46	Page 141. Variation . .	29,5
Aberration .	6,32	Aberration .	26,5
Nutation . .	4,54	Nutation. . .	16,0
Constante . .	10,00	Constante . .	— 1. 0,0
Æ apparente	$=19^h41^m38^s72$	D apparente	=8°23′ 6″1

Les constantes en ascension droite et en déclinaison ont été introduites pour rendre toujours positives les trois petites équations.

Notez bien que la variation a pour argument le jour du mois; l'aberration, la longitude ☉ du Soleil; la nutation, le nœud ☊ de la Lune.

IIe EXEMPLE. Calculons maintenant la position apparente de Sirius pour le 13 mai 1831, sachant, 1° que sa position moyenne au 1er janvier 1830 était

Æ $= 6^h37^m39^s,27$; variat. ann. $+2'',648$;
D $=16°29'18'',74$ (austr.); variat. ann. $+4,418$;

2° que le 13 mai 1831 l'on avait, selon la *Conn. des Temps*,

longit. ☉ $=1^s21°56'$
longit. du nœud ☊ $=4.26.41.$

Par notre table XIV particulière, on a

Aberr. en Æ (en temps).			Aberr. en D.		
table	$5^s21°15'$ maximum..	0,14775	table	$2^s25°48'$ maximum ..	1,11303
☉=	1.21.56.		☉=	1.21.56.	
arg.	7.13.11.	log. sin. arg.=9,83527—	arg.	4.17.44.	log. sin. arg.=9,82774+
	— 0″,96	9,98302—		+ 8″,72	0,94077+

Si l'on voulait en secondes de degré l'aberration en Æ, il faudrait

ajouter au log. constant de la table celui de 15 ou 1,17609.

Nutat. en Æ (en temps).			Nutat en D.		
table	$6^s\ 1^\circ 52'$ maximum..	9,97280	table	$8^s 22^\circ 53'$ maximum..	0,97044
	☊=4.26.41			☊=4.26.41.	
arg.	10.28.33. log. sin. arg.=	9,71747−	arg.	1.19.34. log. sin. arg.=	9,88148+
	−0″,49	9,69027−		+ 7″,11	0,85192+

Nutat. sol. en Æ (en temps).			Nutat. sol. en D.		
table	$6^s 14^\circ 52'$	8,82529	table	$8^s 21^\circ 15'$	9,71952
	2 ⊙=3.13.52.			2 ⊙=3.13.52.	
arg.	9.28.44. log. sin. arg.=	9,94293−	arg.	o. 5. 7. log. sin. arg.	8,95029+
	− 0″,06	8,76822−		+ 0″,05	8,66981+

RÉCAPITULATION.

au 1er janv. 1830	Æ = $6^h 37^m 39^s,27$	D	= $16^\circ 29' 18'',74$	(austr.)
préces. pour $1^{an},36$	+ 3,59	préces.	+ 6,00	
aberr.	− 0,96	aberr.	+ 8,72	
nut lun.	− 0,49	nut. lun.	+ 7,11	
nut. sol.	− 0,06	nut. sol.	+ 0,05	
asc. dr. appar.	Æ′ = $6^h 37^m 41^s,35$	déclin. appar. D′	= $16^\circ 29' 40'',62$	

au 13 mai 1831.

Par la table déjà citée de M. Largeteau (*Conn. des Temps* de 1833, p. 125), on a

au 1er janv. 1831	Æ = $6^h 37^m 41^s,92$	D	= $16^\circ 29' 23'',2$	(austr.)
au 13 mai, variat.	0,96	variat.	26,6	
aberr.	3,98	aberr.	33,7	
nut. lun. sol.	4,49	nut. lun. sol.	17,2	
constante.	− 10,00	constante.	−1′ 0,0	
asc. dr. appar.	Æ′ = $6^h 37^m 41^s,35$	déclin. appar. D′	= $16^\circ 29' 40'',7$	

Dans ce calcul comme dans le précédent, les déclinaisons des étoiles sont toujours prises positivement.

Pour changer une position apparente en position moyenne, il faut évidemment prendre l'aberration et la nutation avec des signes contraires à ceux qu'indiquent les tables.

L'ascension droite apparente $6^h37^m41^s,35$ exprime en temps sidéral (art. **11**) l'heure du passage de l'étoile au méridien supérieur : en y ajoutant 12^h on a l'heure du passage suivant au méridien inférieur. Ainsi à l'un comme à l'autre passage, il est, à la pendule sidérale, supposée bien réglée, $6^h37^m41^s,35$; même remarque pour tout autre astre.

IIIe EXEMPLE. Le temps moyen du passage des étoiles à un méridien quelconque se calcule rapidement, en se servant du livre actuel de la *Connaissance des Temps*, qui donne leurs positions apparentes. Cherchons, par exemple, pour le 15 juillet 1842, l'heure moyenne à laquelle Antarès était au méridien de Greenwich dont la longitude ouest en temps est de 9^m22^s.

Ascens. dr. apparente d'Antarès $= 16^h19^m47^s,92$ (p. 145 du livre cité).

Temps sid. à midi moy. à Paris........ $7^h31^m41^s,00$; cor. due à la dif. des mérid. (table V.).. + 1,54	— 7.31.42,54
heure appr. à Londres.........	8.48. 5,38
réduct. au temps moy. (tab. IV.).	— 1.26,52
heure moy. du passage à l'observatoire de Greenwich........	8.46.38,86

Comme l'instant du passage de la Lune au méridien n'est annoncé qu'à une minute près dans la *Connaissance des Temps*, et qu'on pourrait avoir besoin de le connaître avec plus de précision, on chercherait pour cette époque l'ascension droite lunaire ou le temps sidéral, que l'on convertirait ensuite en temps moyen. Quant à l'heure approchée de ce passage supposée inconnue, il est facile de voir, en la désignant par t, qu'elle est donnée par la formule suivante, dans laquelle les mouvements en ascension droite de la Lune ☾ et du Soleil ☉ sont censés uniformes, savoir :

$$t = \frac{Æ☾ - Æ☉}{12^h + s - l} \cdot 12^h,$$

les ascensions droites des deux astres étant prises pour midi moyen, et s, l étant respectivement le mouvement semi-diurne du Soleil et de la Lune.

Par exemple, selon la *Connaissance des Temps* pour 1840, le passage de la Lune eut lieu le 25 juin à 7^h47^m du matin, ou le 24 à 19^h47^m temps astronomique. Mais au moyen de la formule ci-dessus l'on trouve $t = 19^h45^m$ à fort peu près. En effet,

le 24 à midi Æ ☾ = 19°0′56″,1	=	$1^h16^m\ 3^s,73$
	+	24
idem — Æ ⊙ moyen	—	6.10.47,44
Æ ☾ — Æ ⊙	=	19. 5.16,29
	=	19,088

D'ailleurs

variation semi-diurne de ☾ ou l	=	$26^m29^s,66$
idem du ⊙ ou s	=	2. 4,66
$s - l$	=	—24.25,00

de là

$$12^h + s - l = 11^h35^m35^s = 11^h,593$$

et

$$t = \frac{19^h,088 \times 12}{11^h,593} = 19^h,758 = 19^h45^m,48.$$

Si l'on suppose seulement $t = 19^h45^m$ et qu'on cherche l'asc. dr. de la Lune pour 7^h45^m du matin le 25 juin, en partant de l'asc. dr. donnée à minuit le 24, savoir Æ ☾ = 25°38′21″,1, et en tenant compte des différences secondes, on trouvera, par la formule de l'art. **240**, et à cause de

$$\text{différence 1}^{\text{re}}\ \Delta_1 = 6°54'10'',5,$$
$$\text{différence 2}^{\text{e}}\ \Delta_2 = 0.17.35,1;$$

on trouvera, disons-nous,

Æ ☾ (à 19^h45^m)...30°3′49″,73 = $2^h0^m15^s,33$.

Tel est à très-peu de chose près le temps sidéral du passage au méridien de Paris : ainsi l'on a, par une seconde approximation,

temps sidéral		$2^h\ 0^m15^s,33$
	+	24
le 24 juin à midi Æ ⊙ moy.	—	6.10.47,44
		19.49.27,89
correct. (table IV)	—	3.14,87
temps moyen très-appr.		19.46.13,02

C'était donc plus exactement à cette heure que devait être calculée l'ascension droite de la Lune; mais sans refaire en entier ce calcul, on peut se servir du mouvement horaire qui, à l'époque de minuit le 24 juin, était de 0°34′30″,89, et le supposer uniforme pendant $1^m 13^s,0$, temps pendant lequel l'Æ ☾ s'accroît de $2^s,8$. On aura donc en définitive

temps sidéral du passage	$2^h\ 0^m 18^s,13$
— Æ ⊙ moy. à midi —	6.10.47,44
	19.49.30,69
correct. (table IV)	— 3.14,87
Temps moyen réel du passage	19.46.15,82

Il est tout à fait inutile de pousser plus loin l'approximation, puisqu'en 2,8 secondes de temps le mouvement lunaire est insensible.

282. Si l'on voulait évaluer les aberrations en longitude et en latitude des étoiles, elles se déduiraient tout d'abord des formules $(1_{\prime})$, $(2_{\prime})$ de l'art. **277**, en y faisant $\omega = 0$. En effet, par suite de la coïncidence des plans de l'équateur et de l'écliptique, l'ascension droite Æ se change en longitude L, et la déclinaison D en latitude λ; ainsi l'on a

$$\text{aberr. en longit.} = -\frac{20'',253}{\cos\lambda}\cos(\odot - L),$$
$$\text{aberr. en latit.} = -20'',253 \sin\lambda \sin(\odot - L).$$

Maintenant, si l'on suppose que

$$\frac{X}{\cos\lambda} = -\frac{20'',253}{\cos\lambda}\cos(\odot - L), \qquad Y = -20'',253\sin\lambda\ \sin(\odot - L),$$

il viendra, à cause de $\cos^2(\odot - L) + \sin^2(\odot - L) = 1$,

$$X^2 + Y^2\sin^2\lambda = (20'',253\sin\lambda)^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipse d'aberration ou de l'orbite apparente de l'étoile, rapportée à ses axes rectangles. Il est évident que cette ellipse a pour demi-axes 20″,253 et 20″,253 sin λ, et pour centre le lieu vrai de l'astre; il ne l'est pas moins que le demi grand axe 20″,253 est parallèle à l'écliptique, et le demi petit axe tangent au cercle de latitude.

LIVRE CINQUIÈME.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS ABRÉGÉES SUR LES EFFETS DES LUNETTES ASTRONOMIQUES.

283. Afin de réunir dans cet ouvrage tout ce qu'il importe de connaître en Géodésie, nous allons donner une idée des principaux phénomènes de Dioptrique.

Il résulte de ce qui a été dit à l'art. **113**, que les lunettes adaptées aux cercles répétiteurs portent chacune à leurs extrémités deux lentilles, et que l'image d'un objet éloigné est transmise avec beaucoup de netteté à leur foyer ou centre commun de sphéricité ; mais cette propriété exige, pour être bien comprise, quelques explications.

Soient LL′ (*fig.* 9) l'objectif supposé bi-convexe ; A un point lumineux très-éloigné de ce verre et situé dans l'axe des deux surfaces LPL′, LP′L′. Parmi tous les rayons émanés de ce point et qui viennent couvrir la surface de l'objectif, il en est un perpendiculaire à cette surface, qui ne subit aucune réfraction (art. **17**); c'est le rayon principal ACO.

De même parmi tous les rayons émanés du point lumineux B situé hors de l'axe ACO, et qui tombent sur l'objectif, il en est un BG*b* principal, lequel, après avoir éprouvé une réfraction en entrant dans le verre, passe par le centre G de l'objectif, arrive à la seconde

surface LP′L′ où il éprouve une seconde réfraction, et continue sa route parallèlement à sa direction primitive, puisque les deux surfaces LPL′, LP′L′ sont égales. En faisant abstraction de l'épaisseur de la lentille, qui est toujours très-petite, ce rayon principal sera représenté par la droite BGb, et censé n'éprouver aucune réfraction.

284. Considérons maintenant un rayon AE (*fig*. 10) rencontrant obliquement la surface convexe LPL′; ce rayon changera de direction en entrant dans le verre, et c'est un fait constaté par l'expérience, qu'il se rapprochera de la perpendiculaire CE à cette surface, parce que la densité du verre est plus grande que celle de l'air; en sorte que le sinus de l'angle d'incidence CEA $= \theta$ sera au sinus de l'angle réfracté CEE′ $= \varphi$ dans le rapport constant de $m:n$.

Le rayon lumineux EE′, après avoir traversé la lentille en ligne droite, éprouvera une seconde inflexion au point E′, en sortant du verre pour rentrer dans l'air; mais il s'écartera de la perpendiculaire C′E′ à la seconde surface LE′L′, parce qu'il passera dans un milieu moins dense, en sorte que le sinus de l'angle d'incidence C′E′E $= \theta'$ sera au sinus de l'angle rompu C′E′A′ $= \varphi' :: n:m$.

Cela posé, soient $r =$ EC le rayon de courbure des deux surfaces LPL′, LP′L′ supposées parfaitement égales; d la distance AE très-grande par rapport à r; l'épaisseur PP′ de la lentille extrêmement petite; et prolongeons EE′ jusqu'en R : on aura, à cause de l'angle AEM $=$ A $+$ C, de l'angle CEE′$=$C$-$R, et de la petitesse de ces angles; on aura, disons-nous,

$$\text{au point E,}\ \frac{m}{n} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{A+C}{C-R};$$

$$\text{au point E}',\ \frac{n}{m} = \frac{\sin\theta'}{\sin\varphi'} = \frac{R+C'}{A'+C'}.$$

De là

$$A = \frac{m}{n}(C-R) - C,$$

$$A' = \frac{m}{n}(R+C') - C';$$

puis ajoutant, on a

$$A + A' = \frac{m}{n}(C+C') - C - C'.$$

Mais, par hypothèse, C diffère extrêmement peu de C′; partant,

$$A + A' = 2C\left(\frac{m-n}{n}\right).$$

D'un autre côté, les triangles rectilignes AEC, A′E′C′ donnent, en désignant par d' la droite E′A′,

$$A = \frac{r}{d}C, \qquad A' = \frac{r}{d'}C';$$

d'où

$$A + A' = \left(\frac{r}{d} + \frac{r}{d'}\right) C.$$

Égalant ces deux valeurs de $A + A'$, on a enfin

$$d' = \frac{r}{2\left(\frac{m-n}{n}\right) - \frac{r}{d}}.$$

C'est un résultat de l'expérience que, dans le passage de l'air dans le verre, on a $\frac{m}{n} = \frac{31}{20}$: mettant donc cette valeur dans celle de d', il vient

$$d' = \frac{r}{2\left(\frac{31}{20} - 1\right) - \frac{r}{d}} = \frac{r}{\frac{11}{10} - \frac{r}{d}},$$

ou à fort peu près

$$(1) \qquad d' = \frac{r}{1 - \frac{r}{d}} = r\left(1 + \frac{r}{d} + \frac{r^2}{d^2} + \ldots\right).$$

Faisons $\frac{r}{d} = \frac{1}{10000}$, c'est-à-dire supposons que l'objet observé soit à une distance égale à 10 mille fois la longueur de la lunette; on aura

$$d' = r + \frac{r}{10000} + \frac{r}{(10000)^2} + \ldots;$$

si de plus $r = 1^{\mathrm{m}}$, il viendra

$$d' = 1^{\mathrm{m}} + 0^{\mathrm{m}},0001 + \ldots$$

Il suit de là et de ce que l'épaisseur de la lentille peut être considérée comme nulle, que le point E′ coïncide sensiblement avec le point E, et le point A′ avec le point C.

On tire en outre pour conséquence, que tous les rayons partant d'un objet A très-éloigné d'une lunette, et qui traversent l'objectif bi-convexe, se réunissent à son centre de sphéricité; réciproquement, que les rayons émanant d'un objet placé au foyer A′ d'une lentille LL′ et qui la traversent, en sortent sensiblement parallèles, ou ne se réunissent qu'à une très-grande distance.

285. Le foyer A′ d'une lunette n'est pas, à proprement parler, un point mathématique, puisque tous les rayons, tels que AE, ne se réunissent pas rigoureusement au même lieu. Le petit intervalle dans lequel la vision est bien nette, dépend de la distance à laquelle on se trouve de l'objet et de la grandeur de la lentille. Ce défaut de réunion des rayons en un seul et même point, et qui nuit à la netteté des images, se désigne sous le nom d'*aberration de sphéricité*.

Les rayons parallèles à l'axe AO, après avoir traversé l'objectif et s'être réunis au foyer, continuent leur route à travers l'oculaire d'où ils sortent parallèles, lorsque son centre de sphéricité F (*fig.* 9) coïncide avec celui de l'objectif. Cela est évident, puisque les surfaces de l'une et de l'autre lentille sont semblables et placées de la même manière par rapport à l'axe optique AO. De plus, les objets sont vus renversés dans les lunettes que nous considérons ici; car, d'après ce qui précède, les points B, B′ d'un objet ayant respectivement leurs images en b, b' sur l'oculaire, et par conséquent en-deçà du foyer commun F, l'œil placé en O voit le point b au-dessous de l'axe optique AO, quoique B soit au-dessus.

286. Tous les rayons reçus par l'objectif, et qui vont traverser l'oculaire, occupent sur cette seconde lentille un espace beaucoup plus petit; c'est pour cela que les lunettes rendent en général les objets plus distincts. En effet, la lumière produite par une certaine quantité de rayons est d'autant plus vive que ces rayons sont réunis dans une plus petite étendue. Ainsi, en désignant par ρ et ρ' les rayons de l'ouverture de l'objectif et de celle de l'oculaire; par I, I′ les inten-

sités de la lumière à l'entrée et à la sortie de la lunette, on a

$$I' = \frac{\rho^2}{\rho'^2} I.$$

Il est donc avantageux que l'oculaire soit beaucoup plus petit que l'objectif.

287. Désignons respectivement par r et R leurs rayons de sphéricité (*fig.* 11). L'objet AB éloigné viendra se peindre en ab au foyer de la lunette, et le rayon principal BGb entrera dans l'oculaire au point e, pour en sortir au point e', et suivre, après deux réfractions, la direction e'O qu'on peut considérer comme parallèle à bg; le point g étant le centre de l'oculaire et O son foyer. L'image ab est donc vue sous l'angle $e'Oa = bga$. Or, à cause de

$$\text{tang}\, g = \frac{ba}{ag}, \quad \text{tang}\, G = \frac{ba}{aG},$$

on a

$$\text{tang}\, g = \frac{aG}{ag} \text{tang}\, G,$$

ou simplement

$$g = \frac{R}{r} G.$$

Donc, l'angle sous lequel on voit l'image d'un objet est proportionnel à $\frac{R}{r}$; ou, ce qui est de même, le grossissement d'une lunette est d'autant plus fort, que le rayon de sphéricité de l'oculaire est plus petit par rapport à celui de l'objectif. Cet angle de vision sert seul pour estimer l'amplification d'une lunette; car quoique le jugement que nous portons sur la grandeur d'un objet dépende beaucoup aussi de la distance à laquelle nous le supposons de notre œil, comme il ne peut être soumis au calcul, on en fait abstraction dans cette mesure. Il résulte de là que quand une lunette grossit 40 fois, c'est comme si un objet était vu à une distance 40 fois moindre.

Le champ d'une lunette est mesuré par l'angle sous lequel on verrait

du point O et à travers l'oculaire toute la longueur d'un fil placé au second foyer *a* de ce verre, et qui serait égale au diamètre intérieur du tube, ou plutôt de l'ouverture du diaphragme dont il sera parlé plus loin. On conçoit, d'après cela, pourquoi le Soleil et la Lune ne sont pas vus en entier dans les télescopes qui grossissent considérablement, comme 300 fois.

Lorsqu'une lunette à deux lentilles est disposée de manière à représenter les objets très-nettement, et qu'on la dirige vers le ciel, tous les rayons reçus par l'objectif vont se peindre sur l'oculaire sous forme d'un petit cercle lumineux dont le rayon est à celui de l'ouverture de l'objectif dans le rapport des rayons de courbure *r* et R; on a donc un moyen pratique d'évaluer facilement le degré de grossissement de l'oculaire.

288. La formule (1) nous apprend que plus un objet A est près d'une lentille LL' (*fig.* 10), plus son image A' s'en éloigne. Or, cette image ne pouvant, pour une bonne vue, être bien distincte qu'au foyer de l'oculaire, il est évident qu'il faut allonger la lunette, ou éloigner les deux lentilles l'une de l'autre.

Les myopes, qui ont le cristallin ou la partie antérieure de l'œil très-convexe, voient confusément les objets éloignés, très-bien aperçus par les presbytes; parce que chez eux les images de ces objets se forment très-près du cristallin, et en-deçà de la rétine ou du fond de l'œil où la vision est seulement très-distincte. Il faut donc qu'ils rapprochent les objets jusqu'à ce que les images tombent sur la rétine même; c'est pour cette raison qu'ils ne voient bien dans la lunette d'un presbyte qu'après avoir enfoncé suffisamment l'oculaire pour placer, entre ce verre et son centre de sphéricité, l'image produite au foyer de l'objectif.

289. On noircit les parois intérieures des lunettes afin qu'elles absorbent les rayons qu'elles réfléchiraient sans cela, et qui nuiraient à la clarté des images. On attache en outre le réticule (art. **113**) à un diaphragme dont l'ouverture est moindre que celle de la lunette, afin d'en rétrécir le champ et d'arrêter les rayons qui, en se décomposant près des bords de l'objectif, formeraient des images moins nettes et

entourées des couleurs de l'arc-en-ciel, ou de franges dans lesquelles le bleu et le pourpre dominent ordinairement. On remarque de ces iris très-près du centre même, dans les lunettes qui ne sont point *achromatiques* (art. **113**), et quand les objets sont très-loin de l'objectif. Cet effet résultant de la différente réfrangibilité des rayons colorés dont se compose un faisceau de lumière blanche, est presque entièrement détruit lorsque les objectifs sont composés de deux verres de différentes densités, comme nous l'avons déjà fait observer.

La bonté d'une lunette dépend nécessairement de celle des verres, qui doivent être très-polis, de forme très-régulière et de matière très-pure. Avec un oculaire d'un très-court foyer et un excellent objectif, on voit très-distinctement un objet fort lumineux, quoique son image perde de son éclat par le grossissement de l'oculaire. Si, au contraire, l'objet est obscur, ou que l'objectif soit défectueux, il faut un oculaire dont la longueur focale ne soit pas trop courte. (*Voyez*, pour plus de détails, le *Traité d'Optique* par La Caille.)

On adapte plusieurs oculaires aux lunettes terrestres, afin de voir les objets dans leur situation naturelle; mais alors la lumière se trouve d'autant plus affaiblie qu'elle traverse un plus grand nombre de verres.

290. Nous avons dit (art. **113**) qu'on plaçait dans les lunettes du cercle répétiteur et au foyer de la lunette, un réticule composé de deux fils qui se coupent à angles droits; mais dans les cercles de grandes dimensions qui servent pour les observations les plus délicates de l'Astronomie, le réticule est formé de cinq fils parallèles et équidistants, coupés perpendiculairement par un sixième fil. Nous en expliquerons l'usage lorsque nous parlerons de la lunette méridienne.

On place aussi au même foyer, dans les grands quarts de cercle et les théodolites non répétiteurs, tels que ceux de Ramsden, un micromètre composé de deux châssis, l'un fixe auquel sont attachés deux fils rectangulaires, l'autre mobile portant un fil nommé *curseur*. Ce second châssis se meut verticalement ou horizontalement à l'aide d'une vis dont la tête porte une aiguille qui, en tournant sur un cadran fixe

divisé en un certain nombre de parties, indique les fractions de tours que la vis a faites, et met à même par ce moyen d'évaluer des parties plus petites que celles qui peuvent être tracées sur le limbe. Quand le curseur couvre exactement le fil auquel il est parallèle, l'aiguille doit marquer 0. Le curseur étant ensuite amené sur un objet, sa distance au fil fixe marquée par le nombre de tours de l'aiguille, s'ajoute à l'arc lu sur le limbe ou se soustrait de cet arc, selon le cas. (*Voyez* l'*Astronomie* de Delambre, tome I, page 91.) Les diamètres des planètes se mesurent au micromètre.

Plusieurs astronomes du siècle dernier ont avancé que ces diametres, observés avec de fortes lunettes, sont agrandis de quelques secondes par l'effet d'une *irradiation* ou dilatation de lumière qui les environne en forme de frange, et que dans les passages de Mercure et de Vénus sur le Soleil, les diamètres de ces deux planètes paraissaient au contraire plus petits, de 1″ ou 2″ à cause d'un semblable débordement de lumière solaire. Mais d'autres astronomes doutent de la réalité de ce fait, et Lalande dit positivement (*Astron.*, tome II, page 154, 2ᵉ édit.) qu'ayant comparé avec grand soin le diamètre de Vénus observé tant sur le Soleil en 1761 que dans sa plus grande lumière avant et après ce passage, les trois mesures rapportées ensuite à la même distance n'ont offert aucune différence sensible.

CHAPITRE II.

DÉNOMINATIONS DES PRINCIPALES ÉTOILES, ET MOYENS DE LES RECONNAITRE.

291. Les méthodes d'observation qui seront l'objet des chapitres suivants exigeant quelque connaissance de l'état du ciel, nous allons donner la description des principales étoiles et indiquer les moyens de les reconnaître aisément.

Quand on observe les étoiles avec une bonne lunette, elles paraissent toutes comme des points plus ou moins brillants, mais plus petits qu'à l'œil nu. Les planètes présentent au contraire un disque sensible et analogue à celui de la Lune; ainsi, il est impossible de confondre dans un télescope Vénus, Mars, Jupiter et Saturne avec les plus belles étoiles. A la vue simple, Mars paraît de couleur rougeâtre. Jupiter et Vénus de couleur claire et argentine, Saturne est pâle et plombé, et quand on observe ces corps célestes pendant plusieurs jours, on s'aperçoit qu'ils ne conservent pas les mêmes positions par rapport aux étoiles voisines; d'ailleurs ils scintillent très-peu, surtout quand ils sont à quelque distance de l'horizon.

Les dénominations des principales constellations ou *astérismes* remontent à la plus haute antiquité. Mais dans les temps modernes, les étoiles qui composent un même groupe ont été désignées méthodiquement par des lettres grecques, ou romaines, ou par des chiffres. Les étoiles, selon leur plus ou moins d'éclat, se nomment de première, de seconde, de troisième, etc., grandeur. Cette classification n'a sans doute rien de rigoureux; aussi arrive-t-il que les astronomes ne sont pas toujours d'accord sur la grandeur, ou plutôt sur la mesure de l'éclat de la lumière d'une étoile.

La première constellation qu'il importe de remarquer, et qui sert à retrouver successivement toutes les autres, est la *grande Ourse*, ou vulgairement le *Chariot* (*fig.* 12). Elle est située pour nous vers le pôle élevé, et se compose de sept étoiles principales et très-visibles. Les quatre premières sont α, β, γ, δ, et forment un quadrilatère ; les trois autres ε, ζ, η représentent la *Queue* de la grande Ourse, parce que sur les anciennes cartes célestes, ces trois étoiles occupent cette partie même de l'animal qui y est figuré.

La droite menée par β et α de la grande Ourse ou par les *gardes*, passe très-près d'une étoile assez belle, qu'on nomme la *Polaire*, et autour de laquelle toutes les autres qui l'avoisinent semblent tourner d'orient en occident. Cette étoile est la principale ou l'α de la *petite* Ourse, autre constellation à peu près semblable à la première, mais plus rapprochée du pôle. Cette seconde constellation a pour *gardes* β et γ, étoiles de troisième grandeur.

α et β de la petite Ourse servent principalement à déterminer la latitude d'un lieu de la Terre. La première ou la Polaire passe à peu près au méridien, quand elle se trouve dans le même vertical avec celle des trois étoiles de la queue de la grande Ourse la plus voisine du quadrilatère, c'est-à-dire ε. Ainsi, l'on peut savoir, à l'aide d'un fil-à-plomb placé à quelque distance de l'œil, lorsque cette circonstance a lieu, et trouver à peu près, pendant la nuit, la direction de la ligne méridienne terrestre. L'étoile δ de cette constellation est aussi propre à faire connaître la hauteur du pôle, quand on l'observe avec un grand cercle répétiteur, à cause de sa proximité de ce point, et parce que sa position est bien connue.

La constellation du Dragon se reconnaît par une file d'étoiles qui entourent la petite Ourse; l'étoile la plus remarquable de cette constellation est désignée par α et se trouve entre la queue de la grande Ourse (*fig.* 12) et les gardes de la petite Ourse.

La droite menée par les étoiles ζ et η de la queue de la grande Ourse et prolongée de 31° environ, passe fort près d'une étoile de première grandeur, nommée *Arcturus* ou l'*α du Bouvier*.

La *Chèvre*, ou l'étoile principale de la constellation du Cocher, est de première grandeur; elle est située sur la ligne menée par δ et α de la grande Ourse (*fig.* 13).

La ligne tirée de l'étoile ε de la grande Ourse à la Polaire, passe de l'autre côté du pôle, au milieu d'une constellation nommée *Cassiopée*, et composée de cinq étoiles principales qui font une espèce de M.

Au delà de Cassiopée se trouve un groupe de sept étoiles occupant une grande étendue; quatre de celles-ci forment le carré de Pégase ou la grande Croix, opposé au quadrilatère de la grande Ourse. L'α du carré de Pégase se nomme la *tête d'Andromède;* cette étoile est la plus septentrionale des quatre de ce carré. La luisante α de Persée, ou la quatrième à partir de la tête d'Andromède, est la plus près du pôle.

On trouve la constellation du Lion, en prolongeant de 45° environ vers le midi, la droite qui joint α et β de la grande Ourse : elle forme un grand trapèze à l'un des angles duquel est une étoile de première grandeur, nommée *Régulus*. La queue β du Lion est une étoile de deuxième grandeur, située un peu au midi de la ligne tirée de Régulus à Arcturus, et est à 15° de Régulus vers l'orient (*fig.* 12).

La constellation d'Orion est un groupe de plusieurs étoiles rangées suivant l'ordre que présente la *fig.* 14. En hiver elle paraît du côté du sud vers les sept à huit heures du soir. Dans l'intérieur du quadrilatère, formé des étoiles γ, α, κ, β ou Rigel, on remarque trois étoiles en ligne droite, désignées par δ, ε, ζ, et vulgairement appelées les *trois Rois*, ou, selon les astronomes, le *Baudrier d'Orion*.

Sirius, l'étoile la plus brillante et la plus scintillante de celles que nous apercevons, est à l'orient du Baudrier; c'est l'α du grand Chien. Les *Pléiades*, formant un amas de petites étoiles, sont à l'occident en tirant vers le nord.

Aldébaran ou α du Taureau est une étoile de la première grandeur, située fort près des Pléiades, et sur la ligne menée de l'étoile γ d'Orion aux Pléiades : elle est remarquable par sa grandeur, son éclat et sa couleur rouge.

Procyon ou le *petit Chien* est une étoile, entre la première et la deuxième grandeur, située au nord de Sirius et plus orientale qu'Orion : elle fait avec Sirius et le baudrier d'Orion un triangle presque équilatéral.

Au nord de Procyon se trouvent, dans la constellation des Gémeaux, deux étoiles assez remarquables et peu distantes l'une de

l'autre; la première, la plus au nord, est désignée par α ou *Castor;* la seconde, par β ou *Pollux*.

La diagonale $\alpha\gamma$ du carré de la grande Ourse, prolongée de 68°, passe près d'une étoile de la première grandeur, connue sous le nom de l'*épi de la Vierge* (*fig.* 12). Cette étoile fait à peu près un triangle équilatéral avec Arcturus et la queue du Lion.

α de la *Lyre* ou *Wéga* (*fig.* 15) est une des plus brillantes étoiles du ciel, et fait presque un triangle rectangle avec Arcturus et la Polaire, l'angle droit étant vers l'orient à la Lyre.

Au midi de la Lyre paraît une belle étoile de seconde grandeur, dans la constellation de l'*Aigle:* elle est désignée, dans les catalogues, par α ou *Altaïr*. Cette étoile est située entre deux autres qui en sont fort proches, et qui forment une ligne droite avec elle.

Le *Capricorne* est une constellation indiquée par le prolongement de la ligne qui passe par la Lyre et par l'Aigle. Deux étoiles de troisième grandeur, α et β, à 2° l'une de l'autre, sont placées sur ce prolongement, et forment la tête du Capricorne. A 20° plus loin, du côté de l'orient, sont deux autres étoiles, δ et γ, situées de l'orient à l'occident et à 2° l'une de l'autre, lesquelles composent la queue du Capricorne.

En menant une ligne de l'Aigle à la queue du Capricorne, son prolongement de 20° indique *Fomalhaut* ou la *bouche du Poisson austral,* étoile de première grandeur.

Enfin, la ligne menée de Régulus à l'épi de la Vierge, et prolongée vers l'orient, rencontre la constellation du *Scorpion,* composée de trois étoiles au front du Scorpion, et formant un grand arc du nord au sud. L'étoile de la première grandeur, placée à l'orient et comme au centre de cet arc, se nomme *Antarès* ou le *cœur du Scorpion*.

Outre les étoiles que l'on aperçoit à la vue simple, on remarque dans le ciel une lumière blanche de forme irrégulière, et à laquelle on a donné le nom de *voie lactée:* elle entoure le ciel en forme de ceinture, et paraît, à l'aide du télescope, être formée d'un amas de petites étoiles dont les distances angulaires sont extrêmement petites. Quant aux parties qui ne présentent qu'une lumière blanche et continue, elles se nomment *nébuleuses*.

Enfin il est des étoiles, comme *Algol* ou la tête β de Méduse, située

au sud et à peu de distance de α de Persée, qu'on nomme *changeantes*, parce qu'elles ont un éclat variable : celle-ci passe de la seconde à la quatrième grandeur, dans une période de 69^h. Il en est d'autres dont la lumière augmente de plus en plus depuis un grand laps de temps; d'autres au contraire qui, après avoir brillé tout à coup, n'ont pas tardé à disparaître : phénomène extraordinaire qui paraît dû à un vaste incendie.

292. Nous n'étendrons pas davantage ce catalogue d'étoiles, qui est plus que suffisant pour mettre en pratique les méthodes que nous allons exposer (*); mais nous ferons remarquer que le moyen le plus sûr pour apprendre à connaître les étoiles, indépendamment des cartes célestes et de la méthode des alignements, est de les observer à leurs passages au méridien. Pour cet effet, l'on calcule l'heure du passage en temps moyen, d'une étoile bien connue, de Sirius par exemple, et après avoir disposé les lunettes du cercle répétiteur, comme il est dit à l'art. **121**, on dirige la lunette sur cette étoile, pour la suivre jusqu'à l'instant de sa médiation, en ayant soin d'éclairer un peu l'objectif (art. **127**), afin de pouvoir placer l'étoile exactement sous le fil vertical. Le cercle étant alors fixé invariablement, pourra servir à faire connaître les principales étoiles du Catalogue, dont on aura calculé l'heure du passage, et lorsqu'on aura amené la lunette supérieure au point du limbe qui désigne la plus grande hauteur que l'étoile proposée puisse atteindre au-dessus de l'horizon, hauteur qui est évidemment égale à celle de l'équateur, plus ou moins la déclinaison de cette étoile; parce que de cette manière, l'astre, au moment de sa médiation, sera peu éloigné de l'axe optique, et par conséquent facile à distinguer des étoiles plus petites qui pourraient l'avoisiner.

Quand on saura régler une pendule sur le temps sidéral, il ne sera pas nécessaire de déterminer le temps moyen du passage, puisqu'à cet instant la pendule marquera l'ascension droite apparente de l'étoile (art. **11**).

(*) Ceux qui désireront une description complète des constellations, pourront consulter le *Traité d'Astronomie* de Lalande, ou l'*Uranographie* de M. Francœur (cinquième édition).

CHAPITRE III.

DE LA DÉTERMINATION DE LA MARCHE D'UNE PENDULE, PAR RAPPORT AU SOLEIL ET AUX ÉTOILES.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Par les hauteurs correspondantes du Soleil.

293. En supposant que le Soleil décrive perpétuellement le même parallèle, et que les circonstances de son cours soient les mêmes après comme avant midi, on aura de la manière suivante l'heure que marque une pendule au moment où cet astre passe au méridien du lieu de l'observation.

Observez le temps où l'un des bords du Soleil se trouve à une certaine hauteur apparente vers l'est, ainsi que le temps où le même bord arrive à la même hauteur vers l'ouest; le milieu entre ces deux temps sera l'heure que la pendule marquait lorsque le centre du Soleil passait au méridien. Si, par exemple, le bord inférieur du Soleil était vu le matin à la hauteur de 20^g, lorsque la pendule marque $8^h 46^m 58^s$, et que le même bord fût aperçu le soir à la même hauteur, pendant que la pendule marque $3^h 0^m 3^s$, l'instant du midi vrai serait annoncé par cette pendule, à $11^h 53^m 30^s,5$, moitié de $8^h 46^m 58^s + 15^h 0^m 3^s$.

On ne peut se dispenser de répéter cette opération au moins huit à dix fois le matin, et autant le soir, afin que le milieu pris entre tous les résultats, donne le plus exactement qu'il est possible l'instant du midi.

Quand on prend plusieurs hauteurs le matin, il est indispensable d'en tenir note, afin de pouvoir remettre, le soir, la lunette supérieure

dans les mêmes positions qu'elle avait avant midi, en commençant toutefois dans un ordre inverse, comme cela est évident. Si des nuages ne permettaient pas d'observer l'astre après son passage au méridien, à une hauteur parfaitement correspondante à celle du matin, on l'observerait un peu plus tard, et l'on estimerait de combien il est descendu dans une minute de temps, afin de faire à l'heure de l'observation une correction proportionnelle qui la rendît exactement correspondante à la hauteur dont il s'agit.

C'est ordinairement avec un quart de cercle astronomique que l'on observe les hauteurs correspondantes des astres; mais le cercle répétiteur peut très-bien servir au même usage. Pour cet effet, l'on fixe à zéro la lunette supérieure, en suivant le procédé décrit à l'art. **121**; ensuite on dispose le limbe de l'instrument dans le vertical de l'astre, de manière que la bulle d'air du grand niveau soit exactement entre ses repères. Dans cette position, la lunette inférieure est horizontale; ainsi la lunette supérieure, rendue mobile et amenée sur l'astre, parcourra sur le limbe, un arc qui sera la mesure de l'angle de hauteur de cet astre au-dessus de l'horizon. Comme rien n'oblige à se presser dans ces sortes d'observations, l'on amène la ligne de foi du vernier de la lunette supérieure exactement sur un trait de division du limbe, et l'on note, comme nous venons de le dire, l'instant précis où l'un des bords de l'astre se trouve en contact avec le fil horizontal, en même temps que son disque est à peu près partagé en deux parties égales par le fil vertical.

C'est ainsi que M. Moynet et moi prîmes, à l'île d'Elbe, des hauteurs correspondantes du Soleil, les 20, 21 et 22 mars 1803. Voici la série des seules observations que nous pûmes faire le 20.

Le matin.

A la hauteur apparente h', la pendule marquait. .	$8^h48^m15^s$
h''.	8.51.28
h'''.	8.55.53
Somme des temps du matin. . .	$26^h35^m36^s$

Le soir.

A la hauteur apparente h''', la pendule marquait. . $14^h53^m37^s$
h''. 14.58. 1
h'. 15. 1.15

Somme des temps du soir. . . . $44^h52^m53^s$
Celle du matin étant. . . . 26.35.36

Le milieu entre ces deux sommes, ou le 6e = $11^h54^m44^s,83$.

Ainsi, le centre du Soleil passa au méridien à $11^h54^m44^s,83$, à très-peu près, en temps de la pendule.

Cette manière de procéder au calcul du midi approché ne fait pas voir l'accord des résultats partiels, mais il se manifeste ainsi qu'il suit :

HAUTEUR apparente.	TEMPS de la pendule.	MIDIS approchés.
h'	$8^h48^m15^s$ 15. 1.25 23.49.30	$11^h54^m45^s$
h''	8.51.28 14.58. 1 9.29	11.54.44,5
h'''	8.55.53 14.53.37 9.30	11.54.45
Moyenne arithmétique, ou midi approché.		11.54.44,83

Nous venons de faire connaître le résultat assez exact de nos observations du 20 mars; et nous nous assurâmes de même, par un grand

nombre de hauteurs correspondantes prises les jours suivants, et dans des circonstances plus favorables, que durant la présence du Soleil dans le méridien, la pendule marquait $11^h54^m7^s$ le 21 mars, et $11^h53^m30^s,88$ le lendemain; mais ces résultats ne donnent pas encore l'instant précis du midi vrai compté à la pendule, parce que le cours du Soleil n'est pas tel que nous l'avons supposé d'abord. Il importe donc de faire connaître la correction qu'il s'agit d'employer en pareil cas; tel est l'objet de l'article suivant.

Recherche de l'équation des hauteurs correspondantes.

294. Lorsque le Soleil s'avance dans les signes septentrionaux, par exemple, sa déclinaison est plus grande le soir que le matin (art. **11**); par conséquent si on l'a observé à 20^g de hauteur avant midi, l'angle horaire correspondant était plus petit que celui qui a eu lieu le soir à la même hauteur. D'où il suit que si ce dernier angle surpassait le premier de 20^s en temps, leur demi-différence 10^s serait ce qu'il faudrait ôter du milieu pris entre les temps des hauteurs égales, pour avoir le midi vrai.

Cela posé, soient P l'angle horaire du matin, et P' ou P + dP l'angle horaire du soir, lorsque le Soleil est descendu à la même hauteur à laquelle il a été observé la première fois. Soient, en outre, en temps de la pendule, T l'époque du matin, T' celle du soir, à partir de minuit; on aura, pour le midi vrai,

$$m = \mathrm{T} + \mathrm{P}, \qquad \text{ou} \qquad m = \mathrm{T}' - \mathrm{P}'.$$

Prenant la demi-somme de ces deux valeurs, pour réunir les observations du matin et du soir, il vient

$$m = \frac{\mathrm{T}+\mathrm{T}'}{2} - \left(\frac{\mathrm{P}'-\mathrm{P}}{2}\right);$$

ainsi $\frac{\mathrm{T}+\mathrm{T}'}{2}$ est le midi approché, et comme dP est la différence des deux angles horaires P, P' exprimés en degrés, on a nécessairement, lorsque le Soleil s'approche continuellement du pôle élevé,

$$\text{midi vrai} = \frac{\mathrm{T}+\mathrm{T}'}{2} - \frac{d\mathrm{P}}{2.15},$$

en réduisant dP en temps (art. **238**). On a d'ailleurs

$$P = 12^h - T, \quad P' = T' - 12^h, \quad \frac{P+P'}{2} = \frac{T'-T}{2}.$$

Supposons maintenant qu'on ait pris des hauteurs correspondantes le soir un certain jour, et le lendemain matin; on propose d'en conclure le minuit vrai.

Si l'on désigne par P l'angle horaire du soir, par P' l'angle horaire du matin, l'un et l'autre étant comptés à partir de midi; et que T, T' soient les temps correspondants, comptés d'un midi à l'autre, les angles horaires comptés de minuit seront successivement $12^h - T$, $T' - 12^h$: et dans l'hypothèse que le Soleil s'approche du pôle nord, on aura $12^h - T > T' - 12^h$; en sorte que le minuit M approche, ou $\frac{T+T'}{2}$, sera plus petit que le minuit vrai, de la moitié de la différence dP des angles horaires; donc

$$\text{minuit vrai} = \frac{T+T'}{2} + \frac{dP}{2.15}.$$

On a, en outre,

$$P = T, \quad P' = 24 - T', \quad \frac{P+P'}{2} = 12 - \left(\frac{T'-T}{2}\right).$$

Il reste, dans l'un et l'autre cas, à évaluer dP en fonction de la latitude du lieu et de la déclinaison de l'astre. Dans ce but, soient N la distance du centre du Soleil au zénith, qu'il est inutile de connaître, pourvu qu'elle soit la même avant comme après midi; H la hauteur du pôle, D la déclinaison boréale de l'astre à la première époque, D' sa déclinaison à la seconde époque; on aura généralement

$$(a) \qquad \begin{aligned} \cos N &= \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D, \\ \cos N &= \cos P' \cos H \cos D' + \sin H \sin D'; \end{aligned}$$

de là

$$\text{tang}\, H(\sin D' - \sin D) = \cos P \cos D - \cos P' \cos D'.$$

Mettant ici pour D et D' leurs valeurs respectives $\frac{1}{2}(D'+D) - \frac{1}{2}(D'-D)$ et $\frac{1}{2}(D'+D) + \frac{1}{2}(D'-D)$, afin d'introduire les valeurs moyennes dans

la formule, on aura

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang} H\left[\sin\left(\frac{D'+D}{2}+\frac{D'-D}{2}\right)-\sin\left(\frac{D'+D}{2}-\frac{D'-D}{2}\right)\right]\\&=\cos P\cos\left(\frac{D'+D}{2}-\frac{D'-D}{2}\right)-\cos P'\cos\left(\frac{D'+D}{2}+\frac{D'-D}{2}\right);\end{aligned}$$

puis développant et réduisant, il viendra

$$\begin{aligned}2\operatorname{tang} H\cos\tfrac{1}{2}(D'+D)\sin\tfrac{1}{2}(D'-D)&=(\cos P-\cos P')\cos\tfrac{1}{2}(D'+D)\\\times\cos\tfrac{1}{2}(D'-D)&+(\cos P+\cos P')\sin\tfrac{1}{2}(D'+D)\sin\tfrac{1}{2}(D'-D);\end{aligned}$$

ensuite divisant tout par $\cos\frac{1}{2}(D'+D)\cos\frac{1}{2}(D'-D)$, et remarquant que

$$\begin{aligned}\cos P-\cos P'&=2\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)\sin\tfrac{1}{2}(P'-P),\\\cos P+\cos P'&=2\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\cos\tfrac{1}{2}(P'-P),\end{aligned}$$

on obtiendra

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P'-P)&=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(D'-D)}{\sin\frac{1}{2}(P'+P)}\\&\times\left[\frac{\operatorname{tang} H}{\cos\frac{1}{2}(P'-P)}-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right];\end{aligned}$$

mais à cause de

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tang} H}{\cos\frac{1}{2}(P'-P)}&=\frac{\operatorname{tang} H}{\cos\frac{1}{2}(P'-P)}+\operatorname{tang} H-\operatorname{tang} H\\&=\operatorname{tang} H+\operatorname{tang} H\left[\frac{1-\cos\frac{1}{2}(P'-P)}{\cos\frac{1}{2}(P'-P)}\right]\\&=\operatorname{tang} H+\frac{2\operatorname{tang} H\sin^2\frac{1}{4}(P'-P)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(P'-P)}{\cos\frac{1}{2}(P'-P)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(P'-P)}\\&=\operatorname{tang} H+\operatorname{tang} H\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P'-P)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(P'-P),\end{aligned}$$

on a enfin

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P'-P)=&\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(D'-D)}{\sin\frac{1}{2}(P'+P)}\left[\operatorname{tang} H-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right]\\&+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(D'-D)\operatorname{tang} H\operatorname{tang}\frac{1}{2}(P'-P)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(P'-P)}{\sin\frac{1}{2}(P'+P)}.\end{aligned}$$

Dans cette formule rigoureuse aux différences finies, donnée par De-

lambre, il est toujours permis de négliger les quantités du troisième ordre; ainsi l'on a simplement P′ — P ou

$$dP = \frac{D'-D}{\sin\frac{1}{2}(P'+P)}\left[\text{tang}\,H - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right];$$

mais la correction du passage étant $-\frac{dP}{30}$ au méridien supérieur, et $+\frac{dP}{30}$ au méridien inférieur, on a définitivement

$$\text{midi vrai} = \frac{T+T'}{2} + \frac{D'-D}{30\sin\frac{1}{2}(P'+P)}\left[\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P) - \text{tang}\,H\right],$$

$$\text{minuit vrai} = \frac{T+T'}{2} + \frac{D'-D}{30\sin\frac{1}{2}(P'+P)}\left[\text{tang}\,H - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right].$$

Dans ces deux formules, D′ — D est le changement en déclinaison pendant l'intervalle des deux observations correspondantes; mais si l'on veut que $D'-D = dD$ exprime le changement diurne, il faudra écrire $\frac{(D'-D)(T'-T)}{24}$ au lieu de dD : d'ailleurs comme on prend ordinairement pour déclinaison moyenne $\frac{1}{2}(D'+D)$, celle D″ qui avait lieu à l'instant du passage, on aura, en désignant le demi-intervalle $\frac{T'-T}{2}$ par t, et substituant pour $\frac{P'+P}{2}$ ses valeurs précédentes converties en degrés,

$$(1)\qquad \text{midi vrai} = \frac{T+T'}{2} + \frac{dDt}{360}\left(\text{tang}\,D''\cot 15t - \frac{\text{tang}\,H}{\sin 15t}\right),$$

$$(2)\qquad \text{minuit vrai} = \frac{T+T'}{2} + \frac{dDt}{360}\left(\frac{\text{tang}\,H}{\sin 15t} + \text{tang}\,D''\cot 15t\right);$$

formules dans lesquelles t devra être exprimé en heures et décimales d'heure, et dD en secondes de degré.

La variation diurne dD en déclinaison ayant été considérée comme positive dans tous les calculs précédents où le Soleil est supposé aller du sud au nord, il faudra la prendre négativement lorsque le Soleil s'éloignera du pôle boréal. On affectera de même du signe négatif tang H et tang D pour l'hémisphère austral, ainsi que cot $15t$, si le

demi-intervalle t est plus grand que 6 heures. Dans ses *Nouvelles Tables d'aberration et de nutation,* de Zach a dressé des tables à simple entrée, pour abréger le calcul de la correction des hauteurs correspondantes : elles sont d'un usage facile; cependant celles de Delambre paraissent mériter la préférence, parce qu'elles donnent immédiatement les logarithmes des facteurs $\frac{dD}{360}$, $\frac{dD \tang D}{360}$ et $\frac{t}{\sin 15t}$, $\frac{t}{\tang 15t}$. L'une a pour argument la longitude du Soleil, et procure les deux premiers facteurs; l'autre a pour argument le demi-intervalle t des observations, et fournit les deux autres facteurs (voyez l'*Astronomie,* tome I, page 576). Néanmoins nous ne ferons ici aucun usage de ces Tables, parce que la correction du midi s'évalue avec la plus grande facilité par la formule même que nous venons de démontrer.

APPLICATIONS.

295. Les hauteurs correspondantes prises le 20 mars 1803 à Porto-Ferraio, dont la latitude $H = 42^\circ 49' 6''$, ayant été observées vers $8^h 51^m 52^s$ du matin et $2^h 57^m 38^s$ du soir, il s'est écoulé $6^h 5^m 46^s$ entre les époques moyennes du matin et du soir; c'est la valeur de $T' - T$.

Ainsi, le demi-intervalle $\frac{T'-T}{2}$ ou. . . . . . . $t = 3^h 2^m 53^s = 3^h,05$

Et comme ce jour-là le changement diurne en déclinaison était de $23'42'' = dD$, on a en secondes. . . . . . . $dD = 1422''$

On avait en outre à midi. . . . . $D'' = 0^\circ 25' 42'',6$

Et l'angle horaire. . . . . $15t = 45^\circ 43' 10''$.

Tels sont les éléments de la correction du midi ou de la formule suivante :

$$(3) \qquad \frac{dDt}{360}\left[\tang D'' \cot 15t - \frac{\tang H}{\sin(15t)}\right],$$

qu'on obtient d'ailleurs sur-le-champ en différenciant par rapport à P et à D l'équation (a) de l'art. précédent, et dans laquelle dD est positive,

parce que le Soleil se rapproche du pôle boréal, et tang D″ négative, parce que la déclinaison du Soleil est australe. Cela posé, on a

1er terme.	2e terme.
$\log dD = 3,15290$	
$\log t = 0,48430$	
$\text{c.}\log 360 = 7,44370$	
$1,08090$	$1,08090 -$
$\log\tan D = 7,87382 -$	$\log\tan H = 9,96689$
$\log\cot 15t = 9,98909$	$\text{c.}\log\sin(15t) = 0,14513$
$\log 1^{er}\text{ terme} = 8,94381 -$	$\log 2^{e}\text{ terme} = 1,19292 -$

$$1^{er}\text{ terme} = -\ 0^s 09$$
$$2^{e}\text{ terme} = -\ 15,59$$
$$\text{Correction du midi} = -\ 15,68$$

Ainsi, puisque l'heure trouvée par un milieu entre les temps des hauteurs correspondantes est (art. **293**). . . . . $11^h54^m44^s,83$
et que la correction. . . . . = $-\ 15,68$

l'instant du midi vrai était donné par la pendule, à. . . . . $11^h54^m29^s,15$
et par conséquent cette pendule était en retard ce jour-là sur le midi vrai, de. . . . . $0^h\ 5^m30^s,85$

Par des observations et des calculs tout pareils, nous trouvâmes que le 21 mars 1803, le midi vrai était arrivé à la pendule à. . . . . $11^h53^m51^s,7$
cette pendule retardait donc sur le midi vrai de. $6^m\ 8^s,3$

Enfin, le lendemain 22 mars, le midi vrai fut annoncé à la pendule à. . . . . $11^h53^m15^s,6$
donc la pendule retardait alors de . . . . $6^m44^s,4$

296. Il reste maintenant à déterminer la marche de la pendule par rapport au temps moyen. Or, en suivant le précepte de l'art. **242**, on trouve :

Pour le 20 mars 1803, à Porto-Ferraio, temps moyen au midi

vrai.	$0^h\ 7^m 53^s,9$
et comme la pendule marquait à midi vrai	11.54.29,2
il s'ensuit qu'elle retardait sur le temps moyen de. .	13.24,7
Pour le 21 mars, temps moyen au midi vrai. . . .	$0^h\ 7^m 35^s,8$
et comme la pendule marquait à midi vrai.	11.53.51,7
son retard sur le temps moyen était de.	13.44,1
Enfin, pour le 22 mars, temps moyen au midi vrai.	$0^h\ 7^m 17^s,6$
midi vrai à la pendule.	11.53.15,6
retard de la pendule.	14. 2,0

Il résulte de ces observations que, du 20 au 21 mars, la pendule retardait sur le temps moyen de $13^m 44^s,1 - 13^m 24^s,7 = 19^s,4$, dans l'intervalle de deux midis vrais consécutifs, c'est-à-dire dans l'espace de $23^h 59^m 41^s,9$ *temps moyen;* par conséquent le retard dans un jour moyen était de $19^s,42$. Mais du 21 au 22 mars, ce retard ne s'est trouvé que de $17^s,9$. Si nous pouvions considérer nos observations comme très-exactes, nous en conclurions que le mouvement de la pendule aurait eu une petite irrégularité de $1^s,5$ d'un jour à l'autre.

297. Pour déterminer avec précision la marche de la pendule, il est important de faire une longue suite d'observations de ce genre et de dresser un tableau de cette marche, ainsi qu'il suit :

MARS 1803.	TEMPS de la pendule à midi vrai.	ÉQUATION du temps. +	CORRECTION ou équation de la pendule. +	RETARD diurne de la pendule.
20	$11^h 54^m 29^s 2$	$7^m 53^s 9$	$13^m 24^s 7$	$19^s 42$
21	11.53.51,7	7.35,8	13.44,1	17,90
22	11.53.15,6	7.17,6	14. 2,0	
....	....	....	....	....

On entend ici par *équation* de la pendule, ce qu'il faut ajouter au temps qu'elle marque à midi vrai pour avoir le temps moyen.

Nous aurions pu régler exactement notre pendule sur le temps moyen, en relevant tant soit peu la lentille pour en accélérer les oscillations. On parvient à ce but en tournant une vis qui se trouve au-dessus de la suspension. Quand cette vis traverse un petit cadran, et qu'elle porte une aiguille, on sait, après quelques essais, à combien de parties du cadran répond un certain nombre de secondes d'accélération; on peut donc profiter de cette connaissance pour régler plus vite la pendule.

Les bonnes horloges astronomiques conservent un mouvement bien régulier, quelle que soit la température à laquelle on les expose. Cet avantage résulte de ce que la lentille est très-pesante et qu'elle est soutenue par des verges de compensation composées de deux métaux dont les densités sont différentes. Ces verges sont disposées entre elles de manière que quand l'un des métaux tend à éloigner la lentille du point de suspension, l'autre métal la rapproche au contraire d'une quantité équivalente. Néanmoins, il est indispensable de renfermer la pendule dans une cage vitrée, et prudent de la placer dans un lieu où la température varie peu, surtout de l'assujettir à un mur épais isolé de la voie publique.

La marche des garde-temps ou chronomètres particulièrement en usage dans la marine, est aussi en grande partie dégagée de l'influence de la température, au moyen d'un compensateur qui la régularise.

298. Résolvons maintenant le problème suivant, qui trouve de fréquentes applications.

Le 21 mars 1803, à Porto-Ferrajo, on a observé un phénomène à $5^h 10^m 20^s$ du soir en temps de la pendule; on demande le temps moyen de l'observation.

Si la pendule marquait exactement 24^h en un jour moyen, il suffirait d'ajouter à $5^h 10^m 20^s$ son retard absolu du 21 mars ou son *équation* $13^m 44^s,1$, et l'on aurait, pour le temps moyen de l'observation, $5^h 24^m 4^s,1$; mais le retard diurne de la pendule étant de $17^s,9 = \rho$, il faut déterminer son retard pour l'intervalle qui s'est écoulé depuis midi jusqu'à l'heure du phénomène, c'est-à-dire pour $17^h 10^m 20^s - 11^h 53^m 51^s,7 = 5^h 16^m 28^s,3 = 5^h,26$.

On aura donc cette proportion :

$$24^h - \rho = 23^h,98 : 5^h,26 :: 17^s,9 : x = 3^s,92 ;$$

c'est ce qu'il faut ôter du temps moyen approché. . . . $5^h 24^m 4^s,1$;
ainsi, temps moyen cherché. . . . . $= 5^h 24^m 0^s,18$.

Pour connaître le temps vrai de la même observation, évaluons l'équation du temps.

D'abord, d'après le tableau précédent, le 21 à midi vrai à Porto-Ferraio, l'équation du temps. . . . . $= 0^h 7^m 35^s,8$
le 22 *idem* elle était. . . . . 0.7.17 ,6
variation en 24 heures solaires vraies. . . . . $\nu =$ 18 ,2

Ensuite, comme le temps moyen de l'observation, dans le lieu où elle s'est faite, était $5^h 24^m 0^s,18 = 5^h,4$, on aura, à cause que l'équation du temps diminue,

$$24^h - \nu = 23^h,98 : 5^h,4 :: 18^s,2 : x = -4^s,09$$

de là, équation du temps le 21. . . . . $0^h\ 7^m 35\ ,80$
équation du temps pour le moment de l'observation. . $-0.\ 7.31\ ,71$

(Soustractive, parce que le temps moyen est en avance sur le temps vrai).

Temps moyen de l'observation. . . . . $5^h 24^m\ 0^s,18$

Temps vrai de l'observation. . . . . 5.16.28 ,47

299. Afin qu'on puisse se familiariser avec la méthode des hauteurs correspondantes, et voir d'un coup d'œil tous les éléments du calcul de la correction du midi approché, nous extrairons du Registre des observations que nous fîmes en 1811 à l'École d'Application des ingénieurs-géographes militaires, le tableau suivant :

Observations correspondantes du Soleil.

Le 18 février 1811, vers 9^h du matin et 3^h du soir,

Latitude.... H $= 48° 51' 40''$, Observation

Longit. (ouest) $= 4^s$ (en temps). du bord inférieur.

Le chronomètre de Berthoud dont on s'est servi, donne 5 battements par 2^s.

NOMBRE des observations.	TEMPS du chronomètre.		MIDIS approchés.	ARCS parcourus.	REMARQUES.
1	Matin.	$8^h 34^m 50^s 4$	....	82^g 1	*Matin.*
	Soir..	14.55. 2			Barom. $= 28^p,208$.
		22.89.52,4	$11^h 44^m 56^s,2$		Therm. de Réaumur $= + 6°$.
2	M.	8.36.16,8	....	81,9	
	S.	14.53.36,8			*Soir.*
		9.53,6	11.44.56,8		
3	M.	8.37.47,0	....	81,7	Barom. $= 28^p,16$
	S.	14.52. 5,6			Therm. $= + 9°$ (R).
		9.52,6	11.44.56,3		Beau temps.
4	M.	8.39.16,4	....	81,5	
	S.	14.50.38,8			
		9.55,2	11.44.57,6		
5	M.	8.40.45,4	....	81,3	
	S.	14.49.11,6			
		9.57,0	11.44.58,5		
6	M.	8.42.15,2	....	81,1	
	S.	14.47.38,8			
		9.54,0	11.44.57,0		
7	M.	8.43.45,0	....	80,9	
	S.	2.46. 9,6			
		9.54,6	14.44.57,3		
8	M.	8.45.11,6	....	80,7	
	S.	14.44.38,8			
		9.50,4	11.44.55,2		

Moyen. de tous les midis approch. $=$ 11.44.55,86 $=$ temps approch. du passage.

On voit par ce tableau que l'époque moyenne des observations du matin est . . . . $T = 8^h 40^m$
celle des observations du soir. . . . . $T' = 14.50.$
Ainsi temps écoulé entre ces deux époques
ou. $T' - T = 6^h 10^m$
demi-intervalle. . . . . $t = 3.\ 5 = 3^h,08.$
angle horaire. . . . . $15t = 46° 15'.$

Et la *Connaissance des Temps* donne pour la déclinaison australe du Soleil à midi. $D'' = 11°50'6''$
variation diurne. $dD = 1271''.$

On a donc tout ce qu'il faut pour calculer la correction du midi, par la formule (3); on trouvera, en observant la règle des signes énoncée à l'article **294**,

correction du midi . . . . = $-\ 19^s 44$
mais
midi approché . . . . = $11^h 44^m 55,80$
donc
heure vraie du passage. . . . . = $11.44.36,36.$

300. Dans l'explication de la méthode des hauteurs correspondantes, nous avons tacitement supposé que les réfractions à hauteurs apparentes égales, pour les époques du matin et du soir, étaient elles-mêmes égales, quoique cela n'ait pas toujours lieu. Par exemple, dans les observations rapportées ci-dessus, le baromètre et le thermomètre annoncent que l'état de l'atmosphère n'était pas précisément le même après comme avant midi. Les astronomes ont néanmoins rarement égard à l'effet que peut produire sur la correction du midi une petite variation dans la réfraction; mais si l'on voulait calculer cette correction en toute rigueur, il n'est pas difficile de s'assurer que l'on aurait, en faisant varier la distance zénithale apparente N (art. **294**),

$$\text{cor. du midi} = \frac{dN \sin N}{30. \cos H \cos D \sin(15t)} + \frac{dDt}{360}\left(\text{tang } D'' \cot 15t - \frac{\text{tang } H}{\sin 15t}\right), \quad (4)$$

formule dans laquelle dN doit être exprimée en secondes de degré.

Soient donc r la réfraction du matin, r' celle du soir supposée plus faible ; on aura $dN = r - r'$; par conséquent, dans ce cas, dN sera positive. On conçoit bien en effet que l'angle horaire du soir a été plus petit que celui du matin, si la réfraction s'est trouvée plus forte à cette première époque qu'à la seconde.

DEUXIÈME MÉTHODE.

Par les hauteurs absolues du Soleil.

301. Ce n'est ordinairement que quand le ciel est sans nuages, que l'on est sûr du succès de la méthode précédente ; mais lorsque le temps est variable, il vaut mieux régler sa pendule par les hauteurs absolues. Cette méthode consiste à prendre plusieurs distances zénithales du Soleil avant ou après midi, pour en déduire l'heure de l'observation, et par suite le retard ou l'avance de la pendule ; mais il faut alors connaître assez exactement la latitude du lieu de l'observation.

Supposons, par exemple, qu'après six répétitions faites le premier avril 1804, à 43°17′ de latitude nord, et par 40°15′ de longitude occidentale, l'arc parcouru par la lunette supérieure du cercle soit de 462^g ; le sixième de cet arc $= 77^g$ sera la mesure de la distance apparente du centre du Soleil au zénith. Supposons de plus, que le milieu entre les six temps donnés par la pendule soit de $4^h 12^m 10^s$.

On sait que la distance vraie d'un astre au zénith est égale à sa distance apparente, plus la réfraction, moins la parallaxe (art. **256**). Or, la distance apparente du centre du Soleil au zénith, réduite en degrés sexagésimaux, est de. . . . . 69°18′ 0″

La réfraction moyenne corrigée de la température, par le procédé de l'article **254**, est supposée de . . . . 2′30″,25 }
La parallaxe du Soleil, pour le premier avril, et à 20° ½ de hauteur, est (Tab. X) — 8,2 } + 0. 2.22 ,05

Donc la distance vraie du centre du Soleil au zénith. . . . . = 69°20′22″,05

On calculera ensuite, par la méthode de l'art. **259**, la déclinaison du Soleil pour le jour, l'heure et le lieu de l'observation.

Déclinaison du Soleil pour le premier avril 1804 à midi,
à Paris. . . . . $4^{\circ}34'25''$
Déclinaison pour le 2. $4.57.30$

Changement en déclinaison, pour 24 heures . . . . . . $0^{h}23^{m}15^{s}$

Le 1er avril, à $4^{h}12^{m}10^{s}$ du soir, par $40^{\circ}15'$ de longitude occidentale, répond au 1er avril à $6^{h}53^{m}10^{s}$ comptées à Paris; ainsi la partie proportionnelle en déclinaison pour ce temps. . . . . = $6'40'',2$

Ajoutant la déclinaison du 1er avril, on aura, pour la déclinaison boréale cherchée. . . . . $4^{\circ}41'\ 5'',2$

Cela posé, dans le triangle sphérique PZS (*fig.* 16) on connaît, 1° ZP, ou le complément de la latitude; 2° ZS, ou la distance vraie du centre du Soleil au zénith; 3° enfin PS, distance de l'astre au pôle arctique, ou le complément de sa déclinaison.

L'angle horaire P s'obtiendra donc par la formule de l'art. **74** (*voyez* d'ailleurs l'article suivant).

Calcul de l'angle horaire.

Distance vraie du centre du Soleil au zénith =	$69^{\circ}20'22''05$		
Complément de la latitude. . . . . =	46.43. 0,00	c.sin =	0,1378852
Distance polaire de l'astre. . . . . =	85.18.54,80	c.sin =	0,0014534
Somme. . . .	$201^{\circ}22'16''85$		
$\frac{1}{2}$ somme. . .	100.41. 8,42		
$\frac{1}{2}$ som. — compl. latitude.	53.38. 8,42	. . sin =	9,9077869
$\frac{1}{2}$ som. — compl. déclinaison.	15.22.13,62	. . sin =	9,4233423
			19,4704678
		log sin $\frac{1}{2}$ P =	9,7352339
		ainsi $\frac{1}{2}$ P =	$32^{\circ}55'30'',5$.

L'angle horaire ZPS est donc de $65^{\circ}51'1'' = 4^{h}23^{m}24^{s},06$ temps vrai.
mais la pendule marquait. . . . . $4.12.10$
donc au moment de l'observation, elle retardait sur le Soleil, de. . . . . $0^{h}11^{m}24^{s},06$

Maintenant, voici le calcul qu'il faut effectuer pour connaître la marche de la pendule par rapport au temps moyen.

L'heure vraie ou apparente pour le méridien et le moment de l'observation, était. . . . . $4^h 23^m 24^s,06$

Ajoutant la différence des méridiens. 2.41

on a l'heure vraie que l'on comptait à Paris au même instant, le 1er avril 1804. . . . . $7^h\ 4^m 24^s,06$

Le temps moy. au midi vrai le 1er avril 1804 à Paris $= 0^h\ 3^m 57^s,\ 2$

Le temps moyen, *idem*, pour le 2. . . . . $= 0.\ 3.\ 38\ ,\ 8$

Différence en 24 heures. . . $-\ 18^s,\ 4$

Ainsi, pour le 1er avril 1804, à $7^h 4^m 24^s,06$ du soir, l'équation du temps est. . . . . $0^h\ 3^m 51^s,80$

Ajoutant l'heure de l'observation, temps vrai. . . . $4.23.\ 24\ ,06$

on a pour le temps moyen. . . . . $4^h 27^m 15^s,86$

(Si cette somme surpassait 12^h, on en ôterait 12 pour avoir le temps moyen.)

Mais la pendule marquait.. . . . . $4.12.\ 10$

donc elle retardait sur le temps moyen, de. . . . . . . $0^h 15^m\ 5^s,86$

Après avoir pareillement calculé l'heure vraie, à l'aide des hauteurs absolues du Soleil prises dans le même lieu à une autre époque, on déterminera, comme ci-dessus, l'avance ou le retard de la pendule, par rapport au temps moyen; et de là on conclura aisément l'avance ou le retard, dans l'intervalle de ces mêmes observations. Divisant ensuite ce dernier résultat par le nombre des heures moyennes qui se sont écoulées depuis une époque jusqu'à l'autre, le quotient sera la quantité dont la pendule avance ou retarde par heure, sur le temps moyen. On voit présentement ce qu'il faut faire pour régler une pendule sur le moyen mouvement du Soleil, afin de la rendre utile aux usages de la société; mais en Astronomie, il n'est pas absolument nécessaire qu'elle soit réglée ainsi; il suffit au contraire que l'on sache exactement de combien elle avance ou retarde sur le temps apparent, ou sur le temps moyen, ou enfin sur le temps sidéral.

302. Quoique le calcul précédent puisse suffire pour fixer le lecteur

dans la pratique de la méthode exposée, voici cependant le tableau complet des observations et calculs des hauteurs absolues du Soleil, pour le 14 et le 15 décembre 1813. Ces hauteurs, ou plutôt ces distances zénithales ont été prises à l'Observatoire du Dépôt de la Guerre, avec un cercle à niveau mobile; et pour mesurer le temps on s'est servi d'une pendule de Berthoud.

DISTANCES ZÉNITHALES ABSOLUES DU SOLEIL, POUR DÉTERMINER LE TEMPS.					
Le 14 décembre 1813 après midi, observation du centre.			Le 15 décembre 1813 après midi, observation du centre.		
NOMBRE des observations.	ARC PARCOURU sur le limbe.	TEMPS de la pendule.	NOMBRE des observations.	ARC PARCOURU sur le limbe.	TEMPS de la pendule.
1	départ. 0^g	$2^h 11^m 48^s$	1	départ. $332^g,820$	$2^h 58^m 30^s$
2	....	13.14	2	....	3. 0. 29
3	....	14.31,5	3	....	1. 42
4	$348^g,278$	15 39	4	....	2. 58
		Les nuages ont interrompu la série.	5	....	5. 13
			6	$887^g,260$	6. 27
Barom. $27^p 11^l \frac{9}{10}$ Therm. $+2^o,66$ R	$348^g,278$ Arc moyen $=87^g,0695$ $=78^o 24' 15'',18$	Som. $15^m 12^s,5$ Époque moyenne $=2^h 13^m 48^s,1$ ou temps astronomique.	Barom. 28^p Therm. $+3^o$ R	$544^g,440$ Arc moyen $=92^g,406666$ $=83^o 9' 57'',6$	Som. $18^h 15^m 20^s$ Époq. moyenne $=3^h 2^m 33^s,33$ ou temps astronomique.
Latitude $H = 48^o 51' 40''$.			Longitude ouest $M = 4^s$ en temps.		

Nota. Lorsqu'on observe constamment le même bord du Soleil, il faut tenir compte de son demi-diamètre, dont on trouve la valeur dans la *Connaissance des Temps*, livre auquel nous allons avoir recours pour calculer la réfraction actuelle.

Calcul de l'observation du 14

facteur barométrique =	0,9965
facteur thermométr. =	1,026
produit....	1,0224
réfraction moyenne	276",38
produit ou réfr. vraie =	+ 4'42"57
dist. zénit. appar. δ =	78°21'.45,18
demi-diamètre du ⊙ =	0
somme....	78°26'27"75
parallaxe de haut...	— 8,46
dist. zénith. vraie du centre....... N =	78°26'19"29
$\frac{1}{2}$S =	116°24'25"5
— C =	41. 8.20,0
R =	75.16. 5,5

décl. du ⊙ le 14 déc. à midi d =	23°13'53"
idem.....le 15.....*idem* d' =	23.17.15
variation en 24h... u =	3'22"
24h : temps astr. ±M :: u : x =	18",77
déclinaison du ⊙..... d =	23°13'53,00
déclin. actuelle du ⊙.. D =	23.14.11,77
dist. du ⊙ au pôle.... Δ =	113.14.11,77
compl. de la lat. H ou C =	41. 8.20,00
distance zénithale vraie. N =	78.26.19,29
somme..... S =	232.48.51,06
$\frac{1}{2}$S =	116°24'25",5
— Δ =	113.14.11,8
R' =	3.10.13,7

Évaluant maintenant la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin R \sin R'}{\sin C \sin \Delta}},$$

on a

$$\begin{aligned}
\log \sin R &= 9,9854834\\
\log \sin R' &= 8,7427800\\
\text{c.} \log \sin C &= 0,1818490\\
\text{c.} \log \sin \Delta &= 0,0367396\\
\text{somme ou } \log \sin^2 \tfrac{1}{2} P &= 18,9468520\\
\text{demi-somme ou } \log \sin \tfrac{1}{2} P &= 9,4734260\,;\ \text{de là } \tfrac{1}{2} P = 17^\circ 18' 18'',02\\
&\text{angle horaire } P = 34.36.36,04\\
&\text{en temps. . . } T = 2^h 18^m 26^s,4
\end{aligned}$$

L'angle horaire est ici le temps astronomique, parce que l'observation est faite après midi. Dans le cas contraire, le complément de cet angle à 24h serait le temps astronomique.

Cherchons maintenant le *temps moyen* de l'observation.

Équation du temps le 14 décembre à midi	Q =	$0^h\ 5^m\ 5^s,3$
idem. . . . . . . le 15.	Q′ =	4.36,3
Variation diurne.	v =	29,0
$24^h : T \pm M :: v :$.	y =	$0^h\ 0^m\ 2^s,79$
Équation du temps.	Q =	0. 5. 5,30
Équation du temps actuelle.	q =	$0^h\ 5^m\ 2^s,51$
Temps vrai de l'observation.	T =	2.18.26,40
TEMPS MOYEN de l'observation.		$2^h 13^m 23^s,89$
Heure de la pendule.		2.13.48,10
Correction ou *avance absolue* de la pendule	=	− 24,21

Calculant de la même manière l'observation du 15, on trouve

Temps vrai de l'observation.	$3^h 6^m 41^s,7$
Équation du temps.	− 4. 32,5
TEMPS MOYEN.	3.2. 9,2
Heure de la pendule.	3.2. 33,3
Corr., ou *avance absolue* de la pendule. .	$-24^s,1$

Dans l'intervalle des deux observations, qui est de $24^h 49^m$ temps moyen, la pendule n'a retardé que de $0^s,1$; ainsi son retard diurne, ou en 24^h solaires moyennes, était seulement de $0^s,09$. Une quantité si petite, et dont on ne peut répondre, permet de regarder cette pendule comme bien réglée.

Il résulte de là, que puisque le temps moyen au midi

vrai le 15. . . . . =	$11^h 55^m 23^s,7$
et que l'avance absolue de la pendule. . . . . =	24,1
le midi vrai à cette pendule eut lieu le même jour à. . .	11.55.47,8
Pareillement le midi vrai le 14 fut annoncé à. . . .	11.55.18,9
Ainsi l'avance de la pendule en 24^h solaires vraies. . =	$29^s,1$

C'est ce qu'on nomme *avance relative*.

TROISIÈME MÉTHODE.

Par l'observation des étoiles.

303. La marche de l'horloge, relativement au premier mobile, ou aux étoiles dont les retours aux méridiens sont égaux, se détermine de la même manière que par rapport au Soleil. Si, par exemple, on observe, à la même hauteur sur l'horizon, une étoile fixe, avant et après son passage au méridien, le milieu entre les temps des observations correspondantes sera l'heure que l'horloge marquait à l'instant du passage. Si le lendemain on observe encore cette étoile, on saura à quelle heure elle se sera retrouvée dans le méridien; par conséquent on connaîtra si l'horloge suit exactement le mouvement diurne du ciel, ou de combien elle avance ou retarde en 24 heures sidérales. Dans ce dernier cas, on abaissera ou l'on élèvera la lentille du pendule, afin de faire retarder ou avancer l'horloge; et l'on s'assurera, par d'autres hauteurs correspondantes, prises à différentes époques, s'il est encore nécessaire de changer la durée des oscillations du pendule.

Il convient, pour faire usage de la méthode d'observation actuelle, de choisir une des étoiles qui passent au méridien pendant la nuit, et c'est de quoi l'on s'assure en calculant l'heure approchée de ce passage, comme nous l'avons enseigné (art. **245**). Il faut aussi, pour que l'étoile paraisse animée d'un mouvement fort sensible, qu'elle soit observée loin du méridien et dans le voisinage du premier vertical; pourvu toutefois qu'elle soit un peu élevée au-dessus de l'horizon, afin d'éviter les erreurs qui pourraient résulter des variations de la réfraction dans les basses régions de l'atmosphère. Enfin, s'il arrivait que l'état de l'atmosphère fût différent, aux deux époques des observations correspondantes, il serait nécessaire de faire, à l'heure du passage donné par la pendule, la correction dépendante du baromètre et du thermomètre (art. **300**).

On règle encore une horloge sur le temps sidéral, par la méthode des hauteurs absolues d'une étoile : pour cet effet, l'on calcule, comme il est dit à l'art. **301**, l'angle horaire de l'étoile, à l'aide de sa déclinai-

son apparente, de sa distance au zénith et de la latitude du lieu supposée bien connue; mais ici la distance vraie au zénith est seulement égale à la distance apparente, plus la réfraction, puisque la parallaxe est sensiblement nulle.

L'angle horaire de l'étoile étant trouvé, on le convertira en temps, à raison de 15° par heure, et le résultat exprimera des heures sidérales : on saura donc sur-le-champ de combien l'horloge avance ou retarde sur l'étoile, au moment de l'observation.

Supposons, par exemple, qu'un certain jour avant le passage de l'étoile au méridien, l'angle horaire réduit en temps ait donné $2^h 14^m 24^s$, au moment où la pendule marquait $3^h 15^m 30^s$: cette pendule avançait donc, sur l'étoile, de $1^h 1^m 6^s$. Supposons encore que le lendemain, après le retour de la même étoile au méridien, l'angle horaire ait été trouvé de $4^h 8^m 0^s$, lorsque la pendule marquait $5^h 9^m$; donc au moment de la seconde observation la pendule n'était en avance que de $1^h 1^m$ sur le temps sidéral; donc elle retardait de 6^s dans l'intervalle de $30^h 22^m 24^s$, ou de $\frac{2}{10}$ de seconde par heure.

304. Pour achever d'éclaircir cette méthode, nous allons rapporter le calcul des observations de distances zénithales absolues de *Sirius* ou α du grand Chien, faites au Dépôt de la Guerre le 18 février 1811, vers $6^h \frac{1}{2}$ du soir avant le passage. Toutefois ces observations ne doivent pas être regardées comme très-concluantes, parce que l'étoile était trop près du méridien.

TEMPS du chronomètre.	ANGLE multiple.	ANGLE simple.	ÉLÉMENTS du calcul de l'angle horaire.
$6^h\,25^m 40^s\,18^{bat}$.			Baromètre.. = $28^{po}\,2^{lig}$.
26.30.18			Thermomèt. = $+4°$ (R.),
27.40.10			Latitude H.. = $48°51'43''$,
28.30.14			Longit. ouest = 4^s (en temps).
29.10.17	$771^g,36367$	$77^g,136367$ = $69°25'21'',8$ = Z	Position moyenne de l'étoile au 1er janvier 1811.
29.50.18			Æ = $6^h 36^m 49^s,33$ selon Maskeline,
30.20.19			D = $16°27'53'',5$ selon Piazzi,
31.30. 6			☉ = $10^s\,29°\,0'$,
32. 0.27			☊ = 5.28.0.
32.40.12			
$6^h 29^m 29^s,36$ = époque moyenne. Nota. 5 battements du chronomètre font 2^s.			

Par les Tables de M. Largeteau (art. **281**), on a

Asc. dr. moyenne	$6^h 36^m 49^s,33$	Décl. moyenne	$16°27'53'',5$
Variat. (18 févr.)	+ 0,35	Variation. . .	25,6
Aberration. . . .	+ 6,14	Aberration. . .	34,4
Nutation.	+ 4,98	Nutation. . . .	19,1
Constante.	− 10,00	Constante. . .	− 1.0
Æ apparente. . .	= $6^h 36^m 50^s,80$	D apparente.	= $16°28'12'',6$ (A)
OU TEMPS SIDÉRAL du passage au méridien.		Dist. polaire apparente	$\Delta = 106°28'12'',6$.

Type du calcul de l'angle horaire P.

distance zénith. observée Z =	$69°25'21'',8$	
réfraction	+ 2.37,4	
distance zénithale vraie N =	$69°27'59'',2$	
distance polaire Δ =	106.28.12,6	
colatitude 90 − H =	41. 8.17,0	
somme. . . .	217. 4.28,8	
$\frac{1}{2}$ somme. . . .	108.32.14,4. . .	108.32.14,4
	− 106.28.12,6	− 41. 8.17,0
R =	$2°\,4'\,1'',8$, R' =	67.23.57,4.

$\sin R =$	8,5571207	
$\sin R' =$	9,9652983	
$c.\sin\Delta =$	0,0181961	
$c.\sin(90-H) =$	0,1818562	
somme. . .	18,7224713	
$\frac{1}{2}$ somme. . .	$9,3612356 = \log\sin\frac{1}{2}P$;	
de là $\frac{1}{2}P =$		$13°16'54'',2$
angle horaire $P =$		$26.33.48,4$
angle horaire en temps $=$		$-\ 1^h46^m15^s,23$
asc. dr. apparente $=$		$+\ 6.36.50,80$
TEMPS SIDÉRAL de l'observation		$4^h50^m35^s,57$
temps de la pendule		$6.29.29,36$
avance absolue $=$		$1^h38^m53^s,79$

Au moment de l'observation,

distance de l'équinoxe au ⊙	$+\ 1^h54^m23^s,65$
temps sidéral	$+\ 4.50.35,57$
TEMPS VRAI	$6.44.59,22$
temps de la pendule	$6.29.29,36$
retard absolu	$0.15.29,86.$

Comme maintenant les tables de la *Connaissance des Temps* ne donnent plus la distance de l'équinoxe à midi vrai, il faut alors convertir, par le second procédé de l'art. **243**, le temps sidéral en temps moyen, puis ajouter avec son signe l'équation du temps pour avoir le temps vrai.

305. Lorsqu'une pendule est exactement réglée sur le temps sidéral elle marque $0^h0^m0^s$ à l'instant où le point équinoxial du printemps entre dans le méridien, ou, ce qui est de même, elle donne en temps, l'ascension droite apparente de tout astre au moment où il est à son point culminant, c'est-à-dire à sa plus grande élévation au-dessus de l'horizon.

Il résulte de là un moyen très-simple de faire marquer à la pendule réglée sur les fixes, $0^h0^m0^s$, lorsque l'équinoxe vernal passe au

méridien; car si, avec une *lunette méridienne*, l'on observe une étoile lors de sa culmination, et que l'on mette en même temps le balancier de la pendule en mouvement, les aiguilles du cadran étant préalablement fixées sur l'heure, la minute et la seconde données par l'ascension droite de l'étoile; cette pendule sera réglée comme on le désirait.

Supposons maintenant que le 15 février 1840 une pendule réglée sur le temps sidéral marquait à midi vrai $21^h52^m48^s,5$; on demande son avance ou son retard à cette époque.

D'après la *Connaissance des Temps* de cette année-là, le temps moyen au midi vrai $= 0^h14^m30^s$, c'est-à-dire que le Soleil moyen précédait le Soleil vrai; ainsi quand le premier est entré dans le méridien, le second n'y est arrivé que 14^m30^s plus tard, et pendant cette courte durée l'ascension droite du ☉ vrai à midi moyen s'est accrue de $2^s,35$, puisque sa variation diurne est de $3^m53^s,39$ ou sa variation horaire de $9^s,72$. On a donc

temps de la pendule sidérale à midi vrai. . .	$21^h52^m48^s,50$
asc. dr. ☉ vr. *idem*, $21^h52^m45^s,21 + 2^s,35$ =	21.52.47,56
Avance de la pendule sur le temps sidéral.	0,94

A défaut de lunette méridienne pour savoir l'heure, on aura recours à la méthode des hauteurs absolues ou correspondantes du Soleil ou des étoiles. Supposons, dans cette circonstance, que le midi vrai ou apparent arrive un certain jour à $10^h41^m30^s$ en temps de l'horloge réglée sur les fixes, et que l'ascension droite du Soleil, à cette époque, soit de $6^h20^m10^s$; alors l'horloge aura marqué au moment du midi, $4^h21^m20^s$ de plus que l'ascension droite du Soleil. Pour la retarder de cette quantité, on pourra faire marcher un *compteur* (*) d'accord avec elle; ensuite, l'on comptera les secondes qui s'écoulent du moment où l'on arrêtera le pendule de l'horloge, et l'on fera rétrograder les aiguilles de $4^h19^m20^s$ seulement, afin d'avoir tout le temps de faire cette disposition; enfin, à l'instant où les 120^s ôtées de $4^h21^m20^s$ expireront

(*) Le *compteur* est une petite pendule qui sonne et marque les secondes seulement; il est surtout utile quand on est obligé de faire des observations astronomiques un peu loin de l'horloge.

sur le compteur, on remettra le pendule en mouvement : par ce moyen la présence du point équinoxial au milieu du ciel, sera, à l'avenir, annoncée par l'horloge à $0^h 0^m 0^s$, ou, ce qui est de même, à 12^h. Néanmoins on ne pourra se dispenser de vérifier de nouveau la marche de l'horloge, lorsqu'il s'agira, par la suite, de faire des observations importantes; d'abord parce que l'ascension droite apparente des étoiles change peu à peu, en vertu du mouvement des équinoxes sur l'écliptique, de la nutation et de l'aberration (art. **34** et suivants); ensuite, parce que la marche de l'horloge pourrait avoir été altérée par quelques causes physiques qui ne seraient point décélées, ou dont il serait impossible d'évaluer les effets.

Les opérations précédentes peuvent être récapitulées et abrégées ainsi qu'il suit :

1°. Pour régler une pendule sur le temps sidéral par le Soleil, prenez des hauteurs absolues du Soleil trois ou quatre heures avant ou après midi; calculez l'angle horaire (art. **301**); cherchez dans la *Connaissance des Temps* l'ascension droite du Soleil pour l'instant de vos observations; alors le temps sidéral sera, en désignant par Æ l'ascension droite du Soleil réduit en temps,

$$(Æ \odot \mp P),$$

P étant l'angle horaire compté de midi.

Soit T le temps de la pendule pour l'instant de l'observation,

$$(Æ \odot \mp P) - T$$

sera la correction de la pendule. Si l'observation est faite avant midi, le temps sidéral. . . . . $= (Æ \odot - P)$
et après midi, ce temps. . . . . $= (Æ \odot + P)$.

En répétant les mêmes opérations plusieurs jours de suite, vous saurez si la marche de la pendule est trop lente ou trop rapide.

2°. Par les étoiles; prenez des hauteurs d'une étoile, et calculez l'angle horaire comme ci-dessus, après avoir cherché la déclinaison apparente de l'étoile par le procédé de l'art **281**.

Soient toujours P l'angle horaire trouvé, et Æ l'ascension droite

apparente de l'étoile, pour le jour de l'observation, art. **281**, ou, ce qui est de même, l'heure sidérale de son passage au méridien. Cela posé, si les hauteurs ont été prises à l'orient, le temps sidéral $= (Æ\star - P)$.

Si au contraire elles ont été prises à l'occident, le temps sidéral. . . . . $= (Æ\star + P)$.

Soit T le temps de la pendule,

$$(Æ\star \mp P) - T$$

sera ce qu'il faut ajouter au temps T pour avoir le temps sidéral.

Ces opérations, faites plusieurs jours de suite, montreront si la marche de la pendule est trop lente ou trop rapide; et il est évident que, par cette méthode, comme par la précédente, le mouvement de la pendule est comparé à celui du point équinoxial.

Si dans un observatoire stable on observe à la lunette méridienne, le Soleil à midi vrai, en tenant compte de l'heure à la pendule sidérale, et qu'on veuille régler un chronomètre sur le temps moyen, on opérera ainsi qu'il suit :

Le 16 octobre 1842, lors de la comparaison des deux instruments, le chronomètre marquait $10^h 46^m 35^s$, et la pendule sidérale indiquait. . . . . $12^h 39^m 25^s,53$

A midi vrai cette pendule marquait. .	13.38. 15 ,53	retard $5^s,05$
Temps sidéral écoulé jusqu'à midi vr.	$58^m 50^s,00$	
Correction, d'après la table IV. . . .	$-$ 9 ,64	
Temps moyen écoulé jusqu'à midi vrai	$- 0^h 58^m 40^s,36$	
Temps moyen à midi vrai.	$+$11.45. 40 ,83	
Temps moyen lors de la comparaison	$10^h 47^m 0^s,47$	
Mais le chronomètre marquait alors. .	10.46. 35 ,00	
Donc il retardait sur le temps moy. de	$0^m 25^s,47$	

Nous supposons la pendule sidérale exactement réglée; autrement il faudrait avoir égard à sa marche diurne dans l'intervalle de midi à l'heure de sa comparaison avec le chronomètre, ce qui ne présente aucune difficulté. Nous supposons en outre que cette comparaison a été faite avant midi, et voilà pourquoi le temps moyen écoulé est sous-

tractif : il serait évidemment additif si la comparaison dont il s'agit était faite après midi.

Remarques sur la méthode des hauteurs absolues.

306. Il n'est pas inutile d'apprécier le degré d'exactitude que l'on peut obtenir dans le calcul du temps absolu. Or, dans le triangle sphérique ZPS (*fig.* 16), on a

$$\cos ZS = \cos ZP \cos SP + \sin ZP \sin SP \cos P,$$

ou, d'après la notation adoptée dans l'art. **302**,

$$\cos N = \cos C \cos \Delta + \sin C \sin \Delta \cos P.$$

Différenciant, en faisant seulement varier la distance zénithale N et l'angle horaire P, il vient

$$dP = \frac{dN \sin N}{\sin C \sin \Delta \sin P};$$

mais le même triangle donne, en désignant par A l'azimut de l'astre,

$$\frac{\sin N}{\sin P} = \frac{\sin \Delta}{\sin A};$$

donc

$$dP = \frac{dN}{\sin C \sin A}.$$

Il résulte de là que, pour une même valeur de dN, la variation dP d'angle horaire sera d'autant plus petite que sin A sera plus grand. Mais cette dernière quantité atteint son maximum quand l'azimut $A = 90°$. Par conséquent, l'instant le plus favorable à la détermination de l'angle horaire a lieu lorsque l'astre est dans le premier vertical, et qu'il a d'ailleurs un mouvement rapide. Il n'est pas toujours possible de profiter de cet instant ; mais en choisissant un astre qui ait une petite déclinaison et qui soit éloigné d'environ 45° du méridien, il donnera l'heure avec précision.

La formule différentielle précédente, en l'écrivant ainsi,

$$dN = dP \sin A \sin C,$$

donne en outre la démonstration du principe sur lequel est fondée la méthode d'observation actuelle, savoir : que les hauteurs d'un astre prises loin du méridien croissent proportionnellement au temps, et qu'ainsi la moyenne de ces hauteurs correspond exactement à l'époque moyenne. En effet, lorsque sin A diffère peu de l'unité et que la série est de courte durée, comme de 8 à 10 minutes, la variation qu'il éprouve n'a pas d'influence sensible sur la valeur du facteur sin A sin C ; ou, ce qui est de même, la variation en hauteur dN croît proportionnellement au temps dP. Mais lorsque sin A est très-petit, la valeur de dN augmente comme le carré du temps, puisque, dans ce cas, A est proportionnel à P. En général, pour connaître la durée qu'on pourra donner à une série de hauteurs ou de distances zénithales d'un astre, on calculera d'abord par la formule rigoureuse

$$\cos P = \frac{\cos N - \cos \Delta \cos C}{\sin \Delta \sin C},$$

la valeur de P correspondante à la valeur moyenne de N; puis, faisant varier P de la moitié de l'intervalle de cette série, on déterminera N′ par cette autre formule rigoureuse,

$$\cos N' = \cos P' \sin \Delta \sin C + \cos \Delta \cos C,$$

P′ désignant le nouvel angle horaire : on aura, par ce moyen, $N' - N = dN$. Ensuite, on calculera dN par la formule approchée ci-dessus, en prenant pour P et N leurs valeurs moyennes, et s'il arrive que ces deux valeurs s'accordent à $\frac{1}{100}$ de seconde près, on sera en droit de considérer la distance moyenne, lue sur le limbe, comme correspondante à l'époque moyenne des observations.

307. Quand on veut obtenir le temps vrai avec une grande précision, par des distances zénithales observées avec le cercle de Borda, on groupe les observations de deux en deux, afin d'avoir une distance moyenne et un temps moyen arithmétique entre ceux des deux temps donnés par la pendule; ensuite on détermine l'heure vraie correspon-

dante et la correction de la pendule, comme nous venons de l'enseigner. Cette méthode se présente naturellement à l'esprit, et elle a l'avantage, malgré sa longueur, de faire juger tout d'abord de la justesse des résultats partiels. Par exemple, si l'on a fait dix observations conjuguées, on aura dix corrections de la pendule, dont le milieu sera la correction pour l'instant moyen entre toutes les observations; et à moins d'erreurs de calcul, ces dix corrections partielles suivront la marche connue de la pendule, c'est-à-dire qu'elles croîtront ou diminueront si la pendule avance ou retarde; qu'elles seront constantes, si la pendule est exactement réglée sur l'astre.

Il faut toutefois faire abstraction des petites discordances dues aux observations, car on estime difficilement l'instant précis du contact dans une lunette qui grossit peu; d'ailleurs le mouvement de l'astre dans le sens vertical étant bien plus lent que le passage par les fils d'une lunette méridienne, il est rare qu'on puisse connaître le temps plus exactement qu'à la seconde.

Ces discordances ne viennent pas seulement de l'incertitude sur le temps du contact; quelques-unes résultent en partie des erreurs de la division, surtout vers le commencement d'une série. Mais si une double distance se trouve trop grande, la suivante sera très-probablement trop faible, et l'on aura lieu d'espérer que l'erreur disparaîtra presque entièrement du résultat.

Telles sont en substance les remarques mêmes de Delambre, sur la méthode actuelle, dont il a été fait un fréquent usage dans la mesure de la méridienne (*Connaissance des Temps* pour 1820, page 358). Mais ce savant astronome s'est aperçu qu'il pouvait souvent se permettre de réunir les observations quatre à quatre, sans craindre de commettre une erreur qui passât un dixième de seconde de temps, et que même en partageant quelquefois vingt observations en deux groupes de six et en deux autres de quatre, les discordances étaient encore d'un ordre inférieur aux erreurs de l'observation. Nous nous appuyons de son autorité, pour prouver combien l'on doit être scrupuleux dans le calcul des observations astronomiques faites avec le cercle de Borda.

308. Parmi les moyens qu'on a proposés pour réduire toutes les

distances observées, au temps qui tient le milieu entre tous les temps de la pendule, il en est un remarquable par son élégance et sa simplicité; c'est celui que M. Soldner a décrit dans les *Éphémérides de Berlin* pour 1818. Le voici :

Soient H la hauteur du pôle, D la déclinaison, P l'angle horaire, enfin N la distance zénithale : on aura généralement

$$(1) \qquad \cos N = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D.$$

Si l'on suppose que la variable N reçoive un accroissement quelconque δN, l'angle horaire P, qui est fonction de cette variable, augmentera de δP. Quant aux quantités H et D, nous les considérerons comme constantes, quoique dans la réalité D varie tant soit peu pendant la durée d'une série; mais si, en partant de l'époque moyenne, il arrive que la variation en déclinaison, dans la première moitié de la série, donne un résultat trop fort, elle en donnera un trop faible dans la seconde moitié; on doit donc compter sur une compensation suffisamment exacte à cet égard. Or, par le théorème de Taylor, on a généralement

$$(2) \qquad \delta N = \frac{dN}{dP}\delta P + \frac{d^2N}{dP^2}\frac{\delta P^2}{1.2} + \frac{d^3N}{dP^3}\frac{\delta P^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et à chaque distance zénithale correspondra une série toute semblable.

Admettons maintenant qu'aux angles horaires observés P', P'', P''',..., $P^{(n)}$ correspondent les distances zénithales N', N'', N''',..., $N^{(n)}$, et que P soit l'angle horaire moyen auquel correspond la distance zénithale N. Supposons en outre que l'on ait

$$P' = P + \delta P', \quad P'' = P + \delta P'', \quad P''' = P + \delta P''', \text{ etc.},$$
$$N' = N + \delta N', \quad N'' = N + \delta N'', \quad N''' = N + \delta N''', \text{ etc.};$$

alors, à cause de

$$P = \frac{P' + P'' + P''' + \ldots P^{(n)}}{n},$$

et de

$$N = \frac{N' + N'' + N''' + \ldots N^{(n)}}{n},$$

n étant le nombre des observations, il est évident qu'en prenant P pour l'angle horaire moyen, l'on a

$$P = \frac{nP + \delta P' + \delta P'' \ldots + \delta P^{(n)}}{n} = P + \sum \frac{\delta P}{n},$$

et par conséquent $\frac{\Sigma \delta P}{n} = 0$, Σ étant le signe d'une somme.

Par la même raison, si l'on désigne par G la somme des distances zénithales observées, la moyenne de ces distances sera

$$\frac{G}{n} = \frac{N' + N'' + N''' \ldots}{n} = N + \sum \frac{\delta N}{n},$$

c'est-à-dire que $\sum \frac{\delta N}{n}$ sera la correction à faire à la distance moyenne donnée par l'observation pour répondre précisément à l'angle horaire P ou au milieu de l'intervalle. Ainsi, en bornant la série précédente (2) au terme du deuxième ordre, ce qui est toujours suffisant, on a simplement

$$\sum \frac{\delta N}{n} = + \frac{d^2 N}{dP^2} \sum \frac{\delta P^2}{2n},$$

ou, faisant $\frac{G}{n} = z$, on a enfin

$$N = z - \frac{d^2 N}{dP^2} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}, \tag{3}$$

puisqu'à très-peu près $\frac{1}{2} \delta P^2 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P$.

Il s'agit actuellement d'avoir l'expression du coefficient différentiel du second ordre, en fonction des données du problème; or, en différentiant deux fois de suite l'équation (1) ci-dessus, on a

$$\frac{dN}{dP} = \frac{\sin P \cos H \cos D}{\sin N},$$

$$\frac{d^2 N}{dP^2} = \frac{\cos P \cos H \cos D}{\sin N} - \frac{\cos N \sin P \cos H \cos D}{\sin^2 N} \cdot \frac{dN}{dP}$$

$$= \cot P \cdot \frac{dN}{dP} - \cot N \cdot \frac{dN^2}{dP^2},$$

et par conséquent, en fonction du coefficient différentiel du premier

ordre,

$$(3') \qquad N = z - \left(\cot P . \frac{dN}{dP} - \cot N \frac{dN^2}{dP^2}\right) \sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}.$$

On fera donc usage, pour calculer le temps vrai, de la distance zénithale N qui avait lieu à l'instant moyen entre ceux qu'a marqués la pendule; après quoi l'on aura la correction de cette pendule, c'est-à-dire la différence du temps vrai de l'observation à l'époque moyenne qu'elle a indiquée.

Quant à déterminer la somme $\sum \left(\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{\sin 1''}\right)$, c'est ce qui se fera à l'aide de la table XVI, dont nous expliquerons la formation, en parlant des observations de latitude. Nous ferons remarquer seulement, quant à présent, que les δP en temps s'obtiennent en prenant la différence de l'instant moyen des observations à chacun des instants observés.

Une autre manière de procéder, selon M. Soldner, est de calculer l'angle horaire d'après les trois données $\frac{G}{n} = z$, D et H, la déclinaison D étant toujours celle qui correspond au milieu de la série; mais cet angle horaire, que nous appellerons P_1, n'étant qu'approché, et sa valeur déduite de z étant alors trop grande, on aura plus exactement

$$P = P_1 - dP = P_1 - \frac{dN \sin N}{\sin P \cos D \cos H},$$

en vertu de ce qui précède. De plus, dN représentant ici

$$\sum \frac{\delta N}{n} = \frac{d^2 N}{dP^2} \sum \frac{\delta P^2}{2n},$$

il n'est pas difficile de voir qu'en dernière analyse

$$(4) \qquad dP = -\left(\cot P - \cot N . \frac{dN}{dP}\right) \sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}.$$

La correction du temps approché sera donc $\frac{dP}{15}$. Il faut, dans le calcul de cette dernière formule, faire attention au signe des lignes trigonométriques.

APPLICATION.

Je choisirai pour exemple une des séries de distances zénithales du centre du Soleil, que je pris en 1822 avec un très-bon cercle de Reichenbach, à niveau mobile, dans la ville d'Étampes, dont la latitude, déduite d'opérations géodésiques liées au Panthéon, est de $48^\circ 26' 10'' = \mathrm{H}$, et la longitude ouest de 42^s de temps.

Observations du soir, le 10 *août* 1822.

TEMPS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLES MULTIPLES.	ANGLES SIMPLES.	ÉTAT DE L'ATMOSPHÈRE.
$4^h\ 5^m 39^s,2$	départ. $512^G 870$		Peu de vent.
6.54,4			Nuages par intervalle.
8.48,2			Baromèt. $= 0^m,7557$.
9.54,4			Therm. libre à l'ombre
11.10,0			$= 24^\circ,5$ centigrades.
13.44,4	918,716	$60^\circ 52' 36'',8$	
16.27,4			
17.46,2			
19. 9,6			
20.56,2			
22.21,8			
$n = 12$. 23.24,4	1336,205	61.45. 0,45	
Époq. moy. 4.14.41,33			

$$
\begin{array}{lrr}
\text{De là l'angle observé, déduit de 12 observat., } N_m = & & 61^\circ 45'\ \ 0'',45 \\
\text{Réfraction} \ldots\ldots\ldots\ldots & + & 1.41\ ,83 \\
\text{Parallaxe} \ldots\ldots\ldots\ldots & - & 7\ ,58 \\
\text{Distance zénithale géocentrique } N_{\prime} = & & 61^\circ 46' 34\ ,70
\end{array}
$$

Avant d'appliquer à la distance zénithale la correction

$$-\sum \frac{\delta N}{n} = -\frac{d^2 N}{dP^2} \cdot \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''},$$

on formera le tableau suivant :

TEMPS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLES HORAIRES δP.	FACTEURS $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{\sin 1''}$ (table XVI).
$4^h\ 5^m 39^s$	$-\ 9^m\ 2^s$	$160^s,2$
6.54	7.47	118,9
8.48	5.53	68,0
9.54	4.47	44,9
11.10	3.31	24,3
13.44	0.57	1,8
16.27	+ 1.46	6,1
17.46	3. 5	18,7
19.10	4.29	39,5
20.56	6.15	76,7
22.22	7.41	115,9
23.24	8.43	149,2
Époq. moy. 4.14.41	Somme.....	$824,2 = \sum \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{\sin 1''}$.

Dans ce tableau, la somme des δP négatifs diffère de 2^s de celle des δP positifs, parce que les fractions de seconde, qui ne sont ici d'aucune importance, ont été négligées; et les facteurs correspondants à ces angles horaires ont été trouvés à l'aide de la table XVI, 1[re] partie.

Il reste encore, pour évaluer les coefficients différentiels $\frac{dN}{dP}, \frac{d^2N}{dP^2}$, à déterminer approximativement l'angle horaire moyen P, et à calculer la déclinaison correspondante du Soleil. Or, on savait déjà que le chronomètre retardait à peu près de $4^m 43^s$ sur le temps vrai; partant

Époque moyenne. . . . . . $4^h 14^m 41^s,3$
Retard approché. . . . . . + 4.43
Angle horaire approché $P = 2^h 19^m 24^s = 64°51'$.

Calculant donc la déclinaison du Soleil pour cette heure-là, à l'aide

de la *Connaissance des Temps*, et tenant compte des différences secondes (art. **240**), on obtiendra $D = 15°38'18'',9$.

Maintenant, si l'on prend pour valeur de N celle de l'angle moyen N_1 qui en diffère fort peu, on aura, en procédant par les log à 5 décimales,

$$\sin P = 9{,}95674$$
$$\cos H = 9{,}82181$$
$$\cos D = 9{,}98361$$
$$\text{c. } \sin N_1 = 0{,}05498$$

$$\log \frac{dN}{dP} = 9{,}81714 + \qquad \log \frac{dN^2}{dP^2} = 9{,}63428 -$$
$$\cot P = 9{,}67163 \qquad \cot N_1 = 9{,}72978$$
$$\qquad\qquad 9{,}36406 -$$
$$\left.\begin{array}{r} \log \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{\sin 1''} = 2{,}91603 \\ \text{c. } \log 12 = 8{,}92082 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \; 1{,}83685$$
$$1{,}32562 + \qquad 1{,}20091 -$$
$$= +21'',17 \qquad = -15'',88$$
$$-15\;,88$$

$$\text{Correction } \sum \frac{\delta N}{n} = + \;\; 5'',29$$

Distance zénithale géocentrique.. . . . . = 61°46′34″,70
Correction. . . . − 5 ,29
Distance zénith. corresp. à l'angle hor. P. . . N = 61°46′29″,41

Calculant ensuite cet angle horaire P comme précédemment, il viendra

$$\log \sin \tfrac{1}{2} P = 9{,}7294891 = 32°26'20'',1\,;$$

de là P = 64°52′40″,2

temps vrai	4h 19m 30s,66	temps vrai	4h 19m 30s,66
temps du chronom.	4.14.41 ,33	équat. du temps	+ 5. 5 ,08
retard absolu	+ 4m 49s,33	temps moyen	4.24.35 ,74
		temps du chronom.	4.14.41 ,33
		retard absolu	+ 9m 54s,41

Si l'on eût calculé l'angle horaire P en négligeant la correction de distance zénithale — 5″,29, on aurait trouvé $P = 64°52'48'' = 4^h 19^m 31^s,2$, c'est-à-dire $0^s,54$ de plus; telle est aussi la valeur de dP donnée par la formule (4) divisée par 15 pour la réduire en temps.

309. Delambre compare numériquement la méthode ordinaire à celle de M. Soldner, et fait voir qu'il est presque aussi simple et tout aussi exact de conclure la correction moyenne de la pendule des résultats partiels fournis par les observations groupées quatre à quatre.

Par exemple, l'heure moyenne entre vingt observations s'est trouvée de $3^h 38^m 36^s,95$ dans un lieu dont la distance du pôle au zénith est de 39°10′20″,1; la distance zénithale moyenne du ⊙, corrigée de la réfraction et de la parallaxe, de 51°14′7″; la déclinaison du Soleil pour l'instant moyen, de 21°26′40″; d'où il est aisé de conclure, par la méthode de l'art. **301**, que l'heure correspondante à la distance moyenne était.. . . . . $3^h 36^m 38^s,13$
mais l'heure moyenne de la pendule était. . . . . 3.38. 36 ,95
donc la correction résultante serait. . . . . 1. 58 ,82

En réunissant les observations quatre à quatre, on a eu ces résultats partiels :

NOMBRE des observat.	MOYENNES des temps de la pendule.	DISTANCE zénithale réduite.	DISTANCE polaire ⊙.	TEMPS vrai.	CORRECTION de la pendule.
4. . . .	$3^h 25^m 30^s,9$	49° 7′49″,5	68° 33′ 25″,2	$3^h 23^m 30^s,7$	— 2′0″,2
4. . . .	32. 6,1	50. 7.20,0	68.33.22,6	3.30. 5,0	— 2.1,1
4. . . .	38.21,5	51. 4.20,6	68.33.20,0	3.36.19,2	— 2.2,3
4. . . .	45. 1,6	52. 5.53,8	68.33.17,5	3.43. 0,4	— 2.1,2
4. . . .	52. 4,6	53.11. 6,3	68.33.14,5	3.50. 2,9	— 2.1,7
20				Correction moyenne. . . .	— 2.1,3

Il résulte de là que la correction moyenne de la pendule, correspondante à son heure moyenne, est plus exactement de $2^m 1^s,3$. Ainsi,

dans le cas actuel, les vingt observations réunies en un seul groupe produiraient $2^s,5$ d'erreur. En calculant même les observations deux à deux, pour resserrer davantage les intervalles, on aurait, pour correction de la pendule, $2^m 1^s,55$. La formule de M. Soldner donne ce dernier résultat à $\frac{2}{100}$ de seconde près.

Pour réduire les corrections partielles à l'époque du milieu de la série, il faut faire attention que la pendule avançait de $1^s,67$ par heure sur le temps vrai. Or, de l'époque moyenne des vingt observations à l'époque moyenne des quatre premières, il s'est écoulé $13^m 7^s,43 = 13^m,1$; on dira donc

$$60^m : 1^s,67 :: 13^m,1 : x = 0^s,3.$$

Telle est l'avance de la pendule pendant $13^m,1$. D'après cela, les cinq corrections partielles précédentes, réduites à l'époque moyenne de la série, seront

	$-\ 2^m 0^s,5$
	$-\ 2.1,3$
	$-\ 2.2,3$
	$-\ 2.1,0$
	$-\ 2.1,3$
Correction moyenne	$-\ 2^m 1^s,3$

Le Mémoire de Delambre contient beaucoup d'autres détails que nous nous dispenserons de rapporter ici (*voyez* la *Connaissance des Temps* de 1820); mais il est une remarque essentielle que cet astronome n'a pas faite, c'est que pour avoir rigoureusement le temps absolu par la méthode actuelle, il faut non-seulement procéder comme on l'a expliqué ci-dessus, mais en outre s'affranchir de l'erreur qui peut affecter la distance zénithale observée, par suite de celle du cercle répétiteur (art. **120**): or on atteindra ce second but, quelle que soit la cause de cette erreur, supposée constante pour les mêmes distances zénithales, en observant le même astre avant et après son passage au méridien, et à la même distance de ce plan. En effet, si la pendule est préalablement assez bien réglée sur le temps sidéral, l'intervalle $T'-T$ des observations à très-peu près correspondantes sera exactement donné par celui qui s'est écoulé sur cette pendule. Ainsi, en appelant m

ce second intervalle, et α l'erreur de l'angle horaire produite par l'erreur constante de l'instrument, par Æ le temps sidéral du passage de l'étoile au méridien; on aura respectivement, pour les temps sidéraux exacts de la première et de la seconde observation,

$$T = Æ - P - \alpha, \quad T' = Æ + P' + \alpha,$$

d'où

$$\alpha = \left(\frac{m}{2} - \frac{P'+P}{2}\right),$$

et par conséquent

$$T = Æ - P - \left(\frac{m}{2} - \frac{P'+P}{2}\right), \qquad T' = Æ + P' + \left(\frac{m}{2} - \frac{P'+P}{2}\right).$$

Si l'erreur α est positive, comme nous venons de le supposer, les distances zénithales mesurées Z, Z', et au moyen desquelles on a calculé les angles horaires P, P', ont été trouvées trop petites d'une quantité dZ qu'il s'agit d'évaluer. Or, on a en général cette formule différentielle (art. **306**),

$$dZ = \frac{dP \cos H \cos D \sin P}{\sin Z},$$

dans laquelle H exprime la latitude de la station, et D la déclinaison boréale de l'astre. Il sera donc facile de connaître l'erreur constante dZ du cercle répétiteur, correspondante à la distance zénithale Z, et due à l'erreur $dP = \alpha$ de l'angle horaire. Toutefois cette erreur dZ serait donnée d'une manière plus précise et plus directe par la latitude terrestre, déterminée au moyen d'observations d'étoiles situées au nord et au sud du zénith, et à peu près à la même distance de ce point (art. **314**).

La connaissance exacte du temps absolu aux extrémités d'un arc de parallèle dont on cherche l'amplitude astronomique, est si importante, qu'il est indispensable, à défaut de lunette méridienne, de recourir à cette méthode des observations correspondantes, et de faire en outre usage du même catalogue d'étoiles, tel que celui de Maskelyne, ou de Bessel, ou de Pond. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

CHAPITRE IV.

DES OBSERVATIONS ET DU CALCUL DES LATITUDES.

310. La latitude d'un lieu terrestre, ou la hauteur du pôle, se détermine par des hauteurs du Soleil ou des étoiles; mais on choisit ordinairement, pour faire ces observations, une des étoiles circompolaires; parce que si, pendant une longue nuit, on observe sa plus grande et sa plus petite hauteur, c'est-à-dire ses deux passages au méridien, la demi-somme de ces hauteurs, diminuées chacune de la réfraction, sera la hauteur du pôle cherchée.

La méthode actuelle suppose que l'on a invariablement fixé un grand quart de cercle dans le plan du méridien, en l'adossant contre une muraille, instrument que l'on nomme pour cette raison un *mural* : mais les ingénieurs-géographes étant obligés d'observer dans des lieux où il serait souvent fort difficile et très-dispendieux de faire établir un pareil instrument, se servent plus commodément du cercle répétiteur, qui a d'ailleurs l'avantage exclusif de donner, par des observations multipliées et dans une seule nuit, la latitude avec une très-grande précision. A la vérité, les distances au zénith observées avec ce cercle ne sont pas prises dans le plan du méridien; mais on les y réduit par la méthode suivante.

Correction des distances au zénith, observées près du méridien.

Soient Z (*fig.* 17) le zénith de l'observateur, P le pôle, E l'étoile supposée très-près du méridien ZP; PE sera la distance de l'étoile au pôle, ou le complément de sa déclinaison, ZE sa distance au zénith observée.

Prenons Pe = PE, Ze sera la distance au zénith telle qu'elle aurait.

été observée dans le méridien; et comme, pour le cas de la figure, $ZE > Ze$, soit $ZE = Ze + x$.

D'ailleurs

$$Ze = ZP - PE = (1^q - H) - (1^q - D) = D - H,$$

D étant la déclinaison de l'étoile E, et H la latitude du lieu Z; donc

$$ZE = D - H + x.$$

Remarquons maintenant que le triangle sphérique ZPE donne

$$\cos ZE = \cos PE \cos PZ + \sin PE \sin PZ \cos P,$$

ou

$$\cos(D - H + x) = \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos P;$$

mais à cause de $\cos P = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} P$, on aura

$$\cos(D - H + x) = \sin D \sin H + \cos D \cos H - 2\cos D \cos H \sin^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou bien

$$\cos(D - H + x) = \cos(D - H) - 2\cos D \cos H \sin^2 \tfrac{1}{2} P.$$

Soient, pour abréger, $-2\cos D \cos H \sin^2 \frac{1}{2} P = q$ et $D - H = A$; on aura

$$(1) \qquad \cos(A + x) - \cos A = q.$$

Parmi les méthodes propres à fournir la valeur de x, nous choisirons celle de l'art. **102**, qui est applicable en cette circonstance, puisque q est fonction de x, et que ces deux quantités s'évanouissent en même temps. Il s'agit donc, dans la série

$$x = \left(\frac{dx}{dq}\right) q + \left(\frac{d^2x}{dq^2}\right) \frac{q^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{dq^3}\right) \frac{q^3}{2.3} + \ldots,$$

de remplacer les coefficients différentiels déduits de la relation (1). Or, en général

$$\frac{dx}{dq} = -\frac{1}{\sin(A+x)}, \quad \frac{d^2x}{dq^2} = \frac{\frac{dx}{dq}\cos(A+x)}{\sin^2(A+x)} = -\frac{\cot(A+x)}{\sin^2(A+x)},$$

. . . .

Mais ici ces valeurs devant correspondre à $x = 0$, on a, en s'arrêtant au coefficient différentiel du second ordre,

$$\left(\frac{dx}{dq}\right) = -\frac{1}{\sin A} = -\frac{1}{\sin(D-H)},$$
$$\left(\frac{d^2x}{dq^2}\right) = \frac{-\cot A}{\sin^2 A} = \frac{-\cot(D-H)}{\sin^2(D-H)},$$

et par conséquent en secondes de degré,

$$x = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos H}{\sin(D-H)\sin 1''} - \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos H}{\sin(D-H)\sin 1''}\right]^2 \cot(D-H)\sin 1''. \quad (1)$$

Le second terme se calcule facilement à l'aide du premier, qui le plus souvent suffit.

A la seule inspection de la figure, on voit que la valeur de x, donnée par la formule ci-dessus, se retranche de la distance observée, quand l'étoile passe entre le pôle P et le zénith Z; ainsi l'on a $Ze = ZE - x$. Si au contraire elle passe au-dessous du pôle, la valeur de x conservera les signes qu'elle a plus haut; mais au lieu de $(D-H)$, on mettra $(D+H)$, parce qu'alors $Ze = ZP + PE = 2° - (D+H)$.

Enfin, si l'étoile passe au midi du zénith, auquel cas $Ze = PE - PL = H - D$, il faudra changer les signes de la valeur de x, et mettre $H - D$ à la place de $D - H$; ainsi l'on aurait, pour le Soleil comme pour une étoile,

$$x = -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos H}{\sin(H-D)\sin 1''} + \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos H}{\sin(H-D)\sin 1''}\right]^2 \cot(H-D)\sin 1''; \quad (2)$$

en ayant cependant le soin de changer le signe de D quand la déclinaison de l'astre est australe.

Soit que l'on ait l'intention de calculer directement la valeur de x, soit que l'on veuille former des tables de réduction pour les étoiles observées, il faudra connaître à fort peu près la latitude du lieu Si donc elle ne peut être conclue des opérations géodésiques (art. **192**), on considérera les distances au zénith observées à l'orient et à l'occident, et fort près du méridien, comme ayant été prises dans le méridien même, et l'on en conclura la latitude approchée du lieu.

Supposons, par exemple, que l'on sache, par la méthode de l'art. **281**, à quelle heure l'étoile polaire passera au méridien un certain jour, et que vers l'instant de ses passages supérieur et inférieur on ait observé ses deux distances au zénith, ainsi que l'état du baromètre et du thermomètre, on aura la latitude approchée ainsi qu'il suit :

	Passage supérieur.	Passage inférieur.
Soit, distance apparente au zénith.	$43^g,79801$. . . .	$47^g,64250$
Réfraction vraie.	$0,01495$. . . .	$0,01707$
on aura, distance zénithale vraie. . .	$43^g,81296$. . . .	$47^g,65957$
donc, demi-somme, ou distance vraie du pôle au zénith.		$45^g,23626$
donc enfin, complém. de cette demi-somme, ou latit.		$54,76374$.

311. Le calcul des tables par la formule donnée plus haut est assez facile; car $\sin^2 \frac{1}{2} P$ et $\sin^4 \frac{1}{2} P$ étant les seules quantités variables, il s'ensuit que quand on aura le logarithme du premier nombre de la table, les logarithmes de tous les autres nombres s'obtiendront en ajoutant successivement les différences des logarithmes de $\sin^2 \frac{1}{2} P$ et $\sin^4 \frac{1}{2} P$.

Prenons pour exemple l'étoile polaire qui, comme le dit Delambre, semble mériter la préférence parmi celles que l'on peut choisir pour les observations de la hauteur du pôle. On déterminera d'abord la latitude approchée pour le lieu de l'observateur, par le procédé précédent, et la déclinaison apparente de l'étoile, selon la méthode de l'art. **281**. Une erreur de quelques secondes sur chacun de ces éléments n'est d'aucune conséquence.

$$
\begin{aligned}
\text{Supposons que la latitude } H &= 46^\circ 10' 40''\\
\text{et que la déclinaison } D &= 88.13.30\\
\text{on aura } D - H &= 42^\circ\ 2' 50''\\
D + H &= 134.24.10. \ldots\ldots \quad 45^\circ 35' 50''.
\end{aligned}
$$

Ensuite le calcul des facteurs constants de la formule (1) se fera ainsi qu'il suit :

Passage supérieur.			Passage inférieur.		
l. 2		0,30103			
c. sin 1″		5,31443			
cos D		8,49101			
cos H		9,84037			
		3,94684	. . . .		3,94684
c. sin (D − H)		0,17409	c. sin (D + H)		0,14604
log a	−	4,12093	log a	+	4,09288
2 log a	+	8,24186	2 log a	−	8,18576
log $\frac{1}{2}$		9,69897	. . . .		9,69897
l. sin 1″		4,68557	. . . .		4,68557
cot (D − H)		0,04484	cot (D + H)	−	9,99094
log b	+	2,67124	log b	+	2,56124.

Il ne s'agit plus, pour calculer la table de réduction, tant pour le passage supérieur que pour le passage inférieur, que d'ajouter successivement à ces logarithmes constants les différences logarithmiques de $\sin^2 \frac{1}{2}P$ et de $\sin^4 \frac{1}{2}P$, comme nous l'avons déjà fait observer, et comme on peut le voir par l'exemple de ces additions, mis à côté de la table XV, 2ᵉ partie.

Pour le passage supérieur la réduction est soustractive, parce que le second terme, quoique positif, est toujours plus faible que le premier, qui, dans le cas actuel, est négatif.

Pour le passage inférieur le premier terme est positif, et le second l'est aussi, parce que D + H est toujours plus grand que 90° : ainsi la réduction est additive.

Quoique pendant l'observation d'une même étoile, la déclinaison D varie par la précession, l'aberration et la nutation, l'on peut regarder cette déclinaison comme constante, dans l'intervalle de trois à quatre mois; mais après ce temps il faut refaire la table, ou la corriger par les formules que Delambre a données (page 50 de son Mémoire cité).

Ce célèbre astronome, à qui appartient la méthode précédente, prescrit de faire pour tout l'intervalle de l'observation d'une même étoile, un tableau qui donne de dix jours en dix jours la position apparente de l'étoile, c'est-à-dire son ascension droite en temps, et

sa distance au pôle à peu près connue, affectées l'une et l'autre de la précession, de l'aberration et de la nutation (art. **281**). On conçoit en effet qu'avec ce secours le calcul est plus facile et moins sujet à erreur.

On évite des corrections trop fortes, en observant peu de minutes avant et après le passage au méridien.

Enfin comme l'image d'une étoile, vue dans les petites lunettes, paraît être accompagnée de rayons irréguliers qui rendent incertain le véritable centre de l'astre, il en résulte souvent dans les latitudes conclues de plusieurs séries de distances zénithales, des anomalies assez sensibles. De là vient, dit M. Arago (*Conn. des Temps* de 1819, p. 367), que l'étoile pourra ne pas avoir la même forme pour tous les yeux. Mais dans les lunettes à fort grossissement l'image de l'étoile se concentre davantage, et quand on a soin de ne point changer, dans tout le cours des observations, la distance de l'objectif à l'oculaire, on a bien moins à craindre d'obtenir des résultats discordants.

312. Il n'est pas nécessaire de noter chaque distance au zénith, prise avec le cercle répétiteur, parce que l'on perdrait un temps précieux, qu'il convient au contraire d'employer à multiplier les observations autant que possible, sans cependant les faire avec précipitation; mais l'on tient registre des instants des observations données par la pendule (art. **126**), afin que la comparaison de ces instants avec l'heure du passage de l'étoile au méridien (art. **281**) donne les angles horaires P, avec lesquels on cherchera dans la table les réductions correspondantes. La somme de toutes ces réductions, divisée par le nombre des observations, sera la réduction moyenne que l'on retranchera (pour un passage supérieur) de la moyenne entre toutes les distances observées, c'est-à-dire de l'arc total parcouru, divisé par le nombre des observations; le reste sera la distance apparente telle qu'elle aurait été observée au méridien. Ces remarques seront mieux saisies, si l'on jette un coup d'œil sur le tableau suivant, extrait du Mémoire cité de Delambre.

POLAIRE. *Passage supérieur,* 11 décembre 1796.

Ascension droite apparente. . . .	0h51m55s	
La pendule, réglée sur le temps sidéral (art. **11** et **303**), retardait de	0. 1. 0	Barom. 27po 0lis
Passage au méridien, en temps de la pendule..	0. 50.55	Therm. — 8°

ARC PARCOURU réduit en degrés sexagésimaux.	INSTANTS des observations donnés par la formule.	ANGLES HORAIRES en temps.	RÉDUCTION exprimée en secondes de degré. (Table XV, 2e partie.)
0° 0′ 0″	0h37m49s	0h13m 6s	— 10″78
	42.53	8. 2	4,06
	45. 8	5.47	2,11
	47. 8	3.47	0,91
	48.39	2.16	0,32
	50.16	0.39	0,03
	52.33	1.38	0,16
	54.39	3.44	0,88
	56.35	5.40	2,03
	58.55	8. 0	4,03
	61.18	10.23	6,77
504.26.19,62	63.49	12.54	10,46

	Somme des réductions.	— 42″,54
	qu'il faut diviser par le nombre des observations.	12
	Quotient.	— 3,545
	Distance moyenne au zénith, entre les 12 observées.	42° 2′ 1,635
	Distance méridienne apparente.	42. 1.58,090
(Art. 253).	Réfraction moyenne.	+ 51,020
	Correction de température.	+ 3,570
	Distance polaire. . . . . +	1.46.22,310
	Hauteur de l'équateur, ou *colatitude*.	43.49.14,99
	LATITUDE d'Évaux.	46.10.45,01

Si la pendule était réglée sur le moyen mouvement du Soleil, il faudrait, après avoir cherché les angles horaires comme ci-dessus, les augmenter tous à raison de 10^s par heure, ou de 1^s pour 6^m (art. **14**) : cette précision sera suffisante; mais, pour plus de facilité, on réglera d'avance la pendule sur le temps sidéral, quand on devra observer des étoiles.

313. Pour faire connaître la manière de former un tableau des résultats d'un passage, nous extrairons de la *Base du Système métrique*, le suivant, qui est relatif au passage supérieur de la Polaire, observé à Évaux, l'un des points de la Méridienne.

1796 et 1797.	*n*.	LATITUDES simples.	N.	LATITUDES combinées.
11 décembre...	12	46° 10′ 45″01	12	46° 10′ 45″ 01
14..........	28	47,64	40	46,85
15..........	24	46,70	64	46,80
16..........	40	42,75	104	45,24
17..........	24	46,71	128	45,51
2 janvier.....	28	42,18	156	44,92
17..........	20	40,29	176	44,39
18..........	24	42,03	200	44,11
21..........	10	39,89	210	43,91

Dans ce tableau, la colonne intitulée *n* désigne le nombre des observations de chaque jour; et la colonne qui suit donne les résultats correspondants, obtenus par la méthode précédente. La colonne intitulée N indique le nombre des observations, comme si elles avaient été faites sans interruption; la dernière colonne donne les latitudes combinées, ou les *latitudes moyennes* correspondantes aux nombres N, et calculées par la règle de l'art. **118**. Par exemple, le 11 décembre, la moyenne de 12 observations est 46°10′45″,01; et le 14 décembre, la moyenne de 28 observations est 46°10′47″,64. Pour avoir le résultat moyen entre les 40 observations, il faudra, d'après l'article

cité, et en ne prenant que les chiffres qui diffèrent entre eux, écrire

$$\frac{12\times 5'',01+28\times 7'',64}{12+28}=\frac{274'',04}{40}=6'',85.$$

Il suit de là que le résultat moyen cherché est 46°10′46″,85, comme on le voit par le tableau ci-dessus.

314. On rend la latitude indépendante de l'erreur produite par celle qui pourrait affecter la déclinaison, en observant les deux passages de l'étoile; et l'on obtient par ce moyen ses deux distances vraies au zénith, dont la demi-somme est le complément de la latitude (art. **310**).

En effet, soient $H_{(m)}$ la véritable latitude cherchée, Δ la distance polaire de l'étoile, déterminée par les catalogues (art. **281**), et supposée trop petite de la quantité μ; $Z_{(1)}$ la distance zénithale méridienne, lors du passage supérieur; et $Z_{(2)}$ la distance zénithale méridienne lors du passage inférieur; on aura

$$\begin{array}{rll} \text{pour le passage supérieur,} & H_{(m)}= & 90-(Z_{(1)}+\Delta+\mu) \\ \text{pour le passage inférieur,} & H_{(m)}= & 90-(Z_{(2)}-\Delta-\mu) \\ \hline \text{somme.....} & 2H_{(m)}= & 180-(Z_{(1)}+Z_{(2)}) \\ \tfrac{1}{2}\text{ somme ou latitude exacte,} & H_{(m)}= & 90-\tfrac{1}{2}(Z_{(1)}+Z_{(2)}). \end{array}$$

Dans le premier cas, la latitude approchée

$$H_{(1)}=H_{(m)}+\mu=90-(Z_{(1)}+\Delta);$$

dans le second cas, l'on a

$$H_{(2)}=H_{(m)}-\mu=90-(Z_{(2)}-\Delta);$$

de là

$$H_{(1)}-H_{(2)}=2\mu;$$

ainsi, correction de distance polaire

$$\mu=\tfrac{1}{2}(H_{(1)}-H_{(2)}).$$

Voici, pour exemple, le résumé des passages de la Polaire, à Évaux,

selon Delambre :

Par 210 observations passage supérieur,	$H_{(1)} =$	$46°10'43'',91$
Par 410 observations passage inférieur,	$H_{(2)} =$	$46.10.43,20$
620 observations, milieu ou latitude	$H =$	$46.10.43,555$
différence	$(H_{(1)} - H_{(2)}) =$	$+\ 0,71$
$\frac{1}{2}$ différence ou correct. de distance polaire	$\mu =$	$+\ 0'',35$

Une comparaison toute pareille des passages de β de la petite Ourse a donné, par un milieu entre 552 observations,

	$H = 46°10'43'',10$
or, par la Polaire on a eu. . . .	$46.10.43,55$
Milieu entre 1172 observations. .	$46.10.43,32$
Réduction au clocher.	$-\ 0,88$
LATITUDE du clocher d'Évaux. . . . =	$46°10'42'',44$

Cette latitude, dépendante seulement d'observations d'étoiles situées d'un même côté du zénith, est supposée exempte de l'erreur constante du cercle répétiteur; parce que d'autres observations de ce genre, faites à Paris avec le même instrument, ont conduit aux mêmes résultats, soit en observant des étoiles au midi du zénith, soit en les observant au nord de ce point.

Mais, nommons Z la distance méridienne observée d'une étoile circompolaire, δZ l'erreur de cette distance due à celle du cercle, Δ la distance polaire apparente de la même étoile parfaitement connue, et H la latitude cherchée; on aura exactement, lors du passage supérieur :

$$H = 90° - (Z + \delta Z) - \Delta.$$

Appelons pareillement Z' la distance méridienne observée d'une étoile située au sud du zénith, et très-peu différente de Z; dans ce cas δZ sera également son erreur; et si, en outre, Δ' est la distance polaire de l'étoile supposée moindre que 90°, et tirée du même catalogue que Δ, on aura encore exactement

$$H = 90° + (Z' + \delta Z) - \Delta';$$

or, en ajoutant ces deux valeurs, il vient

$$H = 90^{\circ} + \left(\frac{Z' - Z}{2}\right) - \left(\frac{\Delta' + \Delta}{2}\right),$$

c'est-à-dire une latitude *absolue* ou dégagée de l'erreur de l'instrument; et cette erreur a généralement pour expression

$$\delta Z = \frac{\Delta' - \Delta}{2} - \left(\frac{Z' + Z}{2}\right);$$

mais à Paris δZ s'est trouvé nul.

Toutefois, cette latitude absolue paraît être influencée par une attraction particulière assez énergique pour l'écarter de plusieurs secondes de celle qui se manifesterait sans cette cause accidentelle, ainsi que Delambre l'a remarqué le premier, et comme on le verra par la suite.

La détermination exacte des latitudes exige que nous disions encore un mot du cercle répétiteur. Lorsque la lunette supérieure de cet instrument est bien équilibrée, et qu'il y a néanmoins un peu de jeu dans le collet qui embrasse l'axe d'acier autour duquel tourne cette lunette, il en résulte que les distances zénithales sont affectées d'une erreur dépendante de cette cause. On conçoit en effet que, dans la seconde observation conjuguée, la lunette qui se trouve renversée touche l'axe de rotation en un point opposé à celui où elle était en contact lors de la première observation, et que la ligne de foi du vernier doit alors rétrograder sur le limbe pour que l'axe optique se trouve ramené exactement sur l'étoile. Mais on détruit l'erreur dont il s'agit en observant, comme nous venons de le dire, une latitude au moyen de deux étoiles situées l'une au nord, l'autre au sud du zénith, et à fort peu près à la même distance de ce point, supposé toutefois que les positions de ces deux étoiles soient parfaitement connues; car, dans le premier cas, la latitude est trop grande de plusieurs secondes, et dans le second cas elle est plus petite de la même quantité; d'où il résulte essentiellement que la demi-somme des deux résultats est la latitude véritable.

Ce procédé a en outre l'avantage de corriger la latitude cherchée d'une autre erreur toute semblable qui pourrait provenir d'une flexion

de la lunette, occasionnée par le poids de l'objectif ou de l'oculaire. C'est probablement à l'une de ces causes, ou à toutes deux ensemble, que sont dues en grande partie les discordances entre les observations d'une même latitude avec différents instruments d'une construction parfaite.

Quelques astronomes ont conseillé d'observer les distances zénithales d'un astre vu directement et par réflexion. Dans ce but, on se procure une surface horizontale réfléchissante, en mettant dans le vertical de l'astre et à distance convenable du cercle, une cuvette remplie de mercure et garantie de l'action de l'air, afin que l'image de l'étoile n'y paraisse agitée que par sa propre scintillation. Il s'agit de savoir maintenant si, en prenant comme à l'ordinaire la distance zénithale de l'étoile vue directement, puis la distance zénithale de son image réfléchie, ces deux angles seront affectés de la même erreur, positive ou négative. Or, il n'est pas difficile de voir qu'en tant que l'on ne considère que le jeu du collet de la lunette dont nous venons de parler, chacune de ces distances zénithales aura été trop petite de la même quantité; ou, ce qui est de même, la distance au nadir de l'étoile vue par réflexion et prise en commençant l'observation par la gauche (si le limbe est gradué de gauche à droite), sera plus grande d'un même nombre de secondes que la distance au zénith de l'étoile sera plus petite : ainsi la latitude moyenne déduite de ces deux séries d'observations sera tout à fait dégagée de l'erreur de l'instrument.

Au surplus, on obtient directement la véritable hauteur de l'étoile au-dessus de l'horizon, en commençant par observer l'image réfléchie, le limbe étant à droite et la lunette étant à zéro; puis en détachant cette lunette pour la diriger sur l'étoile même, parce que l'arc parcouru est exactement le double de la hauteur cherchée. Mais il est très-utile de prolonger la série jusqu'à ce qu'on ait au moins le décuple de cette hauteur. De cette manière le limbe reste à la droite de l'observateur et ne quitte jamais le vertical de l'étoile, ce qui est un grand avantage dans la pratique.

Des observations de ce genre ont été faites en 1826 à deux des stations du parallèle de Paris, avec un très-bon cercle astronomique de M. Gambey, et elles prouvent que les latitudes qui en ont été conclues sont d'une grande précision. En effet la latitude de Longeville,

déterminée par la Polaire vue directement, a été trouvée de.	48°44′13″,92
et vue par réflexion, de	48.44. 0 ,89
De là, *latitude moyenne*	48.44. 7 ,40
Par trois étoiles australes observées comme de coutume, on a eu	48.43.59 ,08
et la Polaire vue directement ayant donné	48.44.13 ,92
il s'ensuit que la *latitude moyenne* est de	48.44. 6 ,50

C'est donc à 0″,9 près le même résultat que le précédent. (Voyez *Nouv. descript. géomét. de la France*, tome II, page 397.)

315. Quand on observe un grand nombre d'étoiles, le calcul des latitudes s'abrége considérablement à l'aide des tables générales que Delambre a données dans la *Connaissance des Temps* de l'an XII. Nous avons seulement inséré ici deux de ces tables, parce qu'elles suffisent à la rigueur : elles sont comprises sous le numéro XVI, 1re et 2e partie, et elles donnent respectivement les facteurs $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$ et $\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$ des premier et deuxième termes de la correction x. Ainsi le calcul sera réduit à celui des autres facteurs

$$\frac{\cos D\cos H}{\sin(D-H)} = F, \quad \text{et} \quad \left[\frac{\cos D\cos H}{\sin(D-H)}\right]^2 \cot(D-H) = f,$$

dépendants seulement de la déclinaison et de la latitude.

Pour exemple de l'usage de ces tables, cherchons derechef la réduction précédente, obtenue par une table particulière. On aura d'abord, en vertu des valeurs de D et de H, et en se conformant aux remarques de l'art. **46**,

$$\begin{aligned} \log\cos D &= 8{,}49101 \\ \log\cos H &= 9{,}84037 \\ \text{comp.}\log\sin(D-H) &= 0{,}17409 \\ \hline \log F &= 8{,}50547 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\log F = 7{,}01094 \\ & \qquad \log\cot.(D-H) = 0{,}04484 \\ & \qquad \log f = 7{,}05578 \end{aligned}$$

Ensuite on achèvera l'opération ainsi qu'il suit :

Angles horaires.	Table XVI, 1re partie.	Table XVI, 2e partie.
13m 6s.	336″9	0″27
8. 2	126,7	0,04
5.47	65,7	0,01
3.47	28,1	0,00
2.16	10,1	0,00
0.39	0,8	0,00
1.38	5,2	0,00
3.44	27,4	0,00
5.40	63,0	0,01
8. 0	125,7	0,04
10.23	211,6	0,11
12.54	326,7	0,26
	— 1327″9	+ 0″74

log 1327,9...	3,12317	log 0,74...	9,86923
comp. log. 12...	8,92082	....	8,92082
log. F...	8,50547	log f...	7,05578
— 3,544	0,54946	+ 0,000	5,84583
		— 3,544	

Réduction = — 3″544;

c'est-à-dire que vis-à-vis les douze angles horaires, on mettra les 24 nombres que fournit la table XVI, 1re et 2e partie, ayant ces angles pour arguments. La somme de la première colonne sera — 1327,9, parce que l'on a observé le passage supérieur : cette somme, au contraire, serait positive dans les passages observés au-dessous du pôle. Quant à la somme de la deuxième colonne, elle est toujours positive, et dans le cas actuel, elle = + 0,74.

Au-dessous des logarithmes de ces deux sommes, écrits séparément, on mettra le complément arithmétique du logarithme du nombre des observations, puis les logarithmes de F et de f calculés ci-dessus. Enfin, on fera deux sommes de ces logarithmes, et la réduction sera

$= - 3'',544 + 0'',000$, c'est-à-dire qu'elle sera réduite à son premier terme, puisque le deuxième est insensible. Ce résultat est, à un millième de seconde près, le même que par la table particulière, et la méthode qui y conduit est à la fois simple et rapide. Si l'on construisait des tables sur les facteurs F et f, on abrégerait encore de beaucoup la recherche de la réduction dont il s'agit.

Il est essentiel de ne pas pousser trop loin la série des observations, parce que quand la distance de l'astre au zénith est petite et que les angles horaires sont un peu grands, la moindre erreur sur le temps de l'observation influe d'une manière sensible sur la réduction, et par conséquent sur la distance réduite; mais en cessant les observations aussitôt que la réduction s'accroît de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{1}{3}$ de seconde pour une seconde de temps, comme il arrive à quelques minutes du méridien et quand l'astre est fort élevé, on trouve cette réduction avec la plus grande exactitude.

316. Le savant astronome dont nous expliquons la méthode a calculé sur la formule $\sin P = \frac{dx}{15\,dP} \frac{\sin(D-H)}{\cos D \cos H}$ que l'on obtient en différenciant par rapport à P, le premier terme de la valeur de x (art. **310**), une table qui fait connaître les valeurs de l'angle horaire P, lorsque la réduction varie d'une seconde de degré à chaque seconde de temps : on s'assure, par ce moyen, de la durée que l'on peut donner aux observations. Nous engageons le lecteur à recourir, pour de plus amples détails sur cet objet, à la *Connaissance des Temps* de l'an XII ou à la *Base du Système métrique*, tome II, page 205.

La série des observations devant être faite dans un intervalle de temps fort court, on trouvera un grand avantage à remarquer sur le cercle azimutal de l'instrument, la direction du vertical de l'étoile que l'on observe, afin de pouvoir amener facilement cette étoile dans le champ de la lunette. On calculera pour cet effet une table d'azimut pour différentes déclinaisons et différents angles horaires, et l'on placera en outre, près du cercle, une ficelle horizontale dans la direction de l'alidade supérieure lorsqu'elle sera pointée sur l'astre; cette ficelle indiquera la hauteur de l'astre durant l'observation.

Reste à faire voir sur quelle formule on pourra établir une table

d'azimut. Or, dans le triangle sphérique ZPE (*fig.* 17), on a (art. 65)

$$\cot A = \frac{\sin (PZ) \cot (PE)}{\sin P} - \cot P \cos (PZ);$$

mais, à cause de $PZ = 1^q - H$, de $PE = 1^q - D$, et de $QZE = 2^q - A = V$, cette formule se change en

$$\cot V = \cot P \sin H - \frac{\cos H \operatorname{tang} D}{\sin P};$$

donc si l'on met, au lieu de cot V, sa valeur $\frac{1}{\operatorname{tang} V}$, et qu'on réduise les termes du second membre au même dénominateur, on aura, pour l'azimut V de l'astre, compté du sud,

$$\operatorname{tang.azimut} V = \frac{\text{séc } H \sin P \cot D}{\operatorname{tang} H \cos P \cot D \mp 1},$$

le signe supérieur étant pour les étoiles que l'on observe au méridien, au-dessus de l'équateur et du pôle, et le signe inférieur pour celles qu'on observe au-dessous.

Outre une ficelle horizontale dont Delambre faisait usage pour indiquer la hauteur de l'étoile, il employait ordinairement deux autres ficelles verticales servant à marquer la direction du méridien; car l'instrument prenant dans les observations conjuguées deux positions parallèles et distantes de quelques centimètres l'une de l'autre, il faut deux méridiennes verticales pareillement espacées. Mais quand on observe la Polaire, son azimut varie si lentement qu'il suffit de le tracer distinctement sur le cercle azimutal; parce qu'en y amenant ensuite le plan de l'instrument, on retrouve l'étoile avec assez de facilité, même sans ficelle directrice.

317. Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent sur la manière d'effectuer les réductions au méridien, suppose que la pendule est réglée sur le temps sidéral; mais il peut arriver qu'elle ne le soit pas, par deux causes, ou parce qu'elle ne marque pas exactement 24^h entre deux passages consécutifs d'une même étoile au méridien, ou

bien parce qu'elle ne marque pas $0^h 0^m 0^s$ quand le point équinoxial passe au méridien, quoique suivant le mouvement sidéral.

Dans ce dernier cas, si la pendule est en retard, il faudra retrancher de l'ascension droite apparente la quantité dont elle retarde, et le reste sera l'heure du passage de l'étoile au méridien en temps de la pendule; c'est ce qui a eu lieu dans l'exemple précédent : si elle est en avance, on ajoutera son avance absolue; cela est de toute évidence.

Dans le premier cas, il faudra connaître de combien la pendule avance ou retarde dans l'espace de 24^h. Supposons un retard diurne exprimé par ρ, et que P' soit l'un des angles horaires trouvés comme ci-dessus; cet angle, donné en temps de la pendule, différera du véritable angle horaire P, d'une quantité proportionnelle à ρ. On dira donc

$$24^h - \rho : 24^h :: P' : P = \frac{24P'}{24-\rho} = P' + \frac{\rho P'}{24-\rho};$$

mais ρ étant toujours une petite quantité exprimée en secondes, on a

$$P = P' + \frac{\rho P'}{86400-\rho} = P'\left(1 + \frac{\rho}{86400-\rho}\right) = P'(1+\rho'),$$

en faisant $\frac{\rho}{86400-\rho} = \rho'$, pour abréger.

Introduisant cette valeur de P dans la formule (2), et observant que P' et ρ' sont très-petits, il viendra

$$x = -\frac{\cos D \cos H.(1+2\rho')}{\sin(H-D)} \cdot \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P'}{\sin 1''} + \text{etc.};$$

en effet, on a sensiblement

$$\sin\tfrac{1}{2}P = (1+\rho')\sin\tfrac{1}{2}P', \text{ et } \sin^2\tfrac{1}{2}P = (1+\rho')^2\sin^2\tfrac{1}{2}P' = (1+2\rho')\sin^2\tfrac{1}{2}P'.$$

Tout cela suppose encore que la déclinaison D est constante durant l'observation, ce qui est vrai pour les étoiles, mais non pas pour le Soleil. Voici alors comme on tient compte du mouvement de cet astre en déclinaison.

Soient PQ (*fig.* 18) le méridien du lieu, Z le zénith, et S la position du Soleil au commencement de l'observation. Si cet astre décrivait le parallèle S*r*, la distance zénithale ZS, réduite au méridien par la formule précédente, serait représentée par Z*r*; mais le Soleil parcourant au contraire l'arc SS′, rencontre le méridien en un point S″ différent de *r*. La distance zénithale Z*r* est donc trop grande de la quantité *r*S″ qu'il s'agit d'évaluer. Or, *r*S″ est l'accroissement de la déclinaison correspondant à l'angle horaire SPZ, et qu'on peut supposer proportionnel au temps. Ainsi, connaissant la variation en déclinaison pour 1^m, on multipliera cette variation relative par le nombre de minutes contenues dans l'angle horaire pour lequel on veut calculer l'accroissement de déclinaison. Dans l'hypothèse de la figure, le Soleil se rapproche du pôle boréal : ainsi la correction *r*S″ est soustractive de la distance zénithale avant midi; elle est au contraire additive à cette distance après midi, puisque la distance méridienne $ZS'' = Zr' + r'S''$.

On abrégera singulièrement ce calcul en prenant négativement la somme des angles horaires avant midi, et positivement celle des angles horaires après le passage; puis divisant leur différence par leur nombre, qui est celui des observations; alors le quotient sera l'angle horaire moyen par lequel on multipliera la variation en déclinaison pour 1^m, afin d'avoir la correction cherchée. On fera autant que possible le même nombre d'observations avant et après le passage au méridien, et à des temps également éloignés de midi. L'exemple suivant éclairera parfaitement ce que ces remarques peuvent laisser à désirer.

Observation et calcul d'une latitude, par les distances circomméridiennes du Soleil.

318. Le 15 décembre 1813, nous prîmes, au Dépôt de la Guerre, des distances méridiennes du centre du Soleil, et nous sûmes, par les hauteurs absolues du même jour et de la veille (art. **302**), que le midi vrai fut annoncé à la pendule à $11^h55^m47^s,8$; nous formâmes en conséquence le tableau suivant :

Passage au méridien à $11^h 55^m 47^s,86$, temps de la pendule.

NOMBRE des observat.	DISTANCE ZÉNITHALE moyenne apparente du centre du Soleil.	INSTANTS des observations donnés par la pendule.	ANGLES horaires en temps de la pendule	RÉDUCTIONS au méridien, en secondes de degré. table XVI, 1er terme.	RÉDUCTIONS au méridien, en secondes de degré. table XVI, 2e terme.
1	....	$11^h 46^m 25^s$	$9^m 23^s$	− 172″9	+ 0″07
2	....	47.21	8.27	140,2	0,05
3	....	49.26	6.22	79,6	0,01
4	....	50.40	5. 8	51,7	0,01
5	....	51.50	3.58	30,9	0,00
6	....	53. 9	2.39	13,8	0,00
7	....	54.26	1.22	3,7	0,00
8	....	55.32	0.16	0,1	0,00
9	....	56.51	−1. 3	2,2	0,00
10	$\delta = 72°7'\,36'',84$	58. 9	2.21	10,8	0,00
11	....	59.25	3.37	25,7	0,00
12	....	12. 0.49	5. 1	49,4	0,01
13	....	2. 6	6.18	77,9	0,01
14	....	2.59	7.11	101,3	0,02
15	....	6.16	10.28	215,1	0,11
16	....	7.35	11.47	272,6	0,17
17	....	9.40	13.52	377,4	0,34
18	....	10.45	14.57	438,7	0,46
19	....	12.39	16.51	557,4	0,75
$n = 20$	....	13.38	17.50	624,4	0,94
	Barom. = 28po. Therm. = + 4° (Réaumur).		Somme...	$nx = 3245''8$	$ny = 2''95$

Latitude approchée $H = 48°51'40''$; longitude ouest $M = 4^s$ (en temps).

On trouve, dans la *Connaissance des Temps*, la variation diurne en déclinaison de $2'54''$; partant,

$$\pm \text{ variation pour } 1^m = 0'',12\,;$$

cette dernière variation s'affecte du signe + lorsque le Soleil va vers

le nord, et du signe — dans le cas contraire, comme dans le cas actuel.

Faisant la somme des angles horaires, on a

Avant midi.	Après midi.
$m = 37^{m},35$,	$s = 1^{h}51^{m}16$;

de là

$$\text{angle horaire moyen } \frac{s-m}{n} = 3^{m},69$$

multipliant pas le mouvement en D, pour 1^{m} $\quad - 0'',12$

on a $\quad$ correction en déclinaison $= - 0'',44$.

On sait, par l'art. **302**, que l'avance de la pendule en 24^{h} solaires vraies était de 29^{s}; ainsi, prenant dans ce cas ρ négativement, on a $\rho = -29^{s}$; d'ailleurs, en général, $\rho' = \frac{\rho}{86400 - \rho}$; mais ρ étant négatif, on a

$$\rho' = -0,000335, \quad \text{et} \quad 1 + 2\rho' = 0,999665.$$

On trouve en outre

facteur barométrique	= 0,999
facteur thermométrique	= 1,060
produit...	1,0589
réfraction moyenne	179'',04
produit ou réfraction vraie	3'9'',6.

Il reste encore un élément essentiel à déterminer, c'est la déclinaison D du Soleil à midi vrai, le 15 décembre 1813. La *Connaissance des Temps* donne $D = 23°17'15''$ pour le méridien de l'Observatoire royal; mais cette valeur n'est pas assez exactement calculée pour la faire servir à la recherche de la vraie latitude du Dépôt de la Guerre : en effet, par les Tables solaires de Delambre, nous avons eu (art. **244**)

$$\text{déclinaison apparente } D = 23°17'12'',87.$$

D'ailleurs, $\quad H = 48.51.40$;

et puisque la déclinaison est australe, on a, en la prenant négati-

vement,

$$H - D = 72^\circ 8' 53''.$$

Maintenant, on calculera la réduction totale au méridien ainsi qu'il suit :

$\text{l.cos } D =$	$9{,}96309$		
$\text{l.cos } H =$	$9{,}81815$		
$\text{l.}(1 + 2\rho') =$	$9{,}99985$	$2\log F =$	$9{,}60504$
$\text{c. sin } (H - D) =$	$0{,}02143$	$\text{l.cot } (H - D) =$	$0{,}45203$
$\log . F =$	$9{,}80252$	$\log f =$	$0{,}05707$
$\log nx =$	$3{,}51132\ -$	$\log ny =$	$0{,}46982\ +$
$\text{c.log } n =$	$8{,}69897$	$\text{c.log } n =$	$8{,}69897$
$\log$ 1er terme $=$	$2{,}01281\ -$	$\log$ 2e terme $=$	$9{,}22586\ +.$

Ainsi,

1er terme $= -$	$1'43'',00$
2e terme $= +$	$0\ ,17$
Réduction au méridien $= -$	$1'42'',83.$

En définitive, on a

Distance zénithale apparente. . . . . δ	$=$	$72^\circ\ 7'36'',84$
Réduction au méridien	$=-$	$1.42\ ,83$
Correction en déclinaison	$=-$	$0\ ,44$
Distance méridienne apparente.	$=$	$72^\circ\ 5.53\ ,57$
Réfraction vraie	$=+$	$3.\ 9\ ,60$
Parallaxe de hauteur.	$=-$	$8\ ,23$
Distance méridienne vraie géocentrique . . .	$=$	$72.\ 8.54\ ,94$
Déclin. appar. du ⊙ lors du passage, D. .	$=-$	$23.17.12\ ,87$
Latitude cherchée	$=$	$48^\circ 51'42'',07.$

Il faudrait plusieurs centaines d'observations de ce genre pour être bien certain d'une latitude; mais comme il peut exister une petite erreur sur l'obliquité de l'écliptique, il est préférable de se rendre indépendant de cet élément, en observant les deux passages de la Polaire, de β ou δ de la petite Ourse, et en outre des étoiles australes situées à mêmes distances du zénith (art. **314**). Quand les écarts

autour de la moyenne de toutes les observations sont très-petits, comme d'une seconde, il est probable alors que la latitude a été déterminée à ce degré de précision.

Application de la méthode précédente à la détermination de l'obliquité de l'écliptique.

319. Les distances méridiennes du Soleil, prises aux environs des solstices et pendant plusieurs jours de suite, font connaître l'obliquité de l'écliptique avec une très-grande précision; car ces distances différant très-peu de la déclinaison solsticiale qui mesure cette obliquité, il est possible d'évaluer rigoureusement la correction qui leur est relative : c'est en cela que consiste la *réduction au solstice*.

Pour donner une idée de cette méthode, à laquelle nous ne nous arrêtons que par occasion, supposons qu'on ait fait une série d'observations méridiennes du Soleil, huit jours avant et huit jours après le solstice, dans un lieu dont la latitude est bien connue, et qu'on veuille en déduire la déclinaison solsticiale.

Soient D la déclinaison du Soleil donnée par l'une des séries d'observations dont il s'agit, et par le procédé expliqué à l'art. **318**; ω l'obliquité apparente de l'écliptique déterminée par les tables (art. **244**). Dans cette hypothèse, l'excès de ω sur D est très-petit, et $90^\circ - \odot$, ou $\odot - 90^\circ$, selon que l'observation précède ou suit le solstice d'été, sera aussi une quantité très-petite. Mais en général

$$\sin D = \sin \omega \sin \odot;$$

par conséquent, pour le cas particulier que l'on considère, l'on a, en faisant $\omega - D = x$, et $90 - \odot = u$,

$$\sin(\omega - x) = \sin\omega \cos u.$$

Reste à obtenir x en série qui procède suivant les puissances de u. Or, on a d'abord

$$\sin(\omega - x) - \sin\omega = -2\sin\omega \sin^2 \tfrac{1}{2} u;$$

si donc on fait $-2\sin\omega\sin^2\frac{1}{2}u = q$, on aura, par l'art. **102**,

$$\frac{dx}{dq} = -\frac{1}{\cos(\omega - x)},$$
$$\frac{d^2x}{dq^2} = -\frac{\operatorname{tang}(\omega - x)}{\cos^2(\omega - x)},$$
$$\frac{d^3x}{dq^3} = -\frac{1 + 2\sin(\omega - x)\cos(\omega - x)\operatorname{tang}(\omega - x)}{\cos^5(\omega - x)};$$

puis faisant $x = 0$, dans ces coefficients différentiels, il viendra

$$\left(\frac{dx}{dq}\right) = -\frac{1}{\cos\omega},\quad \left(\frac{d^2x}{dq^2}\right) = -\frac{\operatorname{tang}\omega}{\cos^2\omega},$$
$$\left(\frac{d^3x}{dq^3}\right) = -\frac{1 + 2\sin\omega\cos\omega\operatorname{tang}\omega}{\cos^5\omega};$$

de là, en parties du rayon,

$$\begin{aligned} x &= 2\operatorname{tang}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}u - 2\operatorname{tang}^3\omega\sin^4\tfrac{1}{2}u \\ &\quad + \tfrac{4}{3}\left(\frac{\operatorname{tang}^3\omega}{\cos^2\omega} + 2\operatorname{tang}^5\omega\right)\sin^6\tfrac{1}{2}u - \ldots \\ &= 2\operatorname{tang}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}u - 2\operatorname{tang}^3\omega\sin^4\tfrac{1}{2}u \\ &\quad + \tfrac{4}{3}(\operatorname{tang}^3\omega + 3\operatorname{tang}^5\omega)\sin^6\tfrac{1}{2}u - \ldots \end{aligned}$$

Si l'on mettait pour $\sin\frac{1}{2}u$ sa valeur en série, et qu'on réduisît, on tomberait sur la valeur de x donnée par Delambre; mais il est un moyen très-direct et très-élémentaire d'y parvenir, c'est de procéder comme à l'art. **99**. D'abord, à cause de $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \ldots$, on a

$$\sin(\omega - x) = \sin\omega\left(1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\right);$$

ainsi l'on peut supposer en général

$$\omega - x = \omega + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + \ldots$$

Or, pour déterminer les coefficients A, B, C, ..., il ne s'agit que de prendre le sinus de chaque membre de cette série hypothétique, puis

d'égaler terme à terme le développement du second membre avec celui de la première série. Effectuant cette opération, il vient

$$\sin(\omega - x) = \sin\omega\cos(\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u^4 + \mathrm{C}u^6\ldots) + \cos\omega\sin(\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u^4 + \mathrm{C}u^6\ldots);$$

et comme

$$\cos m = 1 - \frac{m^2}{2} + \ldots, \quad \sin m = m - \frac{m^3}{2.3} + \ldots,$$

on a

$$\sin(\omega - x) = \sin\omega + \mathrm{A}\cos\omega \mid u^2 - \frac{\mathrm{A}^2}{2}\sin\omega + \mathrm{B}\cos\omega \mid u^4 - \mathrm{AB}\sin\omega + \mathrm{C}\cos\omega - \frac{\mathrm{A}^3}{6}\cos\omega \mid u^6$$

Maintenant, faisant la comparaison indiquée, on trouve

$$\mathrm{A} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\omega,$$
$$\mathrm{B} = \tfrac{1}{24}\,\mathrm{tang}\,\omega + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{tang}^3\,\omega,$$
$$\mathrm{C} = -\tfrac{1}{720}\,\mathrm{tang}\,\omega - \tfrac{1}{24}\,\mathrm{tang}^3\,\omega - \tfrac{1}{16}\,\mathrm{tang}^5\,\omega;$$

et enfin, en parties du rayon,

$$\omega - x = \omega - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\omega.\,u^2 + \left(\frac{\mathrm{tang}\,\omega}{24} + \frac{\mathrm{tang}^3\,\omega}{8}\right)u^4 - \left(\frac{\mathrm{tang}\,\omega}{720} + \frac{\mathrm{tang}^3\,\omega}{24} + \frac{\mathrm{tang}^5\,\omega}{16}\right)u^6\ldots$$

Si l'on voulait que u, qui est la distance au solstice sur l'écliptique, fût exprimée en unités de dizaines de minutes, ce qui serait plus commode pour construire une table, il faudrait dire

$$10' : 1 :: \frac{u''}{60} : u = \frac{u''}{600}.$$

Ainsi, $u'' = 600\,u$ serait alors la quantité à mettre dans la série précédente à la place de u exprimée en secondes. Il est entendu alors que pour rétablir l'homogénéité et avoir x en secondes de degré, il faut en général, au lieu de u^n, écrire $u^n\,(\sin 1'')^{n-1}$.

Les observations de chaque jour font connaître la valeur de x avec une très-grande précision, c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à la déclinaison apparente observée pour avoir la déclinaison solsticiale; on corrige ensuite ce résultat de l'effet de la latitude du Soleil (art. 244), et l'on obtient l'obliquité apparente de l'écliptique; enfin, on dégage cette obliquité de la nutation luni-solaire, et l'on a l'obliquité moyenne pour l'époque de l'observation. La moyenne de tous les résultats partiels exprime l'obliquité moyenne correspondante à l'époque moyenne de la durée des observations.

On ne sait pas précisément à quoi tient la petite différence que l'on trouve entre les résultats des observations solsticiales d'hiver et celles d'été; mais l'on est porté à accorder plus de confiance à ces dernières, parce que le Soleil se trouve alors à une hauteur où l'on a bien moins à craindre l'influence de l'erreur des tables de réfraction.

Détermination de la latitude géographique, par les digressions de la Polaire.

320. La méthode la plus sûre pour déterminer la latitude d'un lieu, est sans contredit celle qui est fondée sur l'observation des deux passages d'une même étoile circompolaire au méridien de ce lieu; cependant cet élément géographique se détermine encore avec beaucoup d'exactitude par l'observation de l'étoile polaire, à l'époque de sa plus grande digression orientale ou occidentale, c'est-à-dire au moment de son plus grand éloignement du méridien, surtout lorsque la déclinaison de cette étoile est bien connue. Mais il n'est pas du tout nécessaire de choisir ce moment pour avoir une bonne latitude, on peut au contraire observer l'étoile en un point quelconque de son parallèle, en choisissant l'heure la plus favorable de la nuit lorsque le pouvoir amplificatif de la lunette du cercle ne permet pas de voir l'étoile de jour. M. Littrow a donné le premier, pour ce cas général, une formule dont j'ai publié en 1823 et 1827 diverses démonstrations, mais à laquelle on parvient très-simplement de la manière suivante :

Soient H la latitude cherchée; Δ la distance polaire de l'étoile; P l'angle horaire correspondant à l'instant moyen des observations; Z la distance zénithale qui correspond précisément à l'angle horaire P; z la

distance zénithale moyenne, corrigée de la réfraction et donnée par le cercle répétiteur, en divisant l'arc total parcouru par le nombre n des répétitions; enfin $Z+u=90^\circ-H$, auquel cas u sera, comme Δ, un très-petit arc. On a d'abord l'équation

$$(1) \qquad \cos Z = \cos(Z+u)\cos\Delta + \sin(Z+u)\sin\Delta\cos P,$$

de laquelle il faut tirer la valeur de u procédant suivant les puissances ascendantes de Δ, et c'est ce qui peut se faire directement; mais, pour opérer de la manière la plus simple, remplaçons $Z+u$ par sa valeur $90^\circ-H$, et il viendra

$$(1') \qquad \cos Z = \sin H\cos\Delta + \cos H\sin\Delta\cos P.$$

Or Z devenant égal à $90^\circ-H$ lorsque la distance polaire Δ est nulle, on peut supposer, comme à l'art. 99,

$$Z = 90^\circ - H + \alpha\Delta + \beta\Delta^2 + \gamma\Delta^3 + \ldots$$

ou, par le théorème de Maclaurin,

$$(2) \qquad Z = 90^\circ - H + \left(\frac{dZ}{d\Delta}\right)\Delta + \left(\frac{d^2Z}{d\Delta^2}\right)\frac{\Delta^2}{2} + \left(\frac{d^3Z}{d\Delta^3}\right)\frac{\Delta^3}{2.3} + \ldots$$

Reste donc à tirer de $(1')$ les valeurs générales des coefficients différentiels et à y faire ensuite à la fois $\Delta=0$, $Z=90^\circ-H$, pour les introduire dans cette dernière série. Toute opération terminée, on a

$$\left(\frac{dZ}{d\Delta}\right) = -\cos P,\quad \left(\frac{d^2Z}{d\Delta^2}\right) = \sin^2 P \operatorname{tang} H,\quad \left(\frac{d^3Z}{d\Delta^3}\right) = \sin^2 P\cos P\,(1+3\operatorname{tang}^2 H),$$

et par suite

$$(2') \qquad Z = 90^\circ - H - \Delta\cos P + \tfrac{1}{2}\Delta^2\sin^2 P\operatorname{tang} H + \tfrac{1}{2}\Delta^3\sin^2 P\cos P\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{tang}^2 H\right).$$

Ce résultat nous apprend qu'à très-peu près $H = 90^\circ - Z - \Delta\cos P$, ou, ce qui est de même, que

$$\operatorname{tang} H = \cot Z - \frac{\Delta\cos P}{\sin^2 Z};$$

introduisant cette valeur dans (2′), on aura définitivement, en s'arrêtant aux termes du 3e ordre,

$$Z = 90^\circ - H - \Delta \cos P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin^2 P \cot Z - \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 P \cos P;$$

ainsi il est évident que

$$u = \Delta \cos P - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin^2 P \cot Z + \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 P \cos P.$$

D'un autre côté, en rapportant toutes les observations à l'instant du milieu, on a (art. 308)

$$Z = z - \frac{d^2Z}{dP^2}\sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\delta P}{n \sin 1''},$$

n étant le nombre des répétitions : ainsi en différentiant deux fois de suite la série (2′), il vient

$$\frac{dZ}{d\Delta} = \Delta \sin P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin 2P \cot z, \qquad \frac{d^2Z}{d\Delta^2} = \Delta \cos P + \Delta^2 \cos 2P \cot z,$$

et l'on a définitivement

$$(3)\left\{\begin{aligned} H = 90^\circ - z - \Delta \cos P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin 1'' \sin^2 P \cot z - \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 1'' \sin^2 P \cos P \\ + (\sin \Delta \cos P + \sin^2 \Delta \cos 2P \cot z)\sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\delta P}{n \sin 1''}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons supposé, dans tout ce calcul, la distance zénithale z constante, parce qu'en effet elle varie très-peu pendant la durée d'une série. On évaluera promptement les termes des 2e et 3e ordres, en faisant usage de la table XVII qui donne les log. des facteurs $\frac{1}{2} \sin 1'' \sin^2 P$, $\frac{1}{3} \sin^2 1'' \sin^2 P \cos P$, et que nous désignerons respectivement par E, G. Nous ferons en outre $\sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\delta P}{n \sin 1''} = F$, facteur dont on trouve la valeur comme s'il s'agissait d'un passage au méridien, et par conséquent au moyen de la table XVI, 1re partie.

EXEMPLE.

Le 13 août 1822, vingt observations de la Polaire faites à Étampes nous ont donné pour l'époque moyenne au chronomètre $9^h16^m\ 3^s,5$

nous ont donné pour l'époque moyenne au chronomètre	$9^h16^m\ 3^s,5$
mais à cause du retard de.	9.51 ,3
l'heure du milieu de l'intervalle, temps moyen, est de.	9.25.54 ,8
laquelle étant ôtée de l'heure du passage supérieur au méridien, savoir.	15.29.55 ,5
on a pour l'angle horaire à l'est, temps moyen . . .	6. 4. 0 ,7
Ajoutant la réduction au temps sidéral (table V). .	+ 59 ,8
il vient pour l'angle horaire en temps sidéral . . .	6. 5. 0 ,5
ou compté du sud à l'ouest . . . . . P =	17.54.55 ,5
et en degrés . . . . . P =	263°44′53″;

quant à la distance zénithale moyenne, corrigée de la réfraction,

$$z = 41^\circ 37' 42'',24,$$

et la distance polaire apparente, tirée des Éphémérides de M. Schumacher, était, à l'époque de l'observation,

$$\Delta = 1^\circ 38' 25'',7 = 5903'',7;$$

enfin nous avons eu

$$F = 172'',14.$$

Avec ces données, si l'on opère à l'aide des logarithmes et de la table citée, qui a pour argument $T = P - 12^h = 5^h54^m59^s,5 = 5^h54^m98$, on aura, au moyen de la formule (3),

1er terme.	2e terme.	3e terme.
$\log \Delta = 3,7711243-$	$2 \log \Delta = 7,5422+$	$3 \log \Delta = 1,3133-$
$\mathrm{l.cos}\, P = 8,3394279-$	$\mathrm{l.cot}\, z = 0,0512$	$\log G = 7,2325-$
$2,1105522+$	$\log E = 4,3842$	$8,5458+$
$+128'',98$	$1,9776$	$+0'',03$
	$+94'',97$	

RÉCAPITULATION.

$$
\begin{array}{lll}
1^{\text{er}} \text{ terme} & + & 128'',98 \\
2^{\text{e}} & + & 94,97 \\
3^{\text{e}} & + & 0,03 \\
\hline
-u = & + & 223,98 = 3'43'',98
\end{array}
$$

Il s'agit maintenant d'évaluer la correction de latitude,

$$(\sin \Delta \cos P + \sin^2 \Delta \cos 2P \cot z)\ F\,;$$

or on a

$$
\begin{array}{rlrl}
\log \sin 1'' = & 4,6856 & \log \sin^2 1'' = & 9,3712 \\
\mathrm{l}.\ \Delta \cos P = & 2,1106- & \mathrm{l}.\ \Delta^2 \cot z = & 7,5934 \\
\log F = & 2,2359+ & \mathrm{l}.\ \cos 2P = & 9,9996- \\
& 9,0321- & \log F = & 2,2339 \\
& & & 9,2001-
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
1^{\text{er}} \text{ terme} & = -0'',11 \\
2^{\text{e}} \text{ terme} & = -0,16 \\
\hline
\text{correct.} & = -0,27 \ldots\ldots -0'',27 \\
-u & = +\ 3'43,98 \\
90^{\circ} - z & = 48^{\circ}22.17,76 \\
\hline
\text{lat. cherchée } H & = 48^{\circ}26'\ 1'',47
\end{array}
$$

La correction de latitude est ici presque nulle, parce que l'observation de la série a été faite près du cercle horaire de 6^{h} et dans un très-court intervalle de temps; mais dans toute autre circonstance, cette correction ne serait pas à négliger, à moins qu'on ne groupât, comme nous l'avons dit, les observations de 4 en 4 ou de 6 en 6 au plus.

On remarquera que la table XVII a pour argument

$T = P$ pour le premier quart de cercle,
$T = 12^{\text{h}} - P$ pour le second quart,
$T = P - 12^{\text{h}}$ pour le troisième quart,
$T = 24^{\text{h}} - P$ pour le quatrième quart.

C'est par cette méthode d'observation, sinon par le calcul précédent, que MM. Arago et Mathieu ont vérifié la latitude de l'Observatoire, avec le grand cercle astronomique répétiteur de Reichenbach; latitude qu'ils ont trouvée de 48°50′13″,2, comme Delambre et Méchain l'avaient obtenue avec un cercle répétiteur de $0^m,43$ de diamètre, construit par Lenoir.

321. Avant de quitter le sujet qui nous occupe, nous ferons remarquer, d'après M. Littrow, qu'il est possible d'avoir une assez bonne latitude d'un lieu par des hauteurs d'un astre peu éloigné du méridien, lors même que l'on est privé d'une montre à secondes. Il suffit pour cela de faire usage du cercle azimutal du cercle répétiteur, ou du théodolite dont il a été parlé à l'art. **125**, en même temps qu'on observe la distance zénithale de l'astre; parce que la réduction au méridien de cette distance est une fonction de l'azimut correspondant de cet astre, et qu'une fois la distance méridienne trouvée et la déclinaison apparente de l'astre connue, la latitude cherchée en découle immédiatement. Voici d'ailleurs les formules relatives à ce procédé.

Soient, comme précédemment Z, le zénith, D la déclinaison apparente d'un astre S supposé dans l'hémisphère boréal, H la latitude cherchée; et appelons v l'azimut de l'astre compté du sud à l'ouest et correspondant à sa distance zénithale vraie Z; le triangle sphérique ZPS donnera

$$\sin D = \sin H \cos Z - \cos H \sin Z \cos v;$$

et si l'on observe à peu de distance du méridien, la réduction x à ce méridien, soustractive de la distance zénithale vraie Z, sera fonction de l'azimut v correspondant. Alors le théorème de Maclaurin donnera, dans la supposition que v est un arc d'un petit nombre de degrés,

$$x = \left(\frac{dZ}{dv}\right) v + \left(\frac{d^2Z}{dv^2}\right) \frac{v^2}{2} + \ldots,$$

et comme les valeurs des coefficients différentiels, tirées de l'équation ci-dessus, doivent répondre à $v = 0$, l'on trouvera sans peine

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) = 0, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d^2Z}{dv^2}\right) = \frac{\cos H \sin(H - D)}{2\cos D} = M,$$

d'où

$$x = Mv^2.$$

Maintenant, si l'on a recueilli trois distances zénithales de l'astre, corrigées de la réfraction, savoir, Z, Z', Z'', et qu'on nomme x', x'', les réductions correspondantes aux azimuts v', v''; que de plus on fasse

$$x' = x + \varepsilon, \quad x'' = x + \varepsilon',$$

et

$$v' = v + \alpha, \quad v'' = v + \alpha',$$

on aura

pour la 1[re] observation. . . $x = Mv^2$,
pour la 2[e]. . . . . $x' = M(v + \alpha)^2$,
pour la 3[e]. . . . . $x'' = M(v + \alpha')^2$,

et il est évident que les observations étant faites près du méridien, on a sensiblement $Z' - Z = \varepsilon$, $Z'' - Z = \varepsilon'$.

Éliminant M et v entre ces trois équations, il vient

$$v = \frac{\varepsilon'\alpha^2 - \varepsilon\alpha'^2}{2(\varepsilon'\alpha - \varepsilon\alpha')}, \quad M = \frac{\varepsilon\alpha' - \varepsilon'\alpha}{\alpha\alpha'(\alpha - \alpha')},$$

et enfin

$$x = \frac{(\varepsilon\alpha'^2 - \varepsilon'\alpha^2)^2}{4\alpha\alpha'(\alpha - \alpha')(\varepsilon'\alpha - \varepsilon\alpha')}.$$

Telle est la réduction au méridien qu'il fallait trouver, et dont la valeur numérique doit être ôtée de la première distance zénithale Z pour avoir la distance méridienne Cette solution est donc indépendante tout à la fois de la connaissance approchée de la latitude du lieu et du temps exact de l'heure du passage de l'astre au méridien. Elle se recommande surtout aux voyageurs qui se proposent de relever la position géographique des lieux qu'ils visitent rapidement.

Pour application, prenons un des exemples mêmes de M. Littrow; c'est-à-dire supposons la déclinaison apparente de la Polaire de $88°20' = D$, et les trois observations fictives suivantes,

Degrés du cercle azimutal.	Distances zénith. vraies de l'étoile.
$G = 28°39'47'',8$	$Z = 38°33'50'',6$
$G' = 30.14.\ 2,9$	$Z' = 38.20.23,8$
$G'' = 31.20.12,2$	$Z'' = 38.33.50,6$

on aura

$$G' - G = \alpha = +\ 94',25, \qquad Z' - Z = \varepsilon = -\ 13',45,$$
$$G'' - G = \alpha' = \ 160,40, \qquad Z'' - Z = \varepsilon' = \ 0.$$

De là, et à cause de $\varepsilon' = 0$, la réduction au méridien sera

$$x = \frac{-\varepsilon\alpha'^2}{4\alpha(\alpha - \alpha')}.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha' &= 2,20520 \\ & 2,20520. \\ \log\varepsilon &= 1,12872 - \\ \text{c.}\log 4\alpha &= 7,42366 \\ \text{c.}\log(\alpha - \alpha') &= 8,17947 - \\ \hline \log x &= 1,14225 + \end{aligned}$$

et

$$-x = -\ 13',873 = -\ 0°13'52'',38$$
$$Z = \ 38.33.50,60$$

distance zénithale méridienne $= 38.19.58,22$

De là, hauteur méridienne. . . $51.40.\ 1,78$

ôtant la distance polaire de l'étoile. . . . 1.40

on a, latitude cherchée $H = 50°\ 0'\ 1'',78$

laquelle est seulement de $1'',78$ plus forte qu'elle ne devrait être, puisque les azimuts ont été calculés pour la latitude de 50°; et cependant les observations extrêmes sont séparées par un intervalle de 2 heures.

Dans ce cas particulier, l'azimut de la Polaire, correspondant à la première observation, est $\frac{1}{2}(G'' - G)$ ou

$$v = \tfrac{1}{2}\alpha' = 80',2 = 1°20'12'' \text{ compté du nord.}$$

Il est inutile de dire que, pour rendre la méthode plus sûre, les angles Z, Z′, Z″, G, G′, G″, devront être, chacun, des moyennes entre quatre répétitions opérées en peu de minutes; et que cette méthode s'appliquerait à tout autre astre quelques moments avant ou après son passage au méridien, en ayant soin de rapporter les observations au centre de cet astre. Il se présente dans les voyages scientifiques plus d'une occasion où cette manière d'opérer serait la seule qui pût être employée.

Digression sur la recherche de la constante de la réfraction.

322. Les observations de latitude par les étoiles circompolaires, sont très-propres, par leur combinaison, à faire connaître la constante de la réfraction. En effet, si θ et θ' sont les réfractions aux distances zénithales apparentes z et z' de la Polaire, réduites au méridien, on aura en général, d'après l'art. **248**,

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \mathrm{M}\alpha + \mathrm{N}\alpha^2,\\ \theta' &= \mathrm{M}'\alpha + \mathrm{N}'\alpha^2;\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et si z est la distance méridienne lors du passage supérieur, que Δ et Δ' soient les distances polaires apparentes aux époques des deux passages, on aura, en désignant toujours par H la hauteur du pôle,

$$\begin{aligned}&\text{au passage supérieur } z + \theta + \Delta = 90 - \mathrm{H},\\ &\text{au passage inférieur } z' + \theta' - \Delta' = 90 - \mathrm{H};\end{aligned}$$

et de là,

$$2(90 - \mathrm{H}) = z + z' + \Delta - \Delta' + (\mathrm{M} + \mathrm{M}')\,\alpha + (\mathrm{N} + \mathrm{N}')\,\alpha^2.$$

Dans cette relation, les seules inconnues sont H et α; car d'une part $\Delta - \Delta'$ est la différence des distances polaires, qui est toujours connue avec assez d'exactitude, et qui est sensiblement nulle lorsque l'intervalle des deux passages n'est que de 12^h; d'autre part, les coefficients MM′, NN′ désignent des nombres connus, puisqu'ils dépendent de la distance zénithale, de la hauteur barométrique et de la température, trois quantités observées.

Deux autres étoiles circompolaires, telles que β et ζ de la petite

Ourse, donneraient deux autres relations pareilles à la précédente; ainsi l'on aurait en tout, trois équations entre deux inconnues. Mais comme alors leur combinaison peut se faire de plusieurs manières, on choisit les équations qui sont susceptibles de procurer des valeurs de α et de H, dépendantes le moins possible des erreurs commises dans le calcul des coefficients MM', NN'. Tel est, en peu de mots, le procédé par lequel on arriverait à la valeur de la constante α, employée à l'art. **249**. Cette valeur étant trouvée, on aura ensuite θ et θ', à l'aide des relations (1).

Il est un autre moyen de déterminer *à priori* la réfraction, pour une hauteur quelconque; le voici :

Vers l'époque du solstice d'été, on observe la distance méridienne du Soleil. Cette distance, comptée depuis le zénith jusqu'au centre de cet astre, sera très-peu influencée par la réfraction, à cause de sa grande hauteur au-dessus de l'horizon; ainsi, en la diminuant de la parallaxe de hauteur (art. **256**), on aura sa distance vraie géocentrique. Si donc l'on connaît la latitude du lieu par les passages supérieur et inférieur de la Polaire, la colatitude augmentée de la distance méridienne du Soleil sera sa distance polaire, qu'on pourra regarder comme constante pendant l'intervalle du soir au matin.

Supposons maintenant qu'on ait observé la distance zénithale du Soleil, lorsque cet astre est près de l'horizon; cette observation fera connaître l'angle horaire (art. **301**); et alors, dans le triangle sphérique dont les sommets sont au pôle, au zénith et au Soleil, on connaîtra deux côtés et l'angle compris; la distance zénithale vraie sera donc le troisième côté de ce triangle : enfin la différence de cette distance à celle observée et diminuée de la parallaxe de hauteur, sera la réfraction cherchée.

CHAPITRE V.

DISCUSSION DES ERREURS COMMISES SUR LA MESURE DES DISTANCES AU ZÉNITH, EU ÉGARD A LA PETITE INCLINAISON DU CERCLE ET AU DÉFAUT DE PARALLÉLISME DE L'AXE OPTIQUE.

---

323. Quelque précaution que l'on prenne pour bien disposer verticalement le limbe du cercle, on ne peut éviter une petite déviation qui cause quelquefois deux à trois minutes sexagésimales d'erreur dans la verticalité de cet instrument, lorsqu'on observe les distances des astres au zénith.

Soit OH (*fig.* 20) l'intersection de l'horizon avec le plan vertical HZO; soit en outre HEO la position du plan du limbe de l'instrument. Les points Z, Z′ étant également éloignés des extrémités de l'horizontale OH, l'arc ZZ′ mesurera l'angle O, ou l'inclinaison du plan du limbe sur le plan vertical; alors si E est le lieu apparent d'une étoile, sa véritable distance au zénith Z sera représentée par l'arc ZE, et non par la distance EZ′ observée sur l'instrument. Connaissant donc l'arc $ZZ' = I$, et $Z'E = Z$, on aura l'hypoténuse du triangle sphérique rectangle ZZ′E par l'équation

$$\cos ZE = \cos I \cos Z;$$

mais ZE ne surpassant Z′E que d'une quantité fort petite x; soit $ZE = Z + x$, et l'on aura

$$\text{(A)} \qquad \cos(Z + x) = \cos Z \cos I = \cos Z - 2 \cos Z \sin^2 \tfrac{1}{2} I.$$

Cette équation étant de la forme de celle (1), traitée à l'art. **310**, on

a tout de suite

$$x = \frac{2\cot Z \sin^2 \frac{1}{2} I}{\sin 1''} - \frac{2\cot^3 Z \sin^4 \frac{1}{2} I}{\sin 1''} + \ldots$$

Autrement développant le premier membre de l'équation (A), il vient d'abord

$$\cos Z \cos x - \sin Z \sin x = \cos Z \cos I;$$

ensuite

$$\sin Z \sin x = \cos Z (\cos x - \cos I) = 2\cos Z (\sin^2 \tfrac{1}{2} I - \sin^2 \tfrac{1}{2} x).$$

Puis, divisant les deux membres par $\sin Z$, on a

$$\sin x = 2\cot Z \sin^2 \tfrac{1}{2} I - 2\cot Z \sin^2 \tfrac{1}{2} x.$$

Mais x étant fort petit, une première approximation donne

$$\sin x = 2\cot Z \sin^2 \tfrac{1}{2} I, \quad \text{et} \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{4} \sin^2 x;$$

partant,

$$\sin x = 2\cot Z \sin^2 \tfrac{1}{2} I - 2\cot^3 Z \sin^4 \tfrac{1}{2} I.$$

Le premier terme du second membre est toujours suffisant, même en supposant I d'un degré; et il est remarquable que plus la quantité Z augmente, plus l'erreur x diminue, l'inclinaison I de l'instrument restant toutefois la même. On peut s'assurer, par exemple, que la correction correspondante à 5′ d'inclinaison du cercle serait de 0″,29 pour l'étoile polaire observée à 37° du zénith, et de 3″ à 4° environ pour ζ de la grande Ourse et de la Chèvre. Il vaut donc mieux, dans les observations de latitude, et pour la zone que nous habitons, faire usage des étoiles circompolaires; d'ailleurs, outre que ces observations seront beaucoup plus faciles, l'erreur de la réfraction sera moindre que celle qui résulterait de l'inclinaison du cercle.

Si l'on désigne par Z, Z′ les distances observées et corrigées de la réfraction, et par z, z' les distances vraies d'une étoile circompolaire au zénith, lors des passages supérieur et inférieur; x et x' étant les corrections dues à l'inclinaison du cercle, il est évident que l'on aura

$$z = Z + x,$$
$$z' = Z' + x';$$

donc la distance du pôle au zénith, ou

$$\frac{z'+z}{2} = \frac{Z'+x'}{2} + \frac{Z+x}{2};$$

mais dans le passage inférieur, x' est insensible ; donc

$$\text{latitude} = 90^\circ - \frac{z'+z}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(Z'+Z) - \frac{x}{2};$$

donc enfin la latitude n'est affectée que de la moitié de l'erreur produite par l'inclinaison; ce qui permet de regarder cette erreur comme nulle, surtout si l'on observe l'étoile polaire.

Cherchons maintenant l'erreur commise par le défaut de parallélisme de l'axe optique. Pour cet effet, soit Z l'angle de la verticale avec cet axe ou le rayon visuel mené à un objet quelconque. Cet angle sera la distance zénithale telle qu'elle devrait être lue sur le limbe; mais on lit au contraire Z_1, qui peut être considéré comme la projection orthogonale du premier, sur le plan du limbe. Si donc i est l'inclinaison du rayon visuel sur ce plan, on aura, comme ci-dessus, par la propriété du triangle sphérique rectangle,

$$\cos Z = \cos i \cos Z_1.$$

Soit $Z = Z_1 + x_1$; alors

$$\cos(Z_1 + x_1) = \cos i \cos Z_1;$$

d'où l'on tire, comme à l'article précédent,

$$\sin x_1 = 2\cot Z_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} i - 2\cot^3 Z \sin^4 \tfrac{1}{2} i.$$

Cette correction x_1 est ordinairement plus petite que la précédente x, due à l'inclinaison du limbe, parce que l'on peut rendre i inférieur à I, en réglant avec soin l'axe optique, comme on l'a enseigné à l'art. **115**.

CHAPITRE VI.

DES OBSERVATIONS AZIMUTALES ET DES CALCULS QUI Y SONT RELATIFS.

324. Les triangles qui, par leur enchaînement, déterminent les positions respectives des objets terrestres, seraient orientés si l'on connaissait l'inclinaison de l'un quelconque de leurs côtés sur la méridienne du lieu principal de la carte, parce que de là dériveraient nécessairement les azimuts de tous les autres côtés. Lorsque l'on peut faire placer au loin une mire dans le plan du méridien céleste, la ligne menée de cette mire au lieu de l'observateur est en même temps le premier côté de la ligne méridienne; donc, si l'on mesure l'angle entre le sommet de l'un des triangles du réseau et la mire dont il s'agit, on aura l'azimut cherché; mais cette méthode exigeant l'usage d'une bonne lunette méridienne établie dans un observatoire, on est souvent obligé d'y suppléer ainsi qu'il suit.

Azimuts déduits des observations du Soleil.

325. On choisit une station dont la latitude soit exactement connue; et lorsque le Soleil est près de l'horizon, on prend, avec le cercle répétiteur, sa distance angulaire à un objet terrestre. On calcule ensuite l'azimut de cet astre, pour l'heure vraie de l'observation, et cet azimut fait connaître celui de l'objet. En effet, soit ZP (*fig.* 21) le premier côté de la méridienne terrestre, ou l'intersection du plan du méridien céleste avec l'horizon du lieu Z; soient en outre ZS et ZG les intersections respectives des verticaux du Soleil S et de l'objet G: l'angle GZS étant mesuré, et l'azimut SZP du Soleil étant déduit de

l'heure de l'observation, l'inclinaison du côté ZG sur le méridien PZ sera connue et représentée, dans le cas de la figure, par l'angle GZP.

L'observation du Soleil est plus commode que celle d'une étoile, parce que quand on prend un azimut pendant la nuit, il faut établir un réverbère à l'objet terrestre, et éclairer les fils des réticules à l'aide de réflecteurs adaptés aux objectifs.

Pour avoir un azimut indépendant des erreurs produites par celles de l'angle mesuré, de la déclinaison de l'astre, de la latitude du lieu et du temps vrai donné par la pendule, il faut qu'il soit le résultat moyen entre d'autres azimuts pris pendant plusieurs jours, et conclus, autant qu'il est possible, de la comparaison du même objet terrestre avec le Soleil levant et le Soleil couchant. Avant de faire une observation de ce genre, on doit vérifier scrupuleusement la marche de la pendule, parce que le temps, ou l'angle horaire de l'astre, est tellement un des éléments essentiels du calcul, qu'une seconde d'erreur sur le temps vrai en produirait plusieurs sur l'azimut. Si la pendule est réglée sur le temps solaire moyen, on réduira en heure vraie ou apparente celle de l'observation donnée par cette pendule, ainsi qu'il a été expliqué à l'art. 243; si au contraire on en ignore la marche, on l'évaluera en prenant des hauteurs correspondantes ou absolues du Soleil, le jour et le lendemain de l'observation.

Nous ne répéterons point ici ce que nous avons dit à l'art. 126, relativement à la manière d'obtenir l'angle entre l'objet terrestre et le centre du Soleil, ainsi que le milieu entre tous les temps des observations faites avec le cercle ou le théodolite répétiteur; mais nous remarquerons que le succès dans la recherche actuelle, comme dans toutes les observations astronomiques, dépend aussi de l'habileté des observateurs.

326. Maintenant soient S (*fig.* 21) le lieu vrai du Soleil, S′ son lieu apparent; G le lieu vrai de l'objet terrestre, G′ son lieu apparent; Z le zénith de l'observateur, P le pôle du monde, et ZP le méridien céleste.

L'arc de distance ou l'angle S′ZG′ sous lequel on voit l'image du Soleil et celle de l'objet est connu, ainsi que la distance apparente ZG′ de cet objet au zénith. De plus, l'instant de l'observation conclu de

la pendule donne l'angle horaire ZPS de l'astre, et par suite on obtient sa distance polaire $PS=\Delta$. Enfin, on connaît $PZ = C$, complément de la latitude du lieu de l'observation.

Il résulte de là que, dans le triangle ZPS, on connaît les deux côtés Δ, C et l'angle P compris; on pourra donc déterminer l'azimut PZS du Soleil et sa distance vraie au zénith. Pour éviter à cet égard toute ambiguité de signes, on pourra recourir à la solution suivante.

Soit A l'azimut du centre du Soleil, compté du nord à l'est; S l'angle à cet astre formé par son cercle de déclinaison SP et par le vertical ZS. On aura, par les formules de Néper, et en vertu de la notation ci-dessus,

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+S) = \cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\cos\frac{1}{2}(\Delta+C)},$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-S) = \cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\sin\frac{1}{2}(\Delta+C)}.$$

Maintenant, si N désigne la distance zénithale vraie géocentrique de l'astre, on aura

$$\sin N = \frac{\sin P \sin \Delta}{\sin A};$$

mais pour n'avoir aucune incertitude sur l'espèce de l'angle N, il vaudra mieux employer cette formule

$$(3) \qquad \sin\tfrac{1}{2}N = \cos\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\sin\frac{1}{2}(A-S)};$$

l'une de celles (δ) démontrées à l'art. **64**.

Si, comme à l'ordinaire, $\theta =$ la réfraction, et $\varpi =$ la parallaxe de hauteur de l'astre pour le moment de l'observation; la distance apparente du Soleil au zénith, rapportée à la surface de la Terre et au centre de la station, sera (art. **256**)

$$ZS', \quad \text{ou} \quad z' = N - \theta + \varpi;$$

alors dans le triangle sphérique G'S'Z, qui appartient à une sphere dont le centre est au lieu de l'observateur, on connaîtra $ZS' =$ distance apparente du Soleil au zénith, $S'G' =$ distance observée entre

cet astre et l'objet terrestre, et ZG′ = distance apparente de cet objet au zénith. Si donc on fait ZS′ = z', S′G′ = O, ZG′ = z, on réduira à l'horizon l'angle observé O, par la méthode de l'art. **129**, c'est-à-dire qu'en faisant

$$m = \frac{z + z' + O}{2} - z, \quad m' = \frac{z + z' + O}{2} - z',$$

on aura

$$(4) \qquad \sin\tfrac{1}{2}\,G'ZS', \quad \text{ou} \quad \sin\tfrac{1}{2}\,O' = \sqrt{\frac{\sin m \sin m'}{\sin z \sin z'}}.$$

Lorsque l'observation azimutale a été faite à quelque distance du centre de la station, l'angle O′ a lui-même besoin d'une correction pour être réduit à ce centre. Si, par exemple (*fig.* 22), l'instrument était en Z, et que l'on dût réduire l'angle SZM au point F, on y parviendrait par la formule donnée à l'art. **135**; et il est remarquable que la correction se réduit à un seul terme par la raison déjà exposée au même article; ainsi, la quantité à ajouter à l'angle O′ pour le réduire à O″ est

$$\frac{r \sin(O' + y)}{D \sin 1''}, \quad \text{ou} \quad -\frac{r \sin y}{G \sin 1''},$$

selon que l'astre est à gauche ou à droite de l'objet terrestre.

Passons maintenant aux applications.

Éléments du calcul d'une observation azimutale.

327. Le 22 mars 1803 au matin, à 2^m,5 du *fanal* de Porto-Ferraio (île d'Elbe), dont la latitude boréale est de 42°49′6″, nous avons observé l'angle entre le Soleil levant et le signal de Monte-Capane, situé vers l'ouest (*fig.* 22); et par un milieu pris entre six observations, cet angle s'est trouvé de 151°37′22″,8, en même temps que le milieu entre les instants donnés par la pendule était de $18^h 30^m 42^s$,5, comptées astronomiquement, c'est-à-dire d'un midi à l'autre.

Le baromètre, placé près de l'instrument et à l'ombre, marquait $27^{po} 7^{lig}$,5 = 0^m,745, et le thermomètre de Réaumur $10°\frac{1}{3} = 10^g$,91.

De plus, la distance de Monte-Capane au zénith du fanal = 86°15′11″,88.

L'angle de direction, ou la distance angulaire de Monte-Capane au centre du fanal $= 236^{\circ}40'22'',8$.

Enfin, le logarithme de la distance itinéraire de ces deux points $= 4,1606848$.

Les hauteurs correspondantes du Soleil, prises le 21 mars et le lendemain, ont fait connaître que la pendule retardait en 24 heures, temps vrai, de $0^m36^s,1$. En effet, le 21, elle était en retard sur le midi apparent, de $0^h6^m8^s,3$; et le 22 mars elle retardait de $6^m44^s,4$ (art. **295**).

Il suit de là que, pour réduire en temps vrai l'heure de l'observation, il faut, 1° ajouter $6^m8^s,3$ à $18^h30^m42^s,5$, et la somme $18^h36^m50^s,8$ sera le temps écoulé sur la pendule, depuis le 21 mars à midi jusqu'au moment de l'observation;

2°. Trouver de combien la pendule retardait sur le temps vrai, à $18^h36^m50^s,8$, et cela au moyen de la proportion

$$23^h59^m23^s,9 : 36^s,1 :: 18^h36^m50^s,8 : x = 27^s,98;$$

3°. Enfin, ajouter $27^s,98$, retard de la pendule, à $18^h36^m50^s,8$, et l'on aura $18^h37^m18^s,78$ pour le temps vrai cherché.

En général, si v et d dénotent respectivement les avances ou les retards de la pendule en 24 heures et sur le midi, qui précède l'observation azimutale ou un phénomène astronomique quelconque, et que T soit l'heure à laquelle ce phénomène a été remarqué, on aura

$$24^h \pm v : \mp v :: \mathrm{T} \mp d : x = \mp \frac{v(\mathrm{T} \mp d)}{24 \pm v},$$

et par conséquent l'heure vraie de l'observation sera

$$(\mathrm{T} \mp d) \mp \frac{v(\mathrm{T} \mp d)}{24 \pm v},$$

le signe supérieur étant relatif à l'avance, et le signe inférieur l'étant au retard de la pendule.

Cette règle suppose que le Soleil a une marche uniforme dans l'intervalle de 24^h; si l'on voulait mettre toute la précision possible à cet égard, ce serait le cas de procéder comme il a été expliqué à l'art. **298**.

D'un autre côté, la déclinaison australe du Soleil, le 21 mars à midi, à Porto-Ferraio. . . . . = — 0° 1′ 59″,6

et le changement en déclinaison, pour le temps vrai de l'observation, calculé à raison de 23′41″ par 24 heures. . . . . = + 0.18.22 ,6

donc la déclinaison boréale du Soleil, lors de l'observation. . . . . = 0°16′23″,0

Partant, la distance du Soleil au pôle, ou le complément de la déclinaison. . . . . = 89°43′37″,00 = Δ

L'angle horaire, ou le complément à 24 heures de l'heure vraie de l'observation $= 5^h 22^m 41^s,22$. . . . . = 80.40.18 ,15 = P

Complément de la latitude du fanal. . . . . = 47.10.54 ,00 = C

Distance entre le centre du Soleil et le signal de Monte-Capane. . . . . = 151.37.22 ,80 = O

Distance de Monte-Capane au zénith. . . . = 86.15.11 ,88 = z

Il vaudrait encore mieux calculer la déclinaison du Soleil pour le moment de l'observation, à l'aide des Tables du Soleil (art. **244**). Dans ce cas, l'on calculerait la déclinaison à midi, pour plusieurs jours de suite, et l'on obtiendrait la déclinaison correspondante à une heure quelconque, par la méthode d'interpolation de l'art. **241**.

Toutes ces données étant recueillies, on procèdera de la manière suivante aux calculs des azimuts du Soleil et de l'objet terrestre.

TYPE DU CALCUL.

Détermination de l'azimut et de la distance zénithale apparente du Soleil.

328. On aura l'azimut A du centre du Soleil, compté du nord à l'est, par ces deux formules :

$$(1) \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+S) = \cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\cos\frac{1}{2}(\Delta+C)};$$

$$(2) \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-S) = \cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta-C)}{\sin\frac{1}{2}(\Delta+C)}.$$

Mais, par ce qui précède,

colatitude C =	47°10′54″	....	47°10′54″
distance polaire Δ =	89.43.37	....	89.43.37
Δ + C =	136.54.31	Δ − C =	42.32.43
$\frac{1}{2}$(Δ + C) =	68.27.15,5	$\frac{1}{2}$(Δ − C) =	21.16.21,5.

Calculant maintenant les deux formules ci-dessus, on aura

Formule (1).		Formule (2).	
l. cot $\frac{1}{2}$ P =	0,0710215	l. cot $\frac{1}{2}$ P =	0,0710215
l. cos $\frac{1}{2}$(Δ − C) =	9,9693528	l. sin $\frac{1}{2}$(Δ − C) =	9,5596748
c. l. cos $\frac{1}{2}$(Δ + C) =	0,4350463	c. l. sin $\frac{1}{2}$(Δ + C) =	0,0314587
l. tang $\frac{1}{2}$(A + S) =	0,4754206	l. tang $\frac{1}{2}$(A − S) =	9,6621550

de là

$\frac{1}{2}$(A + S) = 71°29′51″50

$\frac{1}{2}$(A − S) = 24.40.20,01

somme ou azimut du ☉, A = 96.10.11,51

La distance zénithale apparente du centre du Soleil se trouvera ainsi qu'il suit.

Soit N la distance zénithale vraie géocentrique du centre de cet astre; on aura

$$(3) \qquad \sin\tfrac{1}{2}N = \cos\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta - C)}{\sin\frac{1}{2}(A - S)}.$$

Opérant par les logarithmes, il vient

l. cos $\frac{1}{2}$ P =	9,8821050
l. sin $\frac{1}{2}$(Δ − C) =	9,5596748
c. l. sin $\frac{1}{2}$(A − S) =	0,3794199
l. sin $\frac{1}{2}$ N =	9,8211997
$\frac{1}{2}$ N =	41° 29′ 32″72
N =	82. 59. 5,44
parallaxe (table X) =	+ 8,00
réfraction (table VIII) =	− 7. 3,55
dist. appar. du ☉ au zénith z′ =	82. 52. 9,89

Réduction à l'horizon, de l'angle observé entre le Soleil et l'objet terrestre.

L'arc de distance O ayant été observé dans un plan incliné à l'horizon, il faut le réduire à ce dernier plan, afin de pouvoir le comparer à l'azimut A du Soleil. Or, les éléments de la formule (4) sont, d'après ce qui précède,

$$\begin{array}{rll}
z = & 86^\circ 15' 11'' 88 & \\
z' = & 82.52.\ 9{,}89 & \\
O = & 151.37.22{,}80 & \\
\hline
z + z' + O = & 320.44.44{,}57 & \\
\hline
\tfrac{1}{2}(z + z' + O) = & 160.22.22{,}28 \ \ldots\ldots\ldots & 160^\circ 22' 22'' 28 \\
z = - & 86.15.11{,}88 \qquad z' = - & 82.52.\ 9{,}86 \\
\hline
m = & 74^\circ\ 7' 10'' 40 \qquad m' = & 77.30.12{,}42
\end{array}$$

et l'on a

$$\begin{array}{rl}
\text{comp. log sin } z = & 0{,}0009292 \\
\text{comp. log sin } z' = & 0{,}0033719 \\
\log \sin m = & 9{,}9831004 \\
\log \sin m' = & 9{,}9895873 \\
\hline
\log \sin^2 \tfrac{1}{2} O' = & 19{,}9769888 \\
\log \sin \tfrac{1}{2} O' = & 9{,}9884944 \ = \ 76^\circ 52' 10'',204\,;
\end{array}$$

donc $O' = 153^\circ 44' 20'',41.$

Ainsi la distance angulaire de l'objet terrestre au centre du Soleil, comptée sur l'horizon, est de $153^\circ 44' 20'',41$: pour la réduire au centre de la station ou du fanal de Porto-Ferraio, voici le calcul qu'il faut effectuer.

Calcul de la réduction de l'angle observé, au centre de la station.

Le Soleil étant à gauche de l'objet terrestre (*fig.* 22), on aura, comme l'on sait, pour la réduction cherchée,

$$\frac{r \sin (O' + y)}{D \sin 1''};$$

or, ici $r = 2^m,5$, $O' + y = 236°40'22'',8$; donc

$$\begin{aligned} \log r &= 0,3979400 \\ \text{c.}\log\sin 1'' &= 5,3144251 \\ \text{l.}\sin(O'+y) &= -\,9,9219717 \\ \text{c.}\log D &= 5,8393152 \\ \hline & -\,1,4736520 = -\,29'',76. \end{aligned}$$

Partant, et à cause de .

	$O' =$	153°44′20″,41
	$A =$	96.10.11 ,82
l'azimut approché du signal de Monte-Capane. . .	=	249.54.32 ,23
D'un autre côté, la réduction au centre étant. . .	=	— 29 ,76
l'azimut exact de Monte-Capane, compté du nord à l'est.	=	249.54. 2 ,47
		180
et compté du sud à l'ouest. . . . . Z	=	69°54′ 2″,47

Si l'on comptait le même azimut du nord à l'ouest, sa valeur serait 110° 5′ 57″,53.

329. Toutes les circonstances du calcul seraient les mêmes, si, au lieu du Soleil, on observait une étoile; et l'on conçoit que si la pendule était exactement réglée sur les fixes, la différence entre le temps de l'observation azimutale et celui du passage de l'étoile au méridien, comptés sur la pendule, serait l'angle horaire P. Mais pour observer ce passage, il faut être pourvu d'une lunette méridienne; sinon, l'on trouvera l'heure à laquelle l'astre est le plus élevé sur l'horizon, par la méthode des hauteurs correspondantes (art. **299**) : on connaîtra donc encore, par ce moyen, l'angle horaire P. Ensuite, après avoir rassemblé les autres éléments du calcul, dont la déclinaison de l'étoile affectée de la précession, de la nutation et de l'aberration fait partie, on procédera absolument comme ci-dessus.

Mais lorsque la pendule marque chaque jour l'ascension droite des étoiles au moment de la culmination (art. **305**), on a sur-le-champ l'angle horaire de l'étoile que l'on compare à l'objet terrestre, en pre-

nant la différence entre l'heure même de l'observation, donnée par la pendule, et l'ascension droite de l'étoile, convertie en temps à raison de 15° par heure.

Enfin, si la pendule n'est point réglée, on opérera ainsi qu'il a été dit à l'art. **305**, et l'on calculera le temps sidéral pour le moment de l'observation. La comparaison de ce temps avec l'ascension droite de l'étoile, donnera de même l'angle horaire, que l'on réduira ensuite en degrés, à raison d'une heure pour 15°. On pourrait employer aussi, à cet effet, le temps vrai de l'observation, et celui du passage de l'étoile au méridien.

Lorsqu'en faisant usage du cercle répétiteur ordinaire, on prolonge la durée d'une observation azimutale, il est essentiel de lire les différents multiples de l'arc de distance, de manière à pouvoir grouper les observations partielles de 4 en 4 ou de 6 en 6 au plus. Alors on calcule séparément chaque groupe par le procédé précédent, et la moyenne des résultats partiels, donne l'azimut cherché. La raison à donner à cet égard est la même que celle sur laquelle est fondée la remarque de l'art. **307**.

Enfin, si, pour ne pas se tromper, l'on observait toujours le même bord du Soleil, on augmenterait ou l'on diminuerait l'arc de distance du demi-diamètre de cet astre; car l'angle entre le centre du Soleil et l'objet terrestre est celui que l'on considère dans le calcul ci-dessus.

Des azimuts donnés par la Polaire, et observés avec le cercle répétiteur.

330. Quelle que soit l'habileté des observateurs, il existe presque toujours entre les azimuts du Soleil, pris au cercle répétiteur et aux deux époques les plus favorables de la journée, des discordances qui produisent sur les résultats définitifs des incertitudes de plusieurs secondes : aussi les géomètres ont-ils conseillé d'observer en pareil cas la Polaire; parce que d'une part, elle est, relativement à notre zone, à une hauteur qui ne fait pas craindre des réfractions extraordinaires; que d'autre part, son mouvement en azimut est peu sensible quand elle approche le plus possible du cercle de 6 heures, ce qui exige alors que le signal auquel on la rapporte soit éloigné de 90 degrés du mé-

ridien, ou à peu de chose près; enfin, parce que le temps n'a plus sur la détermination de l'azimut la même influence que dans les observations du Soleil. La méthode que Legendre a exposée à ce sujet, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1787), revient à peu près à ce qui suit.

Après avoir placé un réverbère au signal dont on veut connaître l'azimut, on mesurera, avec le cercle répétiteur, l'arc de distance entre l'objet terrestre et l'étoile, quelques instants avant et après l'époque de la plus petite ou de la plus grande longueur de cet arc, comme quand on prend des distances méridiennes. On notera l'heure, la minute, la seconde et fraction de seconde de chaque observation, et l'époque moyenne en temps de la pendule répondra à l'arc moyen déterminé sur le limbe, si la série est de courte durée, comme d'une demi-heure au plus. Ensuite on prendra la distance zénithale apparente du réverbère; enfin on recueillera, comme à l'ordinaire, tous les éléments relatifs à la réduction au centre de la station, s'il y a lieu.

Cette manière d'observer les azimuts a une grande analogie avec les observations de latitude; aussi le calcul des réductions de distances est-il à peu près le même dans l'un et dans l'autre cas; c'est ce que l'on va prouver.

331. Supposons premièrement que la réfraction soit nulle, que Z (*fig.* 23) soit le zénith de la station, R le réverbère, P le pôle, EE″ le parallèle de l'étoile; représentons par Δ la distance polaire EP de cette étoile, par R la distance du réverbère au pôle, par RE la plus courte distance entre toutes celles RE′, RE″, etc.; enfin, faisons $RE'' = RE + u = R - \Delta + u$. Le triangle RZP, dans lequel on connaîtra les deux côtés $ZP = 90° -$ latitude, $RZ =$ distance du réverbère au zénith, et à fort peu près le côté $RP =$ arc de distance $= RE + \Delta$, donnera approximativement l'angle horaire RPZ, ou l'heure à laquelle l'étoile E passera au méridien du signal R. On aura donc les angles horaires E″PE,..., comptés depuis l'époque de ce passage, en soustrayant de l'heure de l'observation, lorsque l'étoile était en E″,..., celle de ce même passage.

Cela posé, soit p l'un de ces angles horaires; le triangle RE″ P donnera

$$\cos RE'' = \cos PE'' \cos PR + \sin PE'' \sin PR \cos p,$$

ou

$$\cos(R - \Delta + u) = \cos\Delta \cos R + \sin\Delta \sin R \cos p.$$

Développant le premier membre dans l'hypothèse que u est fort petit, et ne conservant que les premières puissances, on aura, comme à l'art. **310**,

$$u = \frac{2\sin\Delta \sin R \sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1'' \sin(R-\Delta)} - \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin\Delta \sin R \sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1'' \sin(R-\Delta)}\right]^2 \cot(R-\Delta) \sin 1'' + \ldots$$

Telle est la quantité qu'il faut ôter de chacune des distances observées RE″,..., pour les réduire à ce qu'elles deviennent au moment de la plus courte distance de l'étoile au réverbère; ou, ce qui revient au même, de la distance moyenne mesurée sur le limbe, on ôte la somme des u divisée par leur nombre, et le reste est la plus courte distance cherchée RE. Cette plus courte distance étant trouvée, on l'augmentera de Δ; puis, pour déterminer l'azimut RZP du réverbère, l'on résoudra le triangle RPZ, dans lequel les trois côtés sont connus. Si la plus courte distance RE, trouvée par ce calcul, différait trop de celle qui a servi dans le calcul approximatif de l'angle horaire RPZ, on recommencerait toutes les opérations précédentes avec cette nouvelle distance, et cette seconde fois, la nouvelle valeur de l'angle horaire serait exacte.

Remarquons pourtant que l'azimut approché RZP et l'angle horaire RPZ se trouveraient encore, en observant la distance Re au moment où l'étoile passe au méridien PZ, et en résolvant d'abord le triangle ReZ, dont on connaîtrait les trois côtés RZ, eZ=PZ−Pe=C−Δ et Re; ensuite le triangle RPZ qui serait donné par les deux côtés RZ, PZ et l'angle compris.

Dans tout ce qu'on vient de dire, on n'a point eu égard à la réfraction; cependant, il est évident qu'elle affecte la position du pôle et celle de l'étoile, et qu'en élevant tout le parallèle de cet astre, elle en altère la figure. Pour tenir compte de ce déplacement dans le calcul précédent, il ne s'agit que de rapporter toutes les distances

aux lieux apparents du pôle, de l'étoile et du réverbère, parce que l'arc de distance entre ces deux derniers objets est lui-même un arc apparent : or, il est remarquable que les points des plus grandes digressions de l'étoile et le pôle sont élevés par la réfraction, de la même quantité ; et que comme on observe cette étoile à très-peu de distance de ces mêmes points, l'on peut supposer la réfraction constante pour tout l'arc apparent décrit pendant la courte durée des observations, et considérer même cet arc comme faisant partie d'un cercle ayant pour centre le pôle apparent.

D'après cela, soient P (*fig.* 24) le pôle vrai, P′ le pôle apparent ; E le lieu vrai dans le méridien du réverbère ou de R, E′ son lieu apparent, θ la réfraction dans la région du pôle. Soient en outre

$$ZP = C, \quad ZP' = C' = C - \theta, \quad PE = \Delta, \quad ZE = N; \quad ZE' = N - \theta;$$

enfin l'azimut PZE de l'étoile = A. Le triangle sphérique ZEP donne

$$\cos \Delta = \cos C \cos N + \sin C \sin N \cos A.$$

Différentiant, en faisant tout varier excepté A, on a

$$\begin{aligned} -\sin \Delta . d\Delta = & - \sin C \cos N . dC - \sin N \cos C . dN \\ & + \cos C \sin N \cos A . dC \\ & + \sin C \cos N \cos A . dN ; \end{aligned}$$

mais $dC = \theta$ et $dZ = \theta$ par hypothèse ; donc

$$\sin \Delta . d\Delta = \theta \sin (C + N) - \theta \cos A \sin (C + N),$$

$$d\Delta = \frac{\theta \sin (C + N)(1 - \cos A)}{\sin \Delta} = \frac{2\theta \sin (C + N) \sin^2 \frac{1}{2} A}{\sin \Delta}.$$

Il est évident, à la seule inspection de la figure, que quand C diminue, Δ devient $\Delta' = P'E'$, et qu'on a $\Delta' < \Delta$; ainsi, θ et $d\Delta$ sont de même signe, et l'on a $\Delta' = \Delta - d\Delta$. Partant,

$$\Delta' = \Delta - \frac{2\theta \sin (C + N)}{\sin \Delta} \sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

formule dans laquelle il faudra prendre θ positivement, pour avoir la valeur du rayon Δ' de l'arc apparent décrit par l'étoile, pendant la durée des observations.

Soit maintenant G' l'arc moyen de distance entre les lieux apparents R' de l'objet terrestre et E' de la polaire; la plus courte distance apparente de R' au pôle apparent P' sera $G' + \Delta' = R'$. Soit en outre p' l'angle horaire de l'étoile, compté du méridien apparent du signal; on aura, par ce qui précède, et en rapportant tous les calculs aux positions apparentes, ainsi qu'on l'a déjà dit,

$$\Delta' = \Delta - \frac{2\theta \sin (C + N)}{\sin \Delta} \sin^2 \tfrac{1}{2} A, \qquad u = \frac{2 \sin \Delta' \sin R' \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin (R' - \Delta') \sin 1''} - \text{etc.}$$

La première formule exige que l'on connaisse non-seulement la distance zénithale vraie $ZE = N$, ou, pour mieux dire, la moyenne entre toutes celles qui ont lieu durant l'observation de la série, mais encore l'angle A qui représente l'azimut PZE du vertical dans lequel se trouve l'étoile. Pour cet effet, l'on résoudra le triangle ZPE dans lequel on connaît les deux côtés ZP, PE, ainsi que l'angle compris ZPE, c'est-à-dire l'angle horaire moyen. Mais dans notre climat, l'angle A étant fort petit, et variant très-peu pendant la durée de la série, si, comme nous l'avons déjà dit, l'azimut du réverbère diffère peu de 90°, la différence de Δ' à Δ sera très-petite. La méthode d'observation actuelle aura donc toute la précision requise.

Il résulte de ce qui précède, que la véritable distance apparente R' est égale à l'arc moyen G', diminué de la moyenne des u, et augmenté de Δ'. Telle est la distance qu'il faut définitivement employer dans la résolution du triangle sphérique $R'P'Z$, pour avoir l'azimut $R'ZP'$.

Si la pendule n'est pas exactement réglée sur le temps sidéral, comme nous l'avons supposé tacitement ci-dessus, on aura, ainsi qu'il a été démontré à l'art. **317**,

$$u = \frac{\sin \Delta' \sin R' . (1 + \rho')}{\sin (R' - \Delta')} . \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''} - \ldots, \qquad \text{et} \qquad \rho' = \frac{\rho}{86400 - \rho},$$

ρ étant le retard diurne de la pendule, exprimé en secondes. Il n'est

pas besoin de faire remarquer que la valeur de u s'obtiendra au moyen des tables de réduction au méridien (art. **315**), et que l'angle horaire moyen employé dans le calcul de l'azimut A, doit, pour plus de précision, être corrigé de la variation de la pendule.

332. Le calcul des azimuts par la Polaire observée en un point quelconque de son parallèle, s'effectue de deux autres manières que voici.

Ire SOLUTION. Soient A l'azimut de cet astre compté du nord, et comme ci-dessus Δ sa distance au pôle; P l'angle horaire correspondant, H la latitude du lieu de l'observation. Cela posé, le triangle sphérique ZPE dans lequel un angle et son côté opposé sont très-petits, étant traité par la méthode de l'art. **99**, on a

$$A = \frac{\Delta \sin P}{\cos H} + \frac{\Delta^2 \sin P \cos P \tang H}{\cos H} + \frac{1}{3}\frac{\Delta^3 \sin P \cos^2 P}{\cos H}(4 \tang^2 H + 1)$$
$$- \frac{1}{3}\frac{\Delta^3 \sin P}{\cos H} \tang^2 H \ldots,$$

ou, représentant par une seule lettre les coefficients de la distance polaire,

$$A = \frac{\Delta \sin P}{\cos H} + \gamma\Delta^2 \sin P \cos P + \delta\Delta^3 \sin P \cos^2 P - \varepsilon\Delta^3 \sin P \ldots,$$

série d'autant plus facile à évaluer que les log. des coefficients γ, δ, ε sont renfermés dans la table XVIII, qui a pour argument la latitude H de la station.

En comptant l'angle horaire $P = t - Æ$ à partir du méridien supérieur, tant à la digression occidentale qu'à la digression orientale, on prendra le second terme négatif si $P > 90^\circ$, puisque alors $\cos P$ est négatif.

Mais il faut faire attention que l'azimut A de l'étoile répondra à l'époque moyenne des observations si P est l'angle horaire moyen, et non pas à l'arc de distance G_m conclu de celui que la lunette a parcouru sur le limbe, divisé par le nombre des répétitions. Il sera donc nécessaire d'appliquer à cet azimut A une correction $\sum \frac{\delta A}{n} = \frac{d^2 A}{dP^2} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}$ tout à fait

semblable à celle de la distance zénithale N (art. 308). Ainsi, en tirant de la série ci-dessus la valeur du coefficient différentiel, et bornant l'approximation au terme du troisième ordre, l'azimut corrigé sera

$$A_m = A - \frac{\Delta \sin P}{\cos H} \sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}.$$

L'arc de distance G_m qui est donné par le cercle répétiteur ordinaire, est incliné à l'horizon; pour en avoir la projection horizontale g_m, il faut nécessairement connaître la distance au zénith de l'objet terrestre et celle de l'étoile à l'époque moyenne. Or cette dernière a pour expression (art. 320)

$$N = 90^\circ - H - \Delta \cos P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin^2 P \operatorname{tang} H + \tfrac{1}{3}\Delta^3 \sin^2 P \cos P \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 H\right)$$

ou, plus simplement, en supprimant les termes du troisième ordre qui n'excèdent pas 3″ dans les cas extrêmes,

$$N = 90^\circ - H - \Delta \cos P + \tfrac{1}{2}\Delta^2 \sin^2 P \operatorname{tang} H.$$

En diminuant ensuite cette distance zénithale vraie de la réfraction, on aura la distance zénithale apparente qui servira, avec celle de l'objet terrestre, pour réduire à l'horizon l'arc de distance G_m.

APPLICATION.

Le 7 mars 1793, Méchain orienta les triangles de la méridienne de France, en observant plusieurs fois à Montjouy, avec un cercle répétiteur construit par Lenoir, l'angle entre la Polaire et le réverbère de la Sierra-Morella, vers l'époque de la plus grande digression occidentale. Sa pendule réglée sur le temps moyen, n'ayant pu être placée auprès du cercle, il fit usage, pour connaître le temps des observations, d'un chronomètre qui retardait de $3^m 6^s,5$ sur la pendule. Voici l'une de ses séries, extraite de la base du *Système métrique décimal,* tome II, page 137, et pour laquelle les angles horaires δP seront comptés à partir de l'époque moyenne.

TEMPS de la pendule.	ANGLES HORAIRES δP. Temps moyen.	ANGLES HORAIRES δP. Temps sidéral.	RÉDUCTION à l'époque moyenne.
$7^h 14^m 9^s 5$	$-$ 4′ 49″ 5	$-$ 4′ 50″	45″9
7.17.19,5	1.39,5	1.40	5,3
7.20.40,5	+ 1.41,5	+ 1.42	5,6
7.23.46,5	4.47,5	4.48	45,2
Époq. moy. 7.18.59,0 = t.			Somme = 102,0
			Le quart = 25,5 = F.

La valeur de $F = \sum \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta P}{n \sin 1''}$ servira à corriger l'azimut A de l'étoile, d'après ce qui a été dit ci-dessus; mais il s'agit avant tout de connaître l'angle horaire P en temps sidéral. Or on a

Époque moyenne t. . . . . = $7^h 18^m 59^s,0$
Heure du passage au méridien. . − 1.34. 2 ,8 temps de la pendule
Angle horaire moyen. . . . . . . 5.44.56 ,2 temps moyen
Réduct. au temps sidéral (tab. V). + 56 ,0
Angle horaire P. . . . . = $5^h 45^m 52^s,2$ temps sidéral;

et en degrés,

$$P = 86°28'3''.$$

A la même époque, la position apparente de l'étoile était

$$Æ = 0^h 50^m 29^s,3,$$
$$D = 1°47'43'',4 = 6463'',4;$$

et l'on avait d'ailleurs,

Latitude de la station. . . . . H = 41°21′44″
Arc moyen de distance entre le réverbère et l'étoile. G_m = 100.23.51
Distance zénithale du réverbère. . . . . z = 89. 5.40

Avec ces données et le secours de la table XVIII, on procédera ainsi qu'il suit.

Calcul de l'azimut A.

$\log\Delta = 3,8104610+$	$\log\gamma = 4,75488+$	$\log\delta = 9,63150+$	$\log\varepsilon = 8,90804-$
$\sin P = 9,9991741$	$2\log\Delta = 7,62092$	$3\log\Delta = 1,43138$	$3\log\Delta = 1,43138$
$c.\cos H = 0,1246221$	$\sin P = 9,99917$	$\sin P = 9,99917$	$\sin P = 9,99917$
$3,9342572+$	$\cos P = 8,78968$	$2\cos P = 7,57936$	$0,33859-$
$+8595'',22$	$1,16465+$	$8,44141+$	$-2'',18$
	$+14'',61$	$+0'',04$	

Ces quatre termes réunis donnent

$$\text{azimut } A = 8607'',69 = 2^\circ 23' 27'',69,$$

et tel est aussi le résultat auquel conduiraient les analogies de Néper (art. 328), parce qu'elles sont applicables avec succès vers les époques des plus grandes digressions.

Calcul de la correction d'azimut.

$$\log\Delta\frac{\sin P}{\cos H} = 3,93426-$$
$$\log\sin 1'' = 4,68557$$
$$\log F = 1,40654$$
$$\log \text{correct.} \quad 0,02637-$$

Partant

A =	2°23′27″,69
correction. .	— 1 ,06
Azimut moyen A_m =	2.23.26 ,63 compté du nord à l'ouest
ou	177.36.33 ,57 compté du sud à l'ouest.

Calcul de la distance zénithale de l'étoile.

$\log\Delta = 3,81046-$	$\log\frac{1}{2} = 9,69897+$
$\cos P = 8,78968$	$2\log\Delta = 7,62092$
$2,60014-$	$\sin 1'' = 4,68557$
$-398'',24$	$2\sin P = 9,99834$
$+88'',82$	$\text{tang} H = 9,94470$
$-309'',42$	$1,94850+$
	$+88'',82$

Ainsi, la co-latitude.	$90°-\mathrm{H}$ =	48°38′16″,0
1er et 2e terme.	— 309″,4 =	— 5. 9,4
Distance zénithale vraie.	N =	48.33. 6,6
Réfraction (table VIII).		— 1. 4,4
Distance zénithale apparente de la Polaire.	z' =	48°32′ 2″,2

Réduction de l'arc de distance à l'horizon.

Il reste à trouver comme il suit la projection horizontale g_m de l'arc de distance G_m.

Distance zénith. du réverb.	z =	89° 5′40″		
Idem de l'étoile. . . .	z' =	48.32. 2		
Arc mesuré.	G_m =	100.23.51		
Somme.		238. 1.33		
Demi-somme. . .		119. 0.46,5		119° 0′46″,5
		89. 5.40		48.32. 2,0
Reste.	m =	29.55. 6,5	m' =	70.28.44,5

$\sin m$ =	9,6978979
$\sin m'$ =	9,9742902
$\mathrm{c.}\sin z$ =	0,0000540
$\mathrm{c.}\sin z'$ =	0,1253164
Somme. . . =	19,7975585

Demi-somme = $\log \sin \frac{1}{2} g_m$ = 9,8987792 = 52°22′55″,4

donc, arc de distance horizontale g_m = 104.45.50,8

donc enfin

A_m =	177°36′33″,4
$-g_m$ =	104.45.50,8
Azimut de position du réverbère	72.50.42,6 compté du sud à l'ouest.
Réduction au centre	— 15,4
Azimut cherché. . . . . Z =	72.50.27,2 compté de même,
ou	107. 9.32,8 compté du nord à l'ouest.

C'est effectivement, à un dixième de seconde près, ce que Méchain a obtenu par un procédé différent.

II[e] SOLUTION. Si l'on veut rapporter tous les angles horaires observés $P'P''$... au méridien apparent du réverbère, quelle que soit d'ailleurs la position de la Polaire dans son orbite apparente, on calculera l'angle φ que le méridien fait avec celui de la station, à l'aide du triangle sphérique ZPR dans lequel on connaît la distance zénithale $ZR = z$, la colatitude C_1, c'est-à-dire $C = 90^\circ - H$ diminuée de la réfraction, et approximativement l'azimut $RZP = 180^\circ - A$. Si au contraire cet azimut était tout à fait inconnu et que les observations eussent eu lieu, comme dans l'exemple précédent, à l'époque de la plus courte distance de l'étoile au réverbère, on ferait $K_1 = G_m + \Delta_1$, ou, ce qui revient au même, on désignerait par K_1 l'arc apparent RP qui représente le troisième côté du triangle ZPR, et qui se compose de l'arc mesuré G_m et de la distance polaire Δ affectée de la réfraction. On pourra, par conséquent, déterminer l'angle $RPZ = \varphi$ de ce triangle, et par suite l'heure sidérale du passage de l'étoile au méridien apparent du réverbère, laquelle est, dans le cas actuel, égale à l'ascension droite de l'étoile augmentée de l'angle φ. Enfin la différence de cette heure à l'époque moyenne des observations sera l'angle horaire moyen P, compté à partir de ce méridien apparent, et les différences δP de tous les temps de la pendule au temps correspondant à l'angle horaire moyen seront, comme à l'art. **512**, les éléments des réductions des distances observées au méridien dont il s'agit. Ces calculs préliminaires étant faits, on évaluera les deux formules

$$x = 2\Delta_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} \Delta_1^2 \sin 1'' \sin^2 P \cot G_m - \tfrac{1}{3} \Delta_1^3 \sin^2 1'' \sin^2 P \cos P, \quad (1)$$

$$\sum \frac{\delta x}{n} = (\sin \Delta_1 \cos P + \sin^2 \Delta_1 \cos 2P \cot G_m) . \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta P}{n \sin 1''}, \quad (2)$$

qui sont parfaitement semblables à celles relatives à la détermination de la latitude par les observations de la même étoile, et qui résultent de la propriété du triangle sphérique ZPE dans lequel le côté $PE = \Delta_1$ est très-petit à l'égard des deux autres. Elles seront générales si l'on compte l'angle horaire P à partir de la plus courte distance de l'étoile au réverbère et depuis 0 jusqu'à 360°. Ensuite on aura, pour la plus

courte distance K_1 du réverbère au pôle apparent,

$$K_1 = G_m + \Delta_1 - \left(x + \sum \frac{\delta x}{n}\right). \qquad (3)$$

TYPE DU CALCUL.

D'après l'article précédent, on a

distance zénithale du réverbère. .	$z =$	89° 5′40″,0
colatitude — réfraction.	$G_1 =$	48.37.11 ,6
et à peu près.	$K_1 =$	102.10. 8 ,0

lorsqu'on résout le triangle RZP dans lequel on sait déjà que l'angle RZP = 107°9′3″ environ. En ajoutant G_m = 100°23′51″ à la distance polaire Δ = 1°47′43″, on trouverait K_1 = 102°11′34″; mais il est à peu près indifférent d'employer ici l'une ou l'autre valeur.

Si l'on fait usage des trois données précédentes, on trouvera l'angle horaire φ opposé à z. = 77°47′15″

et en temps sidéral . . . . φ =	$5^h 11^m 9^s,0$
Diminuant cet angle de l'accélération des fixes (table IV), savoir	— 50 ,9
on a l'angle horaire, temps moyen. . . . . =	5.10.18 ,1
D'ailleurs, temps moyen du passage au méridien de Montjouy . . . . =	1.47.39 ,2
Donc temps moyen du passage au méridien apparent du réverbère . . . . =	6.57.57 ,3
Et comme la pendule retardait de.	13.36 ,4
le passage au méridien du réverbère, en temps de la pendule . . . . =	6.44.20 ,9
D'un autre côté, l'époque moyenne des observations a eu lieu à.	7.18.59 ,0
Donc l'angle horaire, temps moyen . . . . P =	0.34.38 ,10
Réduction au temps sidéral	+ 5 ,69
Angle horaire moyen en temps sidéral . . . . . . P =	$0^h 34^m 43^s,79$
et en arc. . . . . P =	8°40′55″,7

Un autre élément des formules (1) et (2) est la distance polaire Δ affectée de la réfraction et représentée par Δ_1. Or, en désignant par θ la réfraction à la hauteur du pôle, par A l'azimut de l'étoile, compté du nord, et par N la distance zénithale, calculés l'un et l'autre pour l'époque moyenne (page 216), on a, d'après ce qui a été démontré précédemment,

$$\Delta_1 = \Delta - \frac{2\theta \sin(C+N)}{\sin \Delta} \sin^2 \tfrac{1}{2} A \; (^*).$$

Dans cette formule, $N = 48°33'6''$, $C = 48°38'16''$, $\theta = 1'4'',42$, $\Delta = 1°47'43'',4$, $A = 2°23'28''$, et l'on trouve $\Delta_1 - \Delta = \delta\Delta = -1'',8$; partant

$$\Delta_1 = 1°47'41'',6.$$

Calculant ensuite les formules (1) et (2), dans la seconde desquelles $\log \sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\delta P}{n \sin 1''} = \log F = 1,40654$, on a, au moyen de la table XVII, la série des opérations suivantes.

Évaluation de x (table XVII).

$\log 2 = 0,3010300+$	$2 \log \Delta_1 = 7,6207+$	$3 \log \Delta_1 = 1,4310-$
$\log \Delta_1 = 3,8103435$	$\log E = 2,7422$	$\log G = 7,2466$
$2 \text{l.} \sin \frac{1}{2} P = 7,7581240$	$\cot G_m = 9,2636-$	$8,6776-$
$1,8694975+$	$9,6265-$	$-0'',05$
	$-0'',42$	

1er terme	+	74'',04
2e terme	−	0 ,42
3e terme	−	0 ,05
x =	+	73 ,57

(*) On aurait l'effet dG de la réfraction θ sur l'arc de distance apparent G_m, au moyen de cette formule

$$G_m + dG = G_m + \frac{\theta \cos z}{\sin G_m \sin N_{\prime}} - \theta \cot G_m \cot N_{\prime}.$$

Calcul de la correction $\sum \frac{\delta x}{n}$.

$\sin \Delta_1 = 8{,}49587+$	$2 \sin \Delta_1 = 6{,}99174+$
$\cos P = 9{,}99499$	$\cos 2P = 9{,}97975$
$8{,}49086+$	$\cot G_m = 9{,}26361-$
$\log F = 1{,}40654$	$6{,}23510-$
$9{,}89740+$	$\log F = 1{,}40654$
$= +\ 0'',790$	$7{,}64164-$
$-\ 0{,}004$	
$\sum \frac{\delta x}{n} = +\ 0{,}786$	

Formule (3).

Enfin, distance mesurée . . . . $G_m = 100°23'51'',0$
distance polaire. . . . . $\Delta_1 = 1.47.41,6$
$G_m + \Delta_1 = 102.11.32,6$
— réduction $\left(x + \sum \frac{\delta x}{n}\right)$ . . . . $= -\ 1.14,4$
distance apparente du signal au pôle. $K_1 = 102.10.18,2$

On connaît maintenant les trois côtés du triangle sphérique apparent RZP, savoir:

$$K_1 = 102°10'18'',2,$$
$$z = 89.\ 5.40,0,$$
$$C_1 = 48.37.11,6.$$

Ainsi, en désignant par σ leur demi-somme, on aura l'azimut Z_1 de position du réverbère, compté du sud à l'ouest, au moyen de cette formule connue

$$\sin \tfrac{1}{2} Z_1 = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - z)\sin(\sigma - C_1)}{\sin z \sin C_1}};$$

et tout calcul fait, on trouve

$Z_1 = 107°9'17'',6$
Ajoutant la réduction au centre de la station . . . . . $+\ 15,4$
l'azimut définitif . . . . $Z = 107.9.33,0$

Nous retrouvons donc, à deux dixièmes de seconde près, le même résultat que par la première solution.

333. Une question importante à traiter est celle de savoir dans quelles circonstances il faut observer, pour parvenir aux résultats les plus exacts. Voici, en peu de mots, comment Delambre est arrivé aux règles qu'il s'était tracées à cet égard.

Soient A (*fig.* 21) l'azimut SZP de l'astre, A′ celui du signal G, et O′ l'angle de deux verticaux ZS, ZG.

Le triangle sphérique PSZ donnera, en vertu de la notation de l'art. **328**,

$$\sin P \sin \Delta = \sin N \sin A,$$

et par la propriété du triangle GZS, on aura, en désignant par G′ l'arc de distance S′ G′,

$$\cos G' = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos O'.$$

D'ailleurs, à cause de $A' = A - O'$, on a

$$dA' = dA - dO';$$

puis différentiant les deux formules ci-dessus, en faisant tout varier, on trouvera, en dernière analyse,

$$\begin{aligned} dA' = {} & dP \cot P \operatorname{tang} A + \; d\Delta \cot \Delta \operatorname{tang} A \\ & - dN \cot N \operatorname{tang} A - \frac{dG' \sin G'}{\sin z \sin z' \sin O'} \\ & - dz \cot z \cot O' - dz' \cot z' \cot O' \\ & + dz \cot z' \operatorname{coséc} O' + dz' \cot z \operatorname{coséc} O'. \end{aligned}$$

Il résulte de cette formule différentielle,

1°. Que le premier terme, qui est le plus considérable, et qui est relatif à l'erreur de la pendule, aura peu d'influence sur l'azimut, si l'on observe l'astre loin du premier vertical, c'est-à-dire du point où $A = 90°$. Ainsi, relativement à la Polaire, ce terme est fort petit;

2°. Que comme $P = 90°$ au cercle de 6 heures, et que par consé-

quent $\cot P = 0$, il est nécessaire de mesurer l'arc de distance G' un peu avant et un peu après le passage de l'astre au cercle dont il s'agit;

3°. Qu'il faut placer le signal dans l'horizon autant que possible, et à très-peu près à 90° du vertical de l'astre, afin que z et O' diffèrent peu du quadrant;

4°. Que, pour anéantir les erreurs $d\Delta$ et dN commises sur la déclinaison et sur la distance zénithale de l'astre, il est nécessaire d'observer alternativement le matin et le soir; car $\tan A$ changeant de signe d'une observation à l'autre, ces erreurs se détruiront en grande partie;

5°. Que les termes en dz et dz' dépendants du changement de réfraction pendant la durée d'une série, seront nuls si $O' = 90°$;

6°. Enfin que l'erreur dG' de l'arc de distance s'anéantira en multipliant les observations.

Lorsqu'un astre se trouve dans le premier vertical, on a

$$\cos P = \cot H \cot \Delta;$$

ainsi en résolvant cette équation par rapport à l'angle horaire P, on connaîtra l'heure à laquelle ce phénomène arrivera, et l'on pourra, par conséquent, éviter d'observer en ce moment même. (*Voyez*, pour plus de détails, la *Base du Système métrique décimal*, tome II, page 152.)

Azimuts observés au théodolite répétiteur.

334. Les observations azimutales sont beaucoup plus faciles lorsqu'on emploie un bon théodolite répétiteur, et les calculs qui en dépendent se simplifient même, parce que l'angle entre l'objet terrestre et l'astre étant naturellement réduit à l'horizon, il est inutile de recueillir les éléments de la réduction à ce plan. Si on observe le Soleil à son lever ou à son coucher, on peut mettre alternativement ses deux bords en contact avec le fil vertical de la lunette, afin d'éluder son demi-diamètre; mais il est nécessaire que ces deux observations se fassent dans le moins de temps possible, parce que le demi-diamètre azimutal du Soleil change d'autant plus que cet astre est plus élevé au-dessus

de l'horizon. En procédant de la sorte, la moyenne des deux époques, en temps de la pendule, correspondra sensiblement à l'arc moyen ou à l'angle entre l'objet terrestre et le centre du Soleil, lequel est égal à la demi-somme des deux angles observés. Ainsi, l'azimut de ce centre, qu'on obtiendra par la méthode de calcul expliquée ci-dessus (art. 328), fera connaître celui de l'objet terrestre.

Autrement, l'on calculera l'azimut du centre du Soleil, correspondant au temps de l'observation de l'un des bords, et pour avoir l'azimut du bord observé, l'on ajoutera à celui du centre, ou l'on en retranchera l'azimut du diamètre horizontal apparent, selon la position de ce centre à l'égard du bord observé; après quoi l'on aura, par addition ou soustraction, l'azimut du signal. Enfin, la moyenne des deux résultats provenant de l'observation de chaque bord donnera l'azimut le plus probable de ce même signal. On en verra plus loin un exemple.

Pour faire une application de la 1re solution précédente au cas actuel, nous choisirons une des séries prises avec un théodolite doublement répétiteur par M. le colonel Coraboeuf, à l'extrémité occidentale du grand réseau trigonométrique que cet ancien ingénieur-géographe et M. le commandant Peytier ont mesuré le long des Pyrénées, à l'effet de comparer entre eux les niveaux des deux mers.

Le 16 octobre 1828 au soir, l'angle observé sur la tour de Borda, pres de Bayonne, entre le réverbère de Montfort et la Polaire, prise à l'époque de son élongation orientale, a été trouvé de $89^{\circ}16'3'',3$ par dix répétitions; l'époque moyenne correspondante, à la pendule, était de $5^{h}35^{m}46^{s},8$. Cette pendule, réglée sur le temps moyen, avançait à cette époque de $2^{m}19^{s},2$; et la somme des réductions, à l'époque moyenne, était de $782''$; de plus, la latitude de la station, ou $H = 43^{\circ}42'43''$, et sa longitude occidentale en temps $= 0^{h}13^{m}36^{s}$.

D'un autre côté, d'après le *Nautical Almanac*, la position apparente de la Polaire, pour le moment de l'observation, était

$$Æ = 1^{h}0^{m}21^{s},17,$$
$$\Delta = 1^{\circ}36'12'',28 = 5772'',28;$$

et le temps moyen correspondant au temps sidéral $1^{h}0^{m}21^{s},17$, ou au

moment du passage au méridien supérieur, se détermine comme il suit :

		N
Table I, le 16 octobre	$13^h36^m\ 8^s,43$	42
Table II (1828)	+ 3.43,63	413
Table III.	+ 0,28	455
Mouvement dû à la diff. des mérid. .	+ 2,23	
Ascension droite moyenne à midi. .	— 13.39.54,57	
Temps sidéral	1. 0.21,17	
(On ajoute 24^h pour pouvoir effectuer la soustraction.)		
Temps moyen approché.	11.20.26,60	
Correction (table IV).	— 1.51,47	
Temps moyen astronomique. . . .	11.18.35,13	
Avance de la pendule.	2.19,20	
Heure du passage, à la pendule. . .	11.20.54,33	
Époque moyenne.	— 5.35.46,80	
Angle horaire temps moyen.	5.45. 7,53	
Réduction au temps sidéral.	+ 56,69	
Angle horaire en temps sidéral P =	5.46. 4,22	

Et en degrés, $P = 86°31'3'',3 = 86°31',05$

Ayant les éléments de la formule (A=...), art. **532**, et l'argument H de la table XVIII qui s'y rapporte, on trouvera

Azimut de la Polaire. .	$A =$	$7971'',0 + 12'',95 + 0'',03 - 1'',89$
	$=$	$2°13'\ 2'',09$
Correction d'azimut. .	$\Sigma \frac{\delta A}{n} =$	$-\ 3,02$
Azimut corrigé	$A_m =$	2.12.59,07
Ou, du sud à l'ouest,	$180 + A_m =$	182.12.59,07
Arc mesuré.	$g_m =$	89.16. 3,30
Azimut de position. . .		271.29. 2,37
Réduction au centre. .		— 15,13
Azimut du réverbère de Montfort.	$Z =$	$271°28'47'',24$ du sud à l'ouest.

Les limites étroites entre lesquelles de pareils résultats sont renfermés (voyez *Nouvelle Description géométrique de la France*, tome II, page 500), prouvent que les observations de ce genre sont, comme celles de latitude, susceptibles de beaucoup de précision, lorsque les circonstances atmosphériques ont été favorables, et qu'on a eu soin de bien caler le niveau de l'axe de rotation de la lunette mobile. En effet, la condition essentielle à remplir avec le théodolite répétiteur de Gambey, c'est que l'axe optique dirigé sur l'étoile, dans les observations paires, prenne, par rapport à une ligne horizontale menée dans le plan déterminé par cet axe et celui de rotation, une inclinaison égale, mais directement opposée à celle qu'il avait dans les observations impaires; car si, dans le premier cas, l'angle mesuré est trop petit, dans le second cas il sera trop grand précisément de la même quantité. En général, l'erreur de l'azimut provenant de l'inclinaison i de l'axe de rotation et du petit angle y de l'axe optique apparent sur l'axe optique normal, est

$$\pm i \cot \delta \mp \frac{y}{\sin \delta},$$

δ désignant la distance zénithale de l'étoile. Dans cette formule de correction, les signes supérieurs répondent à l'observation impaire, et les signes inférieurs à l'observation paire, ou *vice versa* (art. **125**). On remarquera que y est constant, et que i l'est également, si l'on a soin de ramener toujours la bulle du niveau dans ses mêmes repères, à l'aide de l'une des vis du pied située au-dessous de l'axe de rotation. Quant à la distance zénithale δ, elle varie d'une quantité si petite dans l'intervalle de deux minutes environ que durent deux observations, qu'on peut pareillement la considérer comme constante : il est donc alors évident que la correction d'azimut est nulle.

Le baron de Zach, dans son ouvrage sur l'*Attraction des montagnes*, tome I, page 151 et suivantes, propose de déterminer les azimuts par une méthode qui a beaucoup d'analogie avec celles des hauteurs correspondantes, et qui est fort simple. Elle consiste à observer, avec le théodolite répétiteur, l'angle entre un objet terrestre et une étoile, quelques instants avant et après son passage au méridien; car s'il arrive que l'époque moyenne des observations soit précisément le

temps du passage, l'angle moyen correspondant sera l'azimut cherché. Mais s'il existe une différence entre l'époque moyenne dont il s'agit et le temps du passage, on déterminera la correction d'azimut, en la supposant proportionnelle au temps. Prenons pour exemple les observations mêmes de de Zach, savoir :

NOMBRE des répétitions.	TEMPS du chronomètre.	ANGLE MULTIPLE entre Sirius et un objet terrestre.
1	$6^h42^m10^s0$	22° 39′ 55″
2	43.48,0	44.52.50
3	44.58,0	66.46.20
4	46. 7,5	88.20.30
5	47.29,5	109.31.40
6	48.40,5	130.23.30
7	49.49,0	150.56.20
8	50.58,5	171. 9.50
9	52.56,0	190.50.55
10	54.11,0	210.11. 0
11	56.36,0	229. 7.30
12	56.53,0	247.42.20
13	57.58,0	265.59.30
14	59.10,0	283.56.25
Époque moyenne...	6.50.46,07	20.16.53,2
Passage de Sirius au méridien........	6.50.31,25	$= \dfrac{283.56.25}{14}$
Différence......	+ 14,82	

Il résulte de là que l'arc moyen 20°16′53″,2 ou l'azimut approché, correspond à l'époque moyenne $6^h50^m46^s,07$; que depuis la première observation jusqu'à cette époque moyenne, il s'est écoulé $8^m36^s,07$, et que pendant cet intervalle l'azimut de l'étoile a changé de 22°39′55″ − 20°16′53″,2 = 2°23′1″,8. Ainsi la variation en azimut, pendant les $14^s,82$, se trouvera en disant

$$516^s,07 : 8581'',8 :: 14^s,82 : x = 246'',44.$$

Or, le signal était à l'occident de Sirius; on a donc

Azimut observé à l'époque moyenne.	$= 20^\circ 16' 53'',20$
Correction. x	$= + \quad 4.\ 6\ ,44$
Azimut du signal compté du sud à l'ouest. . . .	$= 20^\circ 20' 59'',64$

Mais l'exactitude de cette méthode tient à deux choses : premièrement, l'heure du passage est supposée exactement connue; en second lieu, le mouvement azimutal aux environs du méridien est sensiblement uniforme. Cependant, si dans l'exemple précédent il existait une incertitude d'une seconde sur le temps du passage, il est visible que l'azimut ne serait connu qu'à 16″ près. Une pareille incertitude n'est pas probable, si l'on détermine l'heure du passage avec beaucoup de soin, par la méthode de l'art. **303**, ou si l'ascension droite est bien connue (art. **281**); mais en n'admettant qu'un quart de seconde d'erreur, on ne sera encore sûr de l'azimut qu'à 4″ près. Cherchons donc quelles sont les circonstances les plus favorables à ce genre d'observation.

335. Supposons un triangle sphérique ZPE (*fig.* 17), dans lequel Z est le zénith, P le pôle élevé, E l'étoile; et faisons $ZE = N$, $ZP = C$, $EP = \Delta$. Ce triangle donnera

$$\sin N \sin A = \sin P \sin \Delta ;$$

différentiant, en regardant Δ comme constant, on aura

$$dN \cos N \sin A + dA \cos A \sin N = dP \cos P \sin \Delta .$$

Mais, comme nous supposons ici les observations faites très-près du méridien, la distance zénithale N est presque constante, et cos P ainsi que cos A diffèrent très-peu de l'unité; on a donc simplement

$$dA = dP \frac{\sin \Delta}{\sin N},$$

ou à fort peu pres

$$dA = dP \frac{\sin \Delta}{\sin(\Delta - C)}.$$

Ce résultat nous apprend en effet que quand un astre est à une très-petite distance du méridien, la variation en azimut est proportionnelle au temps dP : nous voyons en outre qu'une erreur sur le temps

du passage a une grande influence sur l'azimut, si le zénith est entre l'astre et le pôle; mais que cette influence est bien moindre au passage inférieur, parce qu'alors

$$dA = \frac{dP \sin \Delta}{\sin(\Delta + C)}.$$

Nous ne croyons pas devoir, d'après cela, conseiller l'emploi exclusif de la méthode actuelle, si l'on veut apporter la plus grande précision possible dans l'orientation d'un réseau trigonométrique de premier ordre. Il est inutile de faire remarquer que cette méthode serait encore plus simple, et tout-à-fait indépendante du temps, si les observations étaient exactement correspondantes.

De l'instrument des passages, et de son usage pour observer les azimuts.

336. Le cercle répétiteur et le théodolite ne sont pas les seuls instruments dont on se sert pour déterminer les azimuts. La lunette des passages, d'un mètre de longueur au moins, remplit le même objet avec la plus grande facilité et la plus grande exactitude, quand elle réunit toutes les conditions requises, et qu'elle est solidement établie sur un massif de pierre.

Cette lunette astronomique, dont nous avons déjà parlé à l'art. 159, porte un micromètre fixe, ordinairement composé de cinq fils parallèles, et d'un sixième horizontal qui les coupe à angles droits par le milieu. Elle est montée perpendiculairement sur un axe dont les extrémités, ayant la forme de tourillons, sont parfaitement calibrées et reposent sur deux coussinets solidement fixés à deux blocs de pierre d'un très-grand poids, auxquels on donne la plus parfaite stabilité. L'un des coussinets s'élève ou s'abaisse verticalement en faisant tourner la vis qui y est adaptée; l'autre coussinet se meut horizontalement en avant ou en arrière au moyen d'une autre vis qui y est fixée : c'est à l'aide de celle-ci qu'on amène exactement l'axe optique de la lunette sur un point fixe quelconque dans l'horizon.

Le mouvement de rotation que l'on imprime à l'axe est d'autant plus doux, que le frottement des tourillons sur les coussinets est plus

faible. On diminue ce frottement en plaçant d'une manière convenable des contre-poids qui supportent l'axe.

Une alidade qui se meut avec la lunette marque, sur un demi-cercle gradué et attaché à l'un des bras de l'axe de rotation, la distance zénithale de l'astre sur lequel on pointe.

L'instrument des passages est parfaitement rectifié, 1° quand son axe de rotation est exactement horizontal; 2° quand l'axe optique de la lunette décrit rigoureusement un plan vertical; 3° quand le fil transversal est perpendiculaire à ce plan, et coupe à angles droits les cinq autres fils placés à égale distance entre eux.

On satisfait à la première condition, en suspendant à l'axe un niveau à bulle d'air, et procédant comme il a été dit à l'art. **125**. On s'assure que l'axe optique est perpendiculaire à l'axe de rotation, en dirigeant le fil méridien ou du milieu, sur un objet bien distinct à l'horizon, par exemple, sur le milieu d'une plaque noire percée d'un trou circulaire et se projetant dans le ciel; car si, après avoir retourné l'axe de rotation bout pour bout, le fil du milieu passe encore par le centre de la plaque ou de la mire, l'axe optique sera vérifié; mais s'il y a une petite déviation, on la fera disparaître ainsi qu'il a été dit à l'article précité.

Enfin, ces deux vérifications faites, on verra si, dans le mouvement vertical donné à la lunette, les fils cachent les mêmes points immobiles. Dans ce cas, ces fils seront bien parallèles; et lorsque la lunette sera à très-peu près dans le méridien, on sera sûr que le fil transversal du micromètre est horizontal, si une étoile loin du pôle le parcourt dans toute son étendue sans le quitter.

337. Pour faire servir la lunette des passages à la détermination des azimuts, il suffirait, à l'aide de cet instrument, de placer exactement une mire dans le méridien, parce qu'alors l'angle entre cette mire et le sommet d'un des triangles du réseau serait l'azimut cherché, si le lieu de l'observation était lui-même un des points de ce réseau.

Supposons qu'on ait calculé l'heure du passage d'une étoile au méridien (art. **281**), de Sirius par exemple, et qu'on ait une pendule réglée sur le temps sidéral (art. **303**); on dirigera la lunette méridienne sur cette étoile, à l'instant de sa médiation marqué par la pendule, et

l'on fera ensuite placer au sud une mire d'une manière stable dans la direction de l'axe optique, à la plus grande distance possible du lieu d'où l'on observe. Pour déterminer la position de cette mire, on pourra se servir d'une plaque sur laquelle on aura marqué plusieurs lignes verticales équidistantes et numérotées, afin de savoir à quel point correspond l'axe optique. Cette opération préliminaire étant faite, on choisira parmi les étoiles celles qui ont une petite déclinaison, et l'on observera plusieurs jours de suite leurs passages aux cinq fils du micromètre, ayant soin de vérifier auparavant si l'axe optique de la lunette passe par le point de mire. Dans le cas où il s'en écarterait, on l'y ramènerait en donnant un mouvement azimutal à l'axe de rotation, sans détruire toutefois l'horizontalité de cet axe; ou si l'on n'avait pas le temps de faire cette rectification, on noterait le petit écart, qu'on évaluerait ensuite facilement en secondes, à l'aide de la distance connue de la mire au lieu de l'observation. De cette manière on obtiendra, par les différences des temps des passages des étoiles, celles de leurs ascensions droites apparentes.

Un autre moyen d'amener la lunette dans le méridien, est d'observer une étoile circompolaire à son passage supérieur, puis à son passage inférieur, ou réciproquement. Si l'intervalle est exactement de 12 heures sidérales, l'axe optique de la lunette passant par le fil du milieu est dans le méridien; si au contraire l'intervalle est moindre qu'une demi-révolution, la lunette dévie du nord à l'ouest dans le premier cas, ou du nord à l'est dans le second cas. Il faudra donc alors imprimer à l'instrument un petit mouvement azimutal, et répéter l'observation et la correction jusqu'à ce que le parallèle de l'étoile soit partagé en deux parties égales. Cela fait, il ne s'agira plus que de placer la mire dans la direction indiquée par la lunette; encore sera-t-il nécessaire de déterminer, comme nous l'enseignerons bientôt, la petite déviation dont cette mire pourrait encore être affectée.

338. Dans la supposition que les cinq fils sont à égale distance les uns des autres, le cinquième des temps marqués par la pendule, lorsqu'une étoile passait derrière chacun de ces fils, est l'époque moyenne de son passage au fil du milieu. Cette moyenne arithmétique est préférable à une observation unique, puisqu'on peut espérer que les er-

reurs commises sur le temps et sur le pointé se compensent en partie. Mais si les distances des fils sont inégales, la moyenne arithmétique des cinq observations ne correspondra pas au fil du milieu, ou, ce qui est de même, au vertical de la mire. Pour lors on procédera ainsi qu'il suit, afin de connaître l'intervalle des fils.

Il est d'abord aisé de comprendre que l'intervalle d'un fil à l'autre, mesuré sur le fil transversal ou équatorial, intercepte à l'équateur céleste un très-petit arc de cercle. Or, pour trouver le temps qu'une étoile située dans cette région met à parcourir cet intervalle a, supposé évalué en parties du rayon de l'équateur pris pour unité, on dira

$$2\pi : 24^{h} :: a : \tau = \frac{24a}{2\pi};$$

π étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'unité, et τ désignant le temps cherché.

Le même intervalle des fils étant dirigé sur un parallèle quelconque à l'équateur, sera de même la corde d'un très-petit arc de ce parallèle, supposé d'ailleurs éloigné du pôle. Ainsi l'on trouvera le temps qu'une étoile mettrait pour décrire l'arc a de ce parallèle, en disant

$$2\pi \cos D : 24^{h} :: a : \tau' = \frac{24a}{2\pi \cos D};$$

D désignant la déclinaison boréale du parallèle que décrit l'étoile, et par conséquent $\cos D$ étant le rayon de ce cercle.

De là

$$\frac{\tau}{\tau'} = \cos D, \quad \text{ou} \quad \tau' = \frac{\tau}{\cos D} = \frac{\tau}{\sin \Delta},$$

en dénotant par Δ la distance polaire; c'est-à-dire que l'intervalle des fils en temps, hors de l'équateur, est égal à l'intervalle équatorial divisé par le sinus de la distance polaire.

En supposant donc qu'on ait observé une centaine de passages aux cinq fils, on aura, pour chacun des quatre intervalles, cent valeurs de τ : alors la moyenne sera l'intervalle dont on fera usage pour réduire au fil méridien l'observation faite à l'un des fils latéraux. Mais voici comment Delambre rend cette réduction inutile, lorsque l'observation est complète.

Soit M l'observation au fil du milieu, les cinq fils donneront

$$\begin{array}{l} M - a \\ M - b \\ M \\ M + c \\ M + d \\ \hline 5M - a - b + c + d; \end{array}$$

la moyenne des cinq temps donnerait $M - \left(\frac{a-d}{5} + \frac{b-c}{5}\right)$, à laquelle il faudrait ajouter $+\left(\frac{a-d}{5} + \frac{b-c}{5}\right)$, pour une étoile dans l'équateur, ou $\frac{a-d+b-c}{5 \sin \Delta}$ pour une étoile quelconque, afin d'avoir l'heure moyenne du passage au fil du milieu.

Notez bien que les valeurs de a, b, c, d sont des moyennes obtenues par le procédé qu'on vient d'expliquer; mais il sera beaucoup plus simple de rendre les fils équidistants.

Par exemple, le 1er janvier 1809, une observation de Rigel, faite à l'Observatoire royal de Paris, à la lunette méridienne, a donné

au fil I.	$5^h\ 5^m48^s,5$	
au fil II.	6. 6,1	$17^s,6$
au fil III.	5. 6.23,5	17,4
au fil IV.	6.41,0	17,5
au fil V.	6.58,5	17,5
Somme. .	$31^m57^s,6$	

Moy., ou passage au méridien.. $5^h\ 6^m23^s,32$.

Les quatre intervalles sont $17^s,6$; $17^s,4$; $17^s,5$; $17^s,5$; et par un milieu $17^s,5$. Il suit de là que si, à une autre époque, l'on n'avait pu faire qu'une observation de Rigel au cinquième fil, on la réduirait au fil du milieu, en ôtant deux fois $17^s,5$, ou 35^s de l'heure du passage à ce fil.

Lorsqu'on observe le Soleil, on note successivement tous les instants des passages du premier et du second bord à chacun des fils, et

l'on prend le milieu arithmétique de tous les instants, pour avoir l'époque du passage du centre au fil méridien ; c'est ce qu'on voit par le tableau suivant :

Le 12 août 1809, passage du Soleil au

	1er fil.	2e fil.	3e fil.	4e fil.	5e fil.	
	$25^m27^s,4$	$25^m45^s,5$	$9^h26^m\ 3^s,5$	$26^m22^s,0$	$26^m40^s,2$	1er bord.
	27.39,4	27.57,5	9.28.15,4	28.33,5	28.51,5	2e bord.
Somme....	13. 6,8	13.43,0	0.14.18,9	14.55,5	15.31,7	
Moyenne .	26.33,4	26.51,5	9.27. 9,45	27.27,5	27.45,85	Centre.

Prenant le milieu des cinq moyennes, on a, pour le passage du centre au méridien, $9^h27^m9^s,59$.

339. Passons maintenant au calcul de la déviation de la mire, supposée au sud de la station, la lunette méridienne étant d'ailleurs parfaitement rectifiée.

Soient Z (*fig.* 25) le zénith du lieu de l'observateur, ZA le vertical que décrit la lunette, P le pôle, et supposons que l'objectif soit tourné du côté du sud. La déviation orientale de la lunette sera représentée par l'angle sphérique MZH, qu'il s'agit de trouver à l'aide de l'observation des passages des astres A, B, au fil du milieu de la lunette.

Nommons H (*fig.* 25) la latitude du lieu Z, et désignons par Δ la distance polaire de l'astre A; le triangle sphérique ZPA, dans lequel P est l'angle horaire, et V l'azimut de l'astre compté du sud, donnera (art. **65**),

$$\text{tang}\, V = \frac{\sin\Delta\ \sin P}{\sin\Delta\ \sin H\ \cos P - \cos\Delta\ \cos H},$$

ou bien, faisant $V = 180° - A$, on trouvera aisément, en comptant l'azimut du nord à l'ouest,

$$\text{tang}\, A = \frac{\sin\Delta\ \sin P}{\cos(H+\Delta) + 2\sin\Delta\ \sin H\ \sin^2\frac{1}{2}P};$$

mais pour un passage à la lunette, très-près du méridien, P est extrêmement petit, et l'on a simplement

$$A = \frac{P\sin\Delta}{\cos(H+\Delta)} = \frac{(t - Æ)\sin\Delta}{\cos(H+\Delta)},$$

formule dans laquelle t désigne l'heure sidérale de l'observation et Æ celle du passage au méridien supérieur ou de la culmination. Telle est la relation qui existe entre la déviation A de la mire et la différence des temps des passages au milieu du fil de la lunette et au véritable méridien.

Mais traitons la question dans toute sa généralité, c'est-à-dire cherchons une formule relative au cas de non-rectification exacte de la lunette méridienne; car il peut arriver, 1° que l'axe optique normal ou la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation, ramenée à l'horizon, soit tout à fait hors du méridien et du vertical de la mire, et que sa déviation horizontale soit généralement x; 2° que l'axe optique apparent fasse avec l'axe optique normal un petit angle y; 3° enfin que l'axe de rotation soit incliné à l'horizon. Cela posé, si les déviations x, y sont occidentales, et que de plus l'extrémité orientale du niveau soit la plus basse, la déviation x de l'axe optique normal se composera de l'angle A, donné par l'axe optique apparent dirigé sur l'étoile, et de deux corrections dA, dA', l'une dépendant de l'inclinaison i de l'axe de rotation donnée par les parties du niveau, l'autre provenant de l'erreur y de l'axe optique apparent. Or il est facile de voir que la première correction est $dA = \frac{i}{\tang N}$, ou, dans ce cas particulier, de $dA = i \tang (H + \Delta)$, puisqu'à très-peu près $N = 90° - H - \Delta$. En effet, dans le triangle sphérique OVE dont les sommets des angles sont à l'extrémité ouest de l'axe de rotation, au zénith V et à l'étoile E, on a $OV = 90° - i$, $VE = N$, l'angle compris $OVE_{\prime} = 90° + dA$, et $OE = 90°$; ainsi, à cause de

$$\cos OE = \cos OV \cos VE + \sin OV \sin VE \cos OVE,$$

il est évident que

$$\sin i \cos N - \cos i \sin N \sin dA = 0,$$

ou simplement

$$dA = \frac{i}{\tang N} = i \tang (H + \Delta),$$

vu la petitesse des angles dA et i.

Quant à la seconde correction dA', il est encore plus facile de s'assu-

rer qu'elle est

$$dA' = -\frac{y}{\sin N} = -\frac{y}{\cos(H+\Delta)}.$$

Partant, l'azimut de l'axe optique normal, donné par un passage supérieur, sera

$$x = A + dA + dA',$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad x = \frac{P \sin \Delta}{\cos(H+\Delta)} + i \operatorname{tang}(H+\Delta) - \frac{y}{\cos(H+\Delta)},$$

en ne tenant pas compte toutefois de l'aberration diurne, à cause de son extrême petitesse.

Cette expression se change en celle-ci :

$$\frac{x \cos(H+\Delta)}{\sin \Delta} = P + \frac{i \sin(H+\Delta)}{\sin \Delta} - \frac{y}{\sin \Delta},$$

et une autre étoile donnerait pareillement à son passage supérieur

$$\frac{x \cos(H+\Delta')}{\sin \Delta'} = P' + \frac{i \sin(H+\Delta')}{\sin \Delta'} - \frac{y}{\sin \Delta'};$$

soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, puis effectuant les transformations et réductions qui se présentent d'elles-mêmes, et remarquant que $P = t - Æ$, $P' = t' - Æ'$, on aura, en secondes de degré, par deux passages supérieurs,

$$(2) \quad x = \frac{15\,[Æ' - Æ - (t'-t)] \sin \Delta \sin \Delta'}{\cos H \sin(\Delta' - \Delta)} + i \operatorname{tang} H - \frac{y \cos\frac{1}{2}(\Delta'+\Delta)}{\cos H \cos\frac{1}{2}(\Delta'-\Delta)}:$$

formule générale que Delambre n'a pas donnée explicitement, mais qu'on peut facilement déduire des formules qu'il a publiées dans la *Conn. des Temps* pour 1810, p. 409 et 411, en les corrigeant cependant d'une petite erreur de calcul assez apparente. En observant plusieurs fois les mêmes étoiles au fil du milieu de la lunette, on aura une suite de valeurs données par cette formule, et la moyenne arithmétique sera évidemment de cette forme :

$$x = B - yC.$$

Si l'une des deux étoiles passait au méridien inférieur ou au-dessous du pôle, la seconde, par exemple, on ferait Δ' négatif, et l'on aurait

$$(3)\quad x = \frac{15\,[Æ' - Æ - (t'-t)]\sin\Delta\sin\Delta'}{\cos H\sin(\Delta+\Delta')} + i\,\text{tang}\,H - \frac{y\cos\frac{1}{2}(\Delta-\Delta')}{\cos H\cos\frac{1}{2}(\Delta+\Delta')}.$$

Si les deux étoiles étaient observées au méridien inférieur, on prendrait Δ et Δ' négativement dans la formule (2). Enfin l'on aurait x par les deux passages d'une même étoile circompolaire, en faisant $Æ' - Æ = 12^h$ et $\Delta' = -\Delta$ dans cette même formule, c'est-à-dire

$$(4)\quad x = \frac{15\,[12^h - (t'-t)]}{2\cos H\cot\Delta} + i\,\text{tang}\,H - \frac{y}{\cos H\cos\Delta}.$$

Les deux passages T, T′ d'une autre étoile dont la distance polaire serait Δ', donneraient pareillement

$$x = \frac{15\,[12^h - (T'-T)]}{2\cos H\cot\Delta'} + i\,\text{tang}\,H - \frac{y}{\cos H\cos\Delta'}.$$

Enfin l'on combinera les doubles passages de ces deux étoiles en chassant les dénominateurs $2\cos H\cot\Delta$, $2\cos H\cot\Delta'$, et en soustrayant les deux résultats l'un de l'autre, ce qui donnera, en définitive,

$$(5)\quad x = \frac{15\,[T' - T - (t'-t)]\sin\Delta\sin\Delta'}{2\cos H\sin(\Delta'-\Delta)} + i\,\text{tang}\,H - \frac{y\cos\frac{1}{2}(\Delta'+\Delta)}{\cos H\cos\frac{1}{2}(\Delta'-\Delta)},$$

valeur indépendante des ascensions droites, et qui suppose que t et T sont des passages supérieurs. Si ces passages ont lieu à quelques minutes l'un de l'autre, les intervalles $t - T$, $T' - t'$, exprimés en temps sidéraux, ne seront point influencés par l'irrégularité de la marche de la pendule, et si de plus Δ' diffère de Δ de plusieurs degrés, on aura la déviation x avec beaucoup de précision. Cette dernière formule conviendra à deux passages opposés t, T et t', T′, en y prenant négativement la distance polaire Δ' de l'étoile qui passera au méridien inférieur à peu d'intervalle du passage supérieur de l'autre étoile. Telle est la méthode d'observation de M. Butt, que M. Biot a appliquée, en février 1825, aux trois premières étoiles de la petite Ourse, pour déterminer un azimut, près de Fiume, à l'extrémité orientale du parallèle moyen (*Conn. des Temps*, 1830, page 70.)

On voit par là qu'à la rigueur trois étoiles suffisent pour déterminer la déviation x de l'axe optique normal et l'inclinaison ou l'erreur y de l'axe optique apparent; en sorte que si celui-ci est toujours dirigé exactement sur la mire avant les observations, $x+y$ sera l'azimut ou la déviation même de cette mire. Si au contraire on a soin, comme le conseille Delambre, d'établir une parfaite coïncidence entre l'axe optique normal, l'axe optique apparent et la mire, à l'origine des observations, l'erreur y sera nulle et le petit angle x sera la déviation de la mire.

Le premier terme de l'équation (2) sera déterminé d'autant plus exactement que $P-P' = Æ' - Æ - (t'-t)$ sera mieux connu. Or la bonté des catalogues actuels ne laisse aucun doute sur la différence $Æ' - Æ$ des ascensions droites d'un grand nombre d'étoiles, et si l'intervalle $t'-t$ des passages à la lunette est fort court, il sera exempt de l'irrégularité de la pendule et des variations atmosphériques. On n'aura donc à craindre que l'erreur commise sur $t'-t$ en évaluant l'instant précis où l'étoile traverse le fil central, erreur qui peut être détruite ou doublée au second passage. En la supposant de 1^s de temps ou de $15''$ en arc, l'erreur correspondante de l'azimut sera évidemment, pour deux étoiles observées à leur passage supérieur,

$$dx = \frac{15'' \sin\Delta \sin\Delta'}{\cos H \sin(\Delta'-\Delta)} = f;$$

ou, pour un passage supérieur et un passage inférieur,

$$dx = \frac{15'' \sin\Delta \sin\Delta'}{\cos H \sin(\Delta'+\Delta)} = f;$$

ou enfin pour les deux passages d'une même étoile,

$$dx = \frac{15''}{2 \cos H \cot\Delta} = f.$$

Cette valeur de dx est donc le facteur par lequel il faudrait multiplier l'erreur dP si elle était différente de 1^s de temps, pour avoir la correction absolue de la déviation x. Ce facteur est d'autant plus utile à connaître numériquement, qu'il indique le degré de confiance que mérite la combinaison de deux étoiles, effectuée dans le but d'obtenir exacte-

ment l'azimut de la mire. C'est ainsi que l'on reconnaît qu'à la latitude de 45° l'erreur d'une seconde, sur l'intervalle des passages de la Polaire, amène seulement une correction de 0",3 en arc à l'azimut, tandis que, par la combinaison d'Arcturus et de 2γ supérieur de la petite Ourse, elle donne lieu à une correction de près de 8".

Quant à la valeur de y, comme elle est au-dessous d'une demi-seconde de degré lorsqu'on a disposé le mieux possible l'axe optique apparent perpendiculairement à celui de rotation, il est assez douteux qu'on l'obtienne de la sorte avec précision, soit à cause de son extrême petitesse, soit parce qu'il n'est pas certain qu'elle demeure constante pendant la durée des observations, c'est-à-dire pendant plusieurs jours de suite : aussi nous paraît-il convenable de rectifier complétement la lunette avant les observations de chaque jour, opération qui n'est ni longue ni difficile, et par suite de laquelle il est permis le plus souvent de s'en tenir au premier terme de x. Par exemple cette déviation, donnée par les doubles passages d'une même étoile, étant

$$x = \frac{15[12^h - (t' - t)]}{2 \cos H \cot \Delta},$$

et ne dépendant point de l'ascension droite, sera d'autant plus exacte que cot Δ sera plus grand. Delambre, à qui est due cette méthode, indique la Polaire, δ, β, γ de la petite Ourse et γ de Céphée, parce qu'on n'a rien à craindre de l'irrégularité de la pendule. (*Astronomie*, tome I, page 431.) On fera bien alors de placer la mire au nord de la station.

APPLICATIONS.

340. Supposons qu'à la latitude de 48°50' on ait placé vers le nord, à environ 2000^m de distance, une mire méridienne; on en trouvera la déviation ainsi qu'il suit, par la combinaison de deux étoiles passant au méridien à peu d'intervalle l'une de l'autre.

Formule (3).

α DE LA PETITE OURSE. Passage supérieur.		ε DE LA GRANDE OURSE. Passage inférieur.	
temps sidér. Æ =	$0^h59^m19^s,26$	temps sidér. Æ =	$0^h46^m\ 5^s,40$
à la lunette t =	1. 0.34,00	à la lunette t' =	0.46.19,39
t − Æ =	0. 1.14,74	Æ′ − t' = −	0. 0.13,99
Æ′ − t' =	− 13,99	Δ =	1°37′ 8″
Æ′ − Æ − (t' − t) =	0. 1. 0,75	Δ′ =	33. 1.57

par suite

log 60″,75 =	1,78355	$\cos \frac{1}{2}(\Delta' - \Delta)$ =	9,98347
$\sin \Delta$ =	8,45104	$c.\cos \frac{1}{2}(\Delta' + \Delta)$ =	0,02017
$\sin \Delta'$ =	9,73650	$c.\cos H$ =	0,18161
$c.\cos H$ =	0,18161		0,18525
$c.\sin(\Delta' + \Delta)$ =	0,24522	=	1,5319
	0,39792 = $2^s,75$ en temps,		
	1,17609		
	1,57401 = 37″,5 en arc.		

De là, en secondes de degré,

$$\text{Déviat. occid. } x = 37'',5 + i(1,1436) - y(1,5319).$$

Quoique, dans cet exemple, les temps des observations soient affectés de l'avance ou de l'équation de la pendule, il est évident que la déviation en est absolument indépendante. Si l'on veut maintenant trouver cette avance, on cherchera la correction dP par l'une ou l'autre étoile; ainsi le passage supérieur de la Polaire donnera, en prenant x en secondes de temps,

$$dP = \frac{x \cos(H + \Delta')}{\sin \Delta} = 56^s,34,$$

et le passage inférieur de la seconde étoile

$$dP' = \frac{x \cos(H - \Delta')}{-\sin \Delta'} = -\ 4^s,41;$$

mais

	$t = 1^h\ 0^m 34^s,00$		$t' = 0^h 46^m 19^s,39$
	$dP = -\ 56,34$		$dP' = +\ 4,41$
Passage au mérid. temps de la pendule	$= 0.59.37,66$		$0.46.23,80$
Temps sidéral	$Æ = 0.59.19,26$		$Æ' = 8.46.\ 5,40$
Avance.	$18,40$		$18,40$

Il est à remarquer que la combinaison de ces deux étoiles est plus propre à faire connaître la déviation x qu'à donner exactement l'avance ou le retard de la pendule. Dans ce dernier cas, les étoiles zodiacales sont préférables aux autres, parce que leur mouvement diurne d'orient en occident est très-rapide. En observant donc chaque jour aux cinq fils du réticule un grand nombre de ces étoiles situées au nord et au sud de l'équateur, on connaîtra parfaitement l'état de la pendule et sa marche diurne. Telle est la méthode par excellence suivie dans tous les observatoires.

341. Nous avons dit (art. **4**) que pour s'assurer si la marche diurne d'une pendule suit exactement le temps sidéral, il suffisait d'observer les passages consécutifs d'une étoile dans un vertical quelconque; mais cette observation ne fait pas connaître son avance absolue ou son retard (art. **304**). En supposant qu'il s'agisse d'un retard absolu ρ, que la variation diurne soit nulle, et que la lunette soit bien rectifiée, on aura, lors du passage d'une première étoile,

$$(1') \qquad \rho + t - Æ = x\,(\cos H \cot \Delta - \sin H),$$

et lors du passage d'une seconde étoile,

$$(1'') \qquad \rho + t' - Æ' = x\,(\cos H \cot \Delta' - \sin H);$$

d'où il suit, comme précédemment,

$$(2') \qquad x = \frac{[Æ' - t' - (Æ - t)] \sin \Delta \sin \Delta'}{\cos H \sin(\Delta' - \Delta)}.$$

Connaissant x, on aura ρ par l'une ou l'autre équation d'où dérive celle-ci.

Choisissons pour exemple les observations que Delambre a employées lui-même pour expliquer sa méthode (*Connaissance des Temps* de 1792).

Le 13 août 1789, ce savant astronome n'ayant pas eu le temps de remettre sa lunette des passages sur la mire méridienne, en calcula la déviation, par les passages de 2α♑ et de α du Cygne.

Passage observé de 2α♑.	$t = 20^h\ 6^m 30^s,50$
Ascension droite apparente calculée. . .	Æ $= 20.\ 6.24,05$
Différence. . . . . $t -$ Æ $=$	$+\ 6^s,45$
Passage observé de α du Cygne.	$t' = 20^h 34^m 21^s,80$
Ascension droite apparente calculée. . .	Æ$' = 20.34.18,20$
Différence. . . . . $t' -$ Æ$' =$	$+\ 3^s,60$

de là

$$Æ' - t' - (Æ - t) = +\ 2^s,85.$$

D'ailleurs on avait alors

$$\Delta = 103^\circ 11', \quad \Delta' = 45^\circ 30', \quad \mathrm{H} = 48^\circ 50',$$

et par conséquent

$$\Delta' - \Delta = +57^\circ 41';$$

par suite la formule (2) ou (2') donnera

$$x = \frac{+\ 2^s,85 \sin\Delta \sin\Delta'}{+\cos\mathrm{H} \sin(\Delta' - \Delta)};$$

et par logarithmes, on aura

$$\begin{aligned} \log 2^s,85 &= 0,45484 + \\ \sin\Delta &= 9,98840 \\ \sin\Delta' &= 9,85324 \\ \text{c.}\cos\mathrm{H} &= 0,18161 \\ \text{c.}\sin(\Delta' - \Delta) &= 0,07309 - \\ \log x &= 0,55118 = -3^s,5578 \end{aligned}$$

La déviation x de la mire méridienne était donc occidentale et de $3^s,558$ en temps; ce qui fait $53'',37$ en arc.

On aura maintenant le retard absolu ρ, à l'époque des observations, par les deux formules $(1', 1'')$; la première, relative au passage de 2α ♑, devient, en y mettant pour x sa valeur en temps,

$$\rho = Æ - t + x\,\frac{\cos(\Delta + H)}{\sin\Delta} = -6^s,45 + 3^s,23 = -3^s,22;$$

la seconde formule, relative au passage de α du Cygne, donne

$$\rho = Æ' - t' + x\,\frac{\cos(\Delta' + H)}{\sin\Delta'} = -3^s,60 + 0^s,38 = -3^s,22.$$

Dans ce calcul, les seconds termes $3^s,23$ et $0^s,38$ sont positifs, parce que $\cos(\Delta + H)$ et $\cos(\Delta' + H)$ sont négatifs de même que x. Ainsi, la valeur de ρ étant elle-même négative, exprime une avance au lieu d'un retard que nous avions supposé d'abord.

342. Le moyen de se familiariser avec les méthodes et d'en apprécier l'exactitude, est d'en faire diverses applications : nous choisirons en conséquence, pour dernier exemple, les deux passages de la Chèvre observés à Paris par Delambre, le 1er août 1789.

Passage inférieur à la lunette à. . . . . . $17^h 1^m 18^s,8 = t'$,
Passage supérieur 12 heures après, ou à. . $5^h 1^m 18^s,6 = t$.

On avait d'ailleurs

$$\Delta = 44^\circ 15', \qquad H = 48^\circ 50';$$

de là, $t' - t = 12^h 0^m 0^s,2$, et ensuite la formule (5) donne en temps,

$$x = \frac{-0^s,2\tan\Delta}{2\cos H} = -0^s,148;$$

ainsi l'on a en arc

$$x = -2'',25.$$

On juge, par le signe de x, que la déviation était occidentale quand

l'objectif était tourné vers le sud, comme nous l'avons supposé dans les formules précédentes : elle serait au contraire orientale, si l'on tournait l'objectif vers le nord. Mais pour obtenir cette déviation avec une grande exactitude, il faut faire de nombreuses observations.

343. Il est des ingénieurs qui, au lieu d'employer une mire méridienne pour orienter une chaîne de triangles, observent le passage des astres par le vertical d'un signal quelconque; mais alors le succès de cette méthode dépend trop du temps et de la déclinaison de l'astre qu'on observe (art. **333**). Quoi qu'il en soit, voici le calcul complet d'une observation de ce genre faite, le 1er avril 1811, à Amsterdam.

Le général Krayenhof, ayant dirigé sa lunette sur le signal de Haarlem, observa au fil du milieu le passage des deux bords du Soleil; l'observation du bord oriental apparent eut lieu à $6^h 2^m 4^s$ du soir, en temps du chronomètre, et celle du bord occidental à $6^h 4^m 48^s$. Dans le même moment, le baromètre marquait $0^m,76$, et le thermomètre centigrade $+14^g$; on demande l'azimut de Haarlem sur l'horizon d'Amsterdam, sachant en outre que

la latitude nord d'Amsterdam $H = 52°22'17''$,
que la longitude orientale. . $= 2.33.\ 0$;

que le retard du chronomètre en 24 heures solaires vraies $= 18^s,4$;
enfin, que son avance absolue sur le midi vrai, au 1er avril $= 4^m\ 4^s,56$.

Solution. Lorsqu'un astre est loin du méridien, son mouvement en azimut ne peut plus à la rigueur être considéré comme proportionnel au temps, dans de courts intervalles. Ainsi, au lieu de prendre la moyenne des temps des passages des deux bords du Soleil pour l'heure du passage du centre au signal ou au fil du milieu, nous calculerons l'azimut du centre du Soleil, compté du nord vers l'ouest, pour le moment de l'observation du bord occidental vrai; et de cet angle, nous retrancherons la correction due au demi-diamètre horizontal du Soleil, pour avoir l'azimut du signal. Cependant, le temps que le diamètre de cet astre reste sous le fil est si court, qu'on pourrait encore sans inconvénient faire usage de la méthode dont il s'agit.

Cela posé, on aura l'heure vraie de l'observation, en retranchant d'abord du temps du chronomètre l'avance de la pendule sur le midi

vrai ; ainsi

heure de l'observation	$6^h\ 2^m\ 4^s,00$ en temps du chronomètre
avance absolue. . . .	$-\ 4.\ \ 4,56$
reste.	$5^h 57^m 59^s,44$

Mais le retard diurne est de $18^s,4$; donc le retard à $5^h 57^m 59^s,44$ s'obtiendra par cette proportion :

$$24^h - 18^s,4 : 18^s,4 :: 5,966 : x = 4^s,57.$$

Ajoutant $4^s,57$ à $5^h 57^m 59^s,44$, on a pour l'heure vraie de l'observation $5^h 58^m 4^s,01$. Réduisant ce temps en degrés, on a l'angle horaire

$$P = 89^\circ 31' 0'',15.$$

Au même instant, l'on comptait à Paris $5^h 47^m 52^s,01$ puisque Amsterdam est à l'est de cette ville, et que la différence des méridiens est de $2^\circ 33'$ ou $10^m 12^s$ en temps. Calculant par conséquent la déclinaison du Soleil pour $5^h 47^m 52^s,01$, on trouve (art. **239**)

$$D = 4^\circ 23' 48'',32 \text{ boréale.}$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'azimut A du centre du Soleil. Employons, comme à l'art. **326**, les formules de Néper, savoir :

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A + S) = \cot \tfrac{1}{2} P \frac{\cos \frac{1}{2}(H - D)}{\sin \frac{1}{2}(H + D)},$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - S) = \cot \tfrac{1}{2} P \frac{\sin \frac{1}{2}(H - D)}{\cos \frac{1}{2}(H + D)};$$

S étant l'angle au Soleil (*fig.* 26). Si la déclinaison du Soleil était australe, il faudrait la prendre négativement, et par conséquent changer le signe de D dans ces formules.

TYPE DU CALCUL.

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H} = 26^\circ 11'\ 8'',50, \qquad \frac{\mathrm{H}-\mathrm{D}}{2} = 23^\circ 59' 14'',34,$$
$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{D} = 2.11.54,16, \qquad \frac{\mathrm{H}+\mathrm{D}}{2} = 28.23.\ 2,66,$$
$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{P} = 44.45.30,07,$$

$$\begin{array}{rl} \log\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{D}) = 9{,}9607730 & \log\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{D}) = 9{,}6090973 \\ \mathrm{c.}\log\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{D}) = 0{,}3229595 & \mathrm{c.}\log\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{D}) = 0{,}0556255 \\ \mathrm{l.}\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{P} = 0{,}0036633 & \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0036633 \\ \log\tan\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{S}) = 0{,}2873958 & \log\tan\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{S}) = 9{,}6683861 \\ & \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{S}) = 62^\circ 42' 31''36 \\ & \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{S}) = 24.59.\ 7{,}91 \end{array}$$

Azimut compté du nord vers l'ouest... $\mathrm{A} = 87.41.39{,}27$

Tel est l'azimut du centre du Soleil, lorsque le bord oriental apparent ou le bord occidental vrai est dans le vertical du signal; mais il faut avoir l'azimut de ce bord. Pour cela, l'on cherchera la correction due au demi-diamètre horizontal SO du Soleil, laquelle est égale à l'angle OZS formé par les plans verticaux ZS, ZO. Calculons d'abord ZS, ou la distance zénithale vraie géocentrique du Soleil, à l'aide de la règle des quatre sinus, savoir :

$$\sin \mathrm{ZS} = \frac{\sin \mathrm{P} \sin \mathrm{SP}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin \mathrm{P} \cos \mathrm{D}}{\sin \mathrm{A}} = \sin \mathrm{N}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin\mathrm{P} = 9{,}9999845 & \\ \mathrm{l.}\cos\mathrm{D} = 9{,}9987201 & \\ \mathrm{c.}\log\sin\mathrm{A} = 0{,}0003518 & \\ \mathrm{l.}\sin\mathrm{N} = 9{,}9990564 & \mathrm{ZS} = 86^\circ 13' 32'',14. \end{array}$$

Ajoutant à cette distance zénithale la parallaxe de hauteur du Soleil, qui est $8'',77$, on a $86^\circ 13' 40'',91$, pour la distance zénithale vraie rapportée au lieu même de l'observation. Il s'agit maintenant d'avoir la distance zénithale apparente; or, la table des réfractions ayant pour argument la distance vraie, on trouvera, en procédant comme à

l'art **254**,

Réfraction vraie.	$= - 11'40''5$
Mais distance zénithale vraie.	$N = 86^\circ 13.40,9$
Donc distance zénithale apparente cherchée.	$= 86.\ 2.\ 0,4 = z'$

Il résulte de là que dans le triangle sphérique OZS, qu'on peut supposer rectangle en O, l'on connaît le côté ZS et le côté $OS = 16'1'',3 = \frac{1}{2}\delta$ (*Connaissance des Temps* de 1811, 1[er] avril); donc pour avoir l'angle en Z ou la correction d'azimut, c'est-à-dire le demi-diamètre azimutal du Soleil, on dira

$$1 : \sin ZS :: \sin.\ \text{correction} : \sin OS,$$

d'où

$$\sin.\ \text{correction} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\sin z'};$$

de là

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\delta = 7,6684332$$
$$\text{c. } \log \sin z' = 0,0010416$$
$$\text{l. } \sin.\ \text{correction} = 7,6694748$$
$$\text{c. } \sin 1'' = 5,3144251$$
$$\log \text{correction} = 2,9838999 = 963'',6 = 16'3'',6.$$

Comme on a réellement observé le bord occidental, cette correction est soustractive de l'azimut du centre du Soleil; ainsi

Azimut du Soleil.	$87^\circ 41' 39'',27$
Correction.	$-\ 16.\ 3,60$
Azimut du signal, compté du nord à l'ouest.	$87^\circ 25' 35'',67$
Réduction au centre de la station.	$+\ 0,70$
Azimut définitif. . . .	$87.25.36,37$

Quoique les azimuts soient très-faciles à observer de cette manière, il est cependant douteux qu'on puisse jamais les obtenir avec la précision que procurent les méthodes des art. **332** et **336**.

CHAPITRE VII.

DE LA MESURE ASTRONOMIQUE DES LONGITUDES TERRESTRES.

1°. *Par le moyen d'un garde-temps, et par les passages de la Lune à différents méridiens.*

344. La position d'un lieu sur la Terre dépendant à la fois de sa latitude et de sa longitude, il convient de faire connaître les méthodes que l'on emploie avec succès pour déterminer ce second élément géographique.

Lorsqu'il s'agit de déterminer la différence en longitude de deux lieux fort voisins, les bonnes montres marines ou les chronomètres qui, comme ceux de Berthoud, conservent une marche à très-peu près uniforme pendant plusieurs mois, peuvent être employés de préférence pour cet objet. Si donc, dans un certain lieu, une telle montre était exactement réglée sur le moyen mouvement du Soleil, et que dans un autre lieu le midi moyen arrivât à 11 heures comptées sur cette montre, la différence en longitude serait d'une heure moyenne ou de 15°, et le second lieu serait évidemment à l'est du premier.

Il n'est pas toujours possible de déterminer l'instant précis du midi; cela d'ailleurs n'est pas nécessaire, puisque l'on peut trouver le temps vrai pour tout autre moment du jour (art. **301**). Supposons donc qu'après avoir réglé une montre à l'Observatoire de Paris, on ait pris, dans un autre lieu, des hauteurs absolues du Soleil avant son passage au méridien, et calculé l'heure vraie, puis le temps moyen de l'observation (art. **302**); la différence de ce temps avec l'heure marquée par la montre, lors de l'observation, sera, comme ci-dessus, la différence des deux méridiens.

Les deux exemples suivants fixeront encore mieux les idées à ce sujet.

Le 1er avril 1804, à 43°17′ de latitude nord, et par 40°15′ de longitude occidentale estimée, on a trouvé, pour la distance du centre du Soleil au zénith, 69°20′22″,05, au moment où la montre, réglée sur le *temps moyen* à Paris, marquait $7^h8^m30^s,86$ du soir. A cette même époque, la déclinaison du Soleil était de 4°41′5″,2 (article **301**); il suit de là et de l'article cité, que le temps vrai de l'observation, pour le lieu où elle s'est faite, était $4^h23^m24^s,06$. Mais l'on trouve dans la *Connaissance des Temps*, que le 1er avril 1804, le *temps moyen au midi vrai* égalait $0^h3^m57^s,2$, et que cette quantité diminuait de $18^s,4$ en 24 heures; donc, à $7^h4^m24^s,06$, temps vrai compté à Paris, elle avait diminué de $5^s,40$, et alors le temps moyen n'était en avance sur le temps vrai, au moment de l'observation, que de $0^h3^m57^s,2 - 5^s,40 = 0^h3^m51^s,80$. Cela posé,

Temps moyen compté à Paris, au moment de l'observation.	$7^h\ 8^m30^s,86$
Équation du temps soustractive, parce que le temps moyen est en avance sur le temps vrai.	$-\ 3.51\ ,80$
Temps vrai compté à Paris.	$7.\ 4.39\ ,06$
Temps vrai de l'observation par rapport au méridien du lieu où elle s'est faite.	$4.23.24\ ,06$
Différence de longitude, en temps.	$2^h41^m15^s,00$
Donc, longitude occidentale du lieu de l'observation, par rapport au méridien de Paris.	$=40°18'45''$

Par cette méthode, l'on suppose connaître déjà à peu près la différence de longitude cherchée, et il est rare que l'on n'ait pas une donnée satisfaisante à cet égard. D'ailleurs on pourra, dans un premier calcul, employer la déclinaison du Soleil pour le jour de l'observation et pour midi à Paris : dans l'exemple ci-dessus, cette déclinaison boréale = 4°34′25″. Lorsqu'on aura trouvé ainsi la différence de longitude approchée, on recommencera le calcul, en faisant à la déclinaison du Soleil la correction due à cette différence.

Si le garde-temps avait une petite variation diurne, il ne faudrait point négliger d'en tenir compte, et à cet égard il est très-important

que le temps écoulé entre cette observation et celle qui sert à faire connaître l'état du chronomètre ne soit que d'un petit nombre de jours; car de quelque perfection que soit doué cet instrument, il est très-rare que la variation diurne soit longtemps constante.

Par exemple, supposons qu'un observateur ait reconnu, le 26 mai 1840, que son chronomètre, à Toulon, retardait de $3^m 17^s$ sur le midi vrai, ou, ce qui est de même, était alors d'accord avec le temps moyen, mais qu'il avait une avance diurne de $3^s,4$; que ce même observateur, se trouvant à Alger dix jours après, se soit assuré que son chronomètre marquait $17^h 17^m 29^s,75$ à $5^h 8^m 47^s$ du soir, temps moyen; on demande quelle est la différence des méridiens des deux lieux de station.

Solution. L'heure actuelle du chronomètre, comptée de minuit, étant....................	$17^h 17^m 29^s,75$	
on ôte......................	11.56.43,00	qui est l'heure de la 1re époque (t. m.) comptée de même.
On ôte en outre................	34,00	quantité dont le chron a avancé en 10 jours.
Il reste.....................	5.20.12,75	pour l'angle horaire approché à Toulon le 5 juin;
et comme la variat. pour $5^h,3$ est.	— 0,75	
on a l'heure moyenne de Toulon. =	5.20.12,00	correspondante à
l'heure moyenne d'Alger........ =	5. 8.47,00	
De là, différence des méridiens... =	$0^h 11^m 25^s,00$	Alger étant à l'ouest de Toulon,

parce que la première heure est plus grande que la seconde.

Mais la longitude de Toulon, comptée du méridien de Paris.	= — $0^h 14^m 22^s$ (est)
Différence des méridiens ci-dessus..................	= + 0.11.25
Donc longitude d'Alger............................	= — $2^m 57^s$

C'est en effet le résultat déduit d'observations faites en 1837, par M. le capitaine Bérard, correspondant de l'Institut.

On déterminerait les différences de longitude plus commodément par l'observation d'une étoile, si la montre était réglée sur le temps sidéral; et si l'intervalle de temps entre les observations était court, il serait permis de supposer insensibles les variations de la précession, de l'aberration et de la nutation sur la position apparente de cette étoile.

Si l'on se servait de cet expédient pour déterminer la différence des méridiens des extrémités d'un arc de parallèle, l'on mettrait en comparaison deux ou trois chronomètres excellents, et l'on aurait soin qu'ils n'éprouvassent aucune secousse dans le transport. Ceux que M. Motel, artiste français, exécute pour la marine, sont fort estimés. Feu Breguet avait imaginé de renfermer deux mouvements dans la même boîte, et de les régulariser l'un par l'autre, afin d'obtenir par ce moyen une marche plus uniforme et plus indépendante des mouvements du vaisseau (*).

345. Un des meilleurs procédés pour déterminer la différence en longitude de deux lieux éloignés, consiste dans les observations réitérées des passages de la Lune au méridien, quoiqu'elles soient assez difficiles à faire, que les moindres circonstances puissent les rendre défectueuses, et que celles correspondantes aux quadratures conduisent à des résultats qui ne sont pas très-concordants. Il est à remarquer d'abord que l'on compte la même heure sidérale en deux lieux quelconques de la Terre, lorsqu'une étoile passe successivement au méridien de chaque lieu : si donc la Lune n'était douée, comme les étoiles, que du mouvement diurne d'orient en occident, elle ne pourrait nullement servir à procurer par ce moyen la différence en longitude; mais à cause de la rapidité de son mouvement propre et direct en ascension droite, les différences des temps de son passage et de celui d'une étoile en deux méridiens, diffèrent sensiblement entre elles d'une quantité qui est précisément la mesure de ce mouvement, les observatoires fussent-ils même peu distants l'un de l'autre, comme le sont, par exemple, ceux de Paris et de Greenwich. Ainsi, en supposant que a soit, en temps sidéral, le mouvement de la Lune en ascension droite, observée de cette manière dans l'intervalle de deux passages, et que d exprime la différence cherchée des longitudes, estimée de même en

(*) M. Daussy a exposé une nouvelle méthode pour atténuer, le plus qu'il est possible, l'effet des irrégularités de la marche des chronomètres sur la détermination des longitudes par leur moyen; elle fait partie des Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1843.

heures sidérales, $a+d$ sera le temps physique réellement écoulé entre les deux passages. Or, par les Ephémérides, on trouve que la Lune, à l'époque correspondante au milieu des temps des deux observations comparées, avait un mouvement en ascension droite de h degrés pendant une heure de temps solaire moyen : ce mouvement sera donc de $\frac{h}{\sigma}$ pour une heure sidérale, en désignant par σ le nombre 1,0027379 qui exprime le facteur par lequel il faut multiplier une durée de temps moyen pour la convertir en temps sidéral. (Art. **14**.) Par conséquent, dans le nombre d'heures $a+d$, la Lune aura parcouru en ascension droite un arc de $(a+d)\frac{h}{\sigma}$ degrés. Mais cet arc ou différence d'ascension droite a aussi pour mesure $a.15°$, puisqu'en vertu du mouvement diurne de la sphère céleste, un point de l'équateur décrit un arc de 15° dans une heure sidérale, et de $a.15°$ dans le temps a. Partant

$$(a+d)\frac{h}{\sigma} = 15.a;$$

et enfin

$$d = \frac{a(15.\sigma - h)}{h}.$$

Telle est la formule qui donne en temps la différence des méridiens de deux lieux d'où l'on a observé à la lunette méridienne (art. **336**) un grand nombre de fois les passages de la Lune, comparés à ceux d'étoiles situées à peu près sur le même parallèle que cet astre. Cependant, comme il n'est pas toujours possible d'observer le même jour les mêmes étoiles aux deux observatoires, on calcule leurs différences d'ascensions droites apparentes, afin de rendre les observations parfaitement comparables. C'est ainsi que M. Bouvard a trouvé, par plus de 600 observations, que la longitude de Greenwich est de 9′22″,03 ouest de Paris (*Connaissance des Temps* de 1825, page 345); résultat qui surpasse seulement de 0″,41 celui auquel a conduit récemment la méthode des feux. (*Descrip. géomét. de la France*, tome II, page 416.)

Choisissons pour application les observations faites à Paris et à Kœnigsberg, le 25 octobre 1830, des passages du bord occidental de la

Lune. Ce jour-là, l'on a eu

à Paris.	$6^h 54^m 53^s,04$ temps moyen
à Kœnigsberg . .	$6.52.\ 5\ ,90$
Différence en temps moyen.	$2^m 47^s,14$
Réduct. au temps sidéral. .	$+\ 0\ ,46$
	$a = 2^m 47^s,60 = 167^s,6$

La *Connaissance des Temps* fait connaître que le même jour l'asc. dr.

Æ de la ☾ à midi était	$310^\circ\ 0'40''$
à minuit. .	$316.41.57$
ainsi, diff. en 12^h	$6.41.17$
et en une heure vraie $h =$	$0^\circ 33' 26'',42$
d'où en temps $\frac{1}{15} h =$	$0^h\ 2^m 13^s,76 = 133^s,76.$

Soit $\sigma = 1^h + m$, m étant le mouvement en asc. dr. du Soleil pendant une heure vraie; on aura pour l'époque indiquée,

$$m = \frac{3^m 50^s,0}{24} = 9^s,583 \text{ (temps sidéral)},$$

et par conséquent

$$1^h + m = 60^m 9^s,58 = 3609^t,58,$$
$$1^h + m - \tfrac{1}{15} h \quad = 3475\ ,82.$$

De là

$$\log a = 2,224274$$
$$\log (1^h + m - \tfrac{1}{15} h) = 3,541055$$
$$\text{c.}\log \tfrac{1}{15} h = 7,873674$$
$$\log d = 3,639003 = 4355^s,2;$$

enfin

$$\text{longitude de Kœnigsberg, } d = 1^h 12^m 35^s,2.$$

Dans la formule précédente, le mouvement a de la Lune se déduit de l'observation de l'un de ses bords, et non de celle du centre; d'un autre côté, les tables astronomiques donnent le mouvement horaire h de ce point. Ainsi on doit, à la rigueur, corriger a de l'effet du demi-diamètre apparent de la Lune à chaque station. Si, par exemple, r_1 et

r_2 sont les demi-diamètres de ce satellite, vus du centre de la Terre, et D_1, D_2 ses déclinaisons à chaque passage, ces demi-diamètres horizontaux, réduits à l'équateur et convertis en temps sidéral, seront $\frac{r_1}{15\cos D_1}$, $\frac{r_2}{15\cos D_2}$, sans qu'il soit nécessaire d'avoir égard à l'augmentation à raison de la hauteur de la Lune sur l'horizon (*Astr.* de Delambre, page 314); et le vrai mouvement en ascension droite du centre de cet astre, dans l'intervalle des deux passages, sera

$$a \pm \frac{1}{15}\left(\frac{r_1}{\cos D_1} - \frac{r_2}{\cos D_2}\right).$$

Partant, la différence des méridiens est plus exactement

$$d = \left[a \pm \frac{1}{15}\left(\frac{r_1}{\cos D_1} - \frac{r_2}{\cos D_2}\right)\right]\left(15 . \frac{\sigma}{h} - 1\right),$$

en prenant le signe + ou le signe — selon qu'on aura observé le bord occidental ou le bord oriental.

Toutefois, il faut admettre que cette différence n'est guère de plus d'une heure, comme celle que nous venons de déterminer; parce que le mouvement horaire h de la Lune, supposé uniforme dans cette formule, est au contraire continuellement variable. Mais l'on aura nécessairement égard à la variabilité de ce mouvement en procédant ainsi qu'il suit.

Le 30 mai 1822, M. Bouvard observa successivement le bord occidental de la Lune et l'épi de la Vierge, et trouva l'intervalle de temps sidéral $t_1 = -32^m 21^s,86$; intervalle que nous affectons du signe négatif pour indiquer que la Lune précédait l'étoile. Le lendemain, M. Runcker fit les mêmes observations à Paramatta, dans la Nouvelle-Galles méridionale, et trouva leur intervalle $t_2 = -5^m 41^s,81$; on demande quelle est la différence des méridiens des deux Observatoires.

Cherchons d'abord l'heure de la culmination du centre de la Lune à Paramatta. Or on sait, par la *Conn. des Temps* pour l'année 1822, que cette culmination a eu lieu à Paris à $8^h 16^m$ de temps vrai, à très-peu près; et comme la longitude de Paramatta diffère peu de $9^h 54^m 30^s$ à

l'est, ou de $14^h5^m30^s$ à l'ouest, on a

$$d = 14^h\ 5^m30^s$$

et à très-peu près $a = t_2 - t_1 =$ 26.40,05

Temps sidéral. . . . $a + d =$ 14.32.10,05 entre les deux culminations.

Réduct. au t. vr. (table IV) — 2.23,00, ce qui est suffisant.

14.29.47

Culmin. à Paris $H_1 =$ 8.16

Culmin. à Paramatta $H_2 =$ 22.46 comptées de Paris.

Cette dernière heure étant connue ainsi approximativement, on aura recours à la *Conn. des Temps* de 1822 pour évaluer, conformément à ce qui a été prescrit à l'art. **240**, les quantités suivantes :

à Paris pour 8^h16^m t. v.	à Paramatta pour 22^h46^m t. v.
$r_1 = 14'53''$	$r_2 = 14'49'',3$
déclin. $D_1 = 9°15'20''$ (aust.)	déclin. $D_2 = 12°22'\ 9''$ (aust.)

De plus

mouvem. ☉ en asc. dr. et en 24^h, $s = 4^m4^s,6 = 244^s,6$ en temps.

Avec ces données, l'on déterminera, en temps sidéral, le véritable mouvement du centre de la Lune, savoir :

$$a = t_2 - t_1 \pm \frac{1}{15}\left(\frac{r_2}{\cos D_2} - \frac{r_1}{\cos D_1}\right).$$

D'abord on a

$$t_2 - t_1 = 26^m40^s,05,$$

$$\frac{r_1}{\cos D_1} = 904'',786, \quad \frac{r_2}{\cos D_2} = 910'',433\,;$$

puis prenant le signe + parce qu'on a observé le bord occidental de la Lune, le mouvement du centre sera

$$a = 0^h26^m40^s,426 = 0^h,444563\,;$$

ajoutant la différence

des mérid. approc. $d =$ 14. 5.30

on aura. . . . $a + d =$ 14.32.10,43 temps sidéral.

Ce temps devant être converti en temps vrai, on le multipliera par $\frac{24}{24+s}$, et l'on aura

$$(a+d)\,\frac{24}{24+s} = 14^h 29^m 42^s,66 = H_2 - H_1;$$

ajoutant l'heure de la culmin. à Paris . . $H_1 = 8.16$

l'heure vraie de la culm. à Paramatta sera. $H_2 = 22.45.42,66$ comptée de Paris.

Remarquons maintenant que $a+d$ exprime, en temps sidéral, l'intervalle entre deux passages consécutifs de la Lune aux deux méridiens; si donc T_1 est l'heure sidérale de la culmination à Paris et T_2 l'heure sidérale de la culmination à Paramatta, comptée du premier méridien, on aura cette égalité

$$a+d = T_2 - T_1,$$

de laquelle on tirera la différence de longitude.

Mais l'asc. dr. de ☾ à H_1 de temps vrai est généralement, d'après une formule d'interpolation connue (art. **241**),

$$Æ_1 = y + \alpha H_1 + \beta H_1^2 + \gamma H_1^3 \ldots,$$

y désignant l'asc. dr. à midi vrai le 30 mai 1822, c'est-à-dire 187°21′58″ selon la *Connaissance des Temps* de cette année-là; par conséquent, à l'heure H_2, cette asc. dr. est

$$Æ_2 = y + \alpha H_2 + \beta H_2^2 + \gamma H_2^3 \ldots,$$

et alors le mouvement en asc. dr. et en degrés ayant pour expression

$$Æ_2 - Æ_1 = \alpha(H_2 - H_1) + \beta(H_2^2 - H_1^2) + \gamma(H_2^3 - H_1^3) = 15^\circ a,$$

on en tire

$$H_2 - H_1 = \frac{54000''}{\alpha}a - \frac{\beta}{\alpha}(H_2^2 - H_1^2) - \frac{\gamma}{\alpha}(H_2^3 - H_1^3);$$

formule dans laquelle

$$\alpha = \frac{\delta Æ - \frac{1}{2}\delta^2 Æ + \frac{1}{3}\delta^3 Æ}{12} = \frac{5^\circ 27' 34'',8}{12} = 1637'',9,$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}\delta^2 Æ - \frac{1}{2}\delta^3 Æ}{12^2} = \frac{48''}{12^2} = 0,33333,$$

$$\gamma = \frac{1}{6}\frac{\delta^3 Æ}{12^3} = \frac{17'',16}{12^3} = 0,0099306.$$

Le calcul de la valeur numérique de $H_2 - H_1$ exige qu'on emploie celles très-rapprochées de H_1 et H_2 trouvées ci-dessus, savoir.

$$H_1 = 8^h 16^m = 8,26667 \quad \text{et} \quad H_2 = 22^h 45^m 42^s,66 = 22,76185.$$

Ainsi, en opérant par les logarithmes à 7 décimales, du moins pour le premier terme, on obtient très-exactement

$$H_2 - H_1 = 14^h,65682 - 0,09153 - 0,068067 = 14\ ,49722 \text{ (temps vrai)},$$

puisque, d'après ce qui précède, $a = 0^h,444563$. En définitive on a

en temps vrai $H_2 - H_1$	=	$14^h 29^m 50^s,00$
réduct. au temps sidéral		+ 2 . 27 ,75
$T_2 - T_1$	=	14.32.17 ,75
$-a$	=	− 26.40 ,43
différence de longitude d	=	14. 5. 37 ,32

Il est à remarquer que la différence $Æ_2 - Æ_1$ des ascensions droites des deux culminations, en y introduisant la dernière valeur de $H_2 - H_1$, se détermine exactement, quoiqu'il puisse y avoir une légère erreur dans l'évaluation des heures absolues correspondantes, parce que cette erreur n'a pas d'influence sensible sur la valeur des deux derniers termes.

Tout le calcul précédent aurait été plus simple si la *Connaissance des Temps* de 1822 eût donné, comme les Éphémérides actuelles, des nombres correspondant à des temps moyens.

Voilà en peu de mots en quoi consiste cette méthode attribuée à M. Nicolaï, célèbre astronome de Munich, et par laquelle on n'emploie que des différences entre les temps des passages et entre les ascensions droites contemporaines. On voit donc que l'avantage de cette méthode réside dans la non-influence des erreurs d'orientation des lunettes méridiennes et de la marche absolue des pendules. Mais l'amplitude d'un arc de parallèle ne pourrait être déterminée de cette manière qu'après un grand laps de temps et qu'au moyen de bonnes observations correspondantes.

2°. *Par les éclipses des satellites de Jupiter, et par les signaux de feu.*

346. C'est surtout de l'observation des fréquentes éclipses des satellites de Jupiter, que les astronomes déduisent avec exactitude la différence des longitudes de deux lieux terrestres; différence qui est celle même des heures que l'on compte sur les méridiens, à l'instant du phénomène. Deux circonstances sont propres à faire connaître cette différence des longitudes: l'une est l'immersion, c'est l'instant où le satellite entre dans l'ombre de Jupiter et disparaît; l'autre est l'émersion, c'est l'instant où ce satellite sort de l'ombre et reparaît. La prédiction de ces phénomènes, pour le méridien de Paris, se trouve dans le livre de la *Connaissance des Temps;* et comme les positions des satellites à l'égard de Jupiter, ainsi que leurs configurations, sont indiquées dans le même livre, il est inutile de donner ici des explications à cet égard.

Ces sortes d'observations se font avec une grande facilité, au moyen d'une lunette astronomique de 1 mètre environ, ou d'un télescope de 6 à 7 décimètres de foyer, ou même d'une lunette des passages portative. Il faut d'abord déterminer exactement la marche de la pendule, par rapport au temps moyen, par l'un des procédés des art. **293** et suiv.; ensuite, pour se préparer à l'observation de l'éclipse, savoir à fort peu près l'heure à laquelle elle aura lieu, et cela en ajoutant au temps moyen de ce phénomène, indiqué par les tables, la différence approchée des longitudes, si l'on est à l'orient de Paris; ou bien en la retranchant, si l'on est à l'occident.

Une seule observation ne pouvant être concluante, on en recueillera plusieurs, et alors la moyenne des résultats partiels sera la différence de longitude la plus probable.

Malgré la précision avec laquelle les tables des deux premiers satellites de Jupiter ont été calculées dans ces derniers temps, d'après la théorie de Laplace, il est encore plus sûr de conclure la différence des longitudes d'observations correspondantes faites sur ces deux satellites. Par exemple, à Cumana, capitale de la nouvelle Andalousie, M. de Humboldt observa, le 12 novembre 1800 au soir, l'immersion du 1er satellite à $4^h16^m56^s$ du chronomètre, ou à $11^h56^m18^s,7$ temps moyen, parce que le chronomètre retardait alors de $7^h39^m22^s,7$. Au même instant physique, M. Triesnecker observa cette immersion à Vienne, le 13 novembre au matin, à $5^h18^m20^s,7$ temps moyen.

Il suit de là que la différence des méridiens de Vienne et de Cumana, qui est à l'ouest.	=	$5^h22^m\ 2^s$	t. moy.
Mais la longit. de Vienne, comptée de Paris.	=	56.10	est.
Donc la LONGITUDE de Cumana comptée de même est de.		4.25.52	ouest.
Le 13 au matin, M. Méchain observa l'immersion à Paris, à.		$4^h22^m17^s,7$	t. moy.
M. de Humboldt, à Cumana, à.		11.56.18,7	
Donc, la LONGITUDE de Cumana, comptée de Paris.	=	4.25.59	ouest.
Enfin, le 13 novembre, M. Flaugergues l'observa à Viviers, à.		$4^h31^m35^s$	t. moy.
M. de Humboldt, à Cumana, à.		11.56.18,7	
Donc, la longitude de Cumana, comptée du méridien de Viviers, est.		4.35.16,3	ouest.
Mais la longitude de Viviers est.		9.24	est.
Donc, LONGITUDE de Cumana.	=	$4^h25^m52^s,3$	ouest.
Le terme moyen de ces trois résultats est. .		$4^h25^m54^s,4$	

Mais M. de Humboldt ayant fait beaucoup d'autres observations astronomiques dans le même but, il en est résulté, pour la longitude de Cumana, $4^h26^m = 66^\circ30'0''$ ouest de Paris.

Les observations correspondantes dont il s'agit ne sont parfaitement

comparables entre elles, que quand le phénomène céleste est annoncé au même instant physique par chaque observateur. Mais si l'un d'eux reçoit l'impression du phénomène quelques secondes plus tôt ou plus tard que l'autre, ce qui peut arriver si leurs lunettes ne présentent pas le même grossissement, et si leurs vues sont différentes, il importe d'avoir égard à cette circonstance dans la comparaison des observations; surtout si l'on a pour but d'obtenir par ce moyen l'amplitude astronomique d'un arc de parallèle terrestre, ou de déterminer la position respective de deux îles voisines dont on aurait levé la carte, et qu'on ne pourrait lier par des triangles.

347. Un phénomène terrestre instantané, qui serait vu de deux lieux peu distants l'un de l'autre, suppléerait avec beaucoup d'avantage aux phénomènes célestes. Or, si sur un lieu élevé et pendant une nuit sereine, on fait, à diverses reprises, enflammer en plein air une petite quantité de poudre à canon, et que deux observateurs munis chacun d'une pendule, et placés au lieu dont ils veulent connaître la différence de longitude, observent les apparitions de ces feux, apparitions qui seront subites pour de petites comme pour de grandes distances, à cause de la prodigieuse vitesse avec laquelle la lumière se propage, le milieu des différences entre tous les temps correspondants des deux pendules réglées de la même manière, sera la différence de longitude cherchée. Si l'arc dont on veut mesurer l'amplitude céleste était fort grand et qu'un seul poste de feux ne suffit pas, on établirait des observatoires intermédiaires qu'on lierait entre eux de la même manière astronomiquement, et alors la somme des amplitudes partielles serait la différence de longitude des stations extrêmes : cela est de toute évidence, et c'est ainsi qu'a eu lieu la mesure astronomique de l'arc du parallèle moyen, compris entre l'Océan et la mer Adriatique. (Voyez *Nouvelle Description géométrique de la France,* tome II, page 585.)

Mais on évite les erreurs dont pourraient être affectées les amplitudes partielles d'un grand arc de parallèle, en déterminant immédiatement la différence en longitude des points extrêmes de cet arc, par la transmission rapide, au moyen de chronomètres et de signaux de feu intermédiaires, des heures que l'on compte au même instant physique à ces mêmes extrémités.

Supposons, pour expliquer plus clairement cet autre procédé, quatre stations A, B, C, D, choisies de l'est à l'ouest; la première et la dernière représentant les observatoires dont on cherche la différence des longitudes, et où l'on connaît exactement le temps sidéral à l'aide de pendules réglées par les passages d'étoiles à la lunette méridienne, et les seconde et troisième stations intermédiaires occupées par des observateurs munis de bons chronomètres dont la marche diurne soit la même que celle des pendules, ou du moins soit bien connue. On notera l'heure, la minute, la seconde et fraction de seconde de l'apparition d'un feu observé au même instant physique des stations A, B; on notera également l'instant où l'on aura vu un second feu des stations B, C, allumé environ une minute après le premier; enfin on tiendra compte de l'heure où un troisième feu aura été aperçu des stations C, D, peu d'instants après le deuxième feu.

Par exemple, si, lors du premier feu, la pendule en A et le chronomètre en B eussent marqué respectivement a, b; que lors du deuxième feu les chronomètres en B et en C eussent marqué b', c; que lors du troisième feu les temps au chronomètre en C et à la pendule en D eussent été c', d; il est évident que l'heure du troisième feu comptée à la première station aurait été $a+b'-b+c'-c$, pendant qu'à la dernière station on aurait compté d heures; donc la différence T des méridiens serait

$$T=a+(b'-b)+(c'-c)-d.$$

Concluons de là que, quand bien même les observateurs intermédiaires verraient constamment les feux un instant plus tôt ou un instant plus tard, cela n'aurait pas d'influence sur la différence de longitude T; mais qu'il faudrait en toute rigueur, dans le cas d'un retard et d'une avance tout à la fois, que l'observateur de la station extrême de l'est passât à son tour à la station extrême de l'ouest, *et vice versa*. Au surplus, s'il n'y avait pas compensation parfaite à cet égard, on serait bien près de l'obtenir par la multiplicité des feux.

Il est inutile de faire observer que les temps $b'-b$, $c'-c$ doivent être corrigés proportionnellement de l'avance ou du retard de chaque chronomètre dans l'intervalle de 24^h, et que cette marche diurne est connue par la comparaison des instants des phénomènes d'un jour à ceux des phénomènes du jour suivant.

Considérons maintenant plusieurs séries de feux observés dans une même nuit, et adoptons une notation qui indique à la fois le numéro de chaque série et l'ordre dans lequel les feux se sont succédé. Pour cela, mettons dans le premier cas les indices (1), (2), (3),..., comme exposants supérieurs aux lettres a, b, c, d, et dans le second cas, les indices 1, 2, 3 comme exposants inférieurs aux mêmes lettres; enfin désignons par $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$,... les différences de longitudes données par la 1re, 2e, 3e série de feux : on aura évidemment, d'après la formule précédente,

$$T^{(1)} = a_1^{(1)} + [b_2^{(1)} - b_1^{(1)}] + [c_3^{(1)} - c_2^{(1)}] - d_3^{(1)},$$
$$T^{(2)} = a_1^{(2)} + [b_2^{(2)} - b_1^{(2)}] + [c_3^{(2)} - c_2^{(2)}] - d_3^{(2)},$$
$$T^{(3)} = a_1^{(3)} + [b_2^{(3)} - b_1^{(3)}] + [c_3^{(3)} - c_2^{(3)}] - d_3^{(3)},$$

et ainsi de suite. La moyenne de toutes ces valeurs de T sera l'amplitude astronomique cherchée.

Nous venons d'admettre le cas où le temps a si bien favorisé les observations sur toute la ligne des feux, qu'elles ont parfaitement réussi partout; cependant il pourrait arriver que quelques-unes eussent manqué ou fussent défectueuses. Si, par exemple, dans la 1re série de transmission, le second feu n'avait pas été aperçu du poste B, l'heure $b_2^{(1)}$ serait inconnue, et il faudrait alors recourir aux observations de la seconde série pour lier entre elles celles de la première série ; c'est-à-dire que l'on aurait

$$T^{(1)} = a_1^{(1)} + [b_2^{(2)} - b_1^{(1)}] + [c_3^{(1)} - c_2^{(2)}] - d_3^{(1)}.$$

De même, si le 3e feu de la seconde série n'avait point été observé de la station C, l'inconnue serait $c_3^{(2)}$; ce qui exigerait que l'on passât des observations de cette série à celles de la première ou de la troisième ; ainsi l'on aurait

$$T^{(2)} = a_1^{(2)} + [b_2^{(2)} - b_1^{(2)}] + [c_3^{(1)} - c_2^{(2)}] - d_3^{(1)},$$

ou bien

$$T^{(2)} = a_1^{(2)} + [b_2^{(2)} - b_1^{(2)}] + [c_3^{(3)} - c_2^{(2)}] - d_3^{(3)}.$$

Par exemple, les résultats des premières observations de ce genre

faites, le 25 août 1824, pour connaître la différence des méridiens de Paris et Strasbourg, sont renfermés dans le tableau suivant :

PARIS. A	STATIONS INTERMÉDIAIRES. B	C	STRASBOURG. D
I......... $19^h\ 6^m 20^s 3$	$8^h 49^m 48^s 2$	....	....
II........	8.54.10,8	$9^h 16^m\ 0^s 2$	....
III....... 19.25.30,7	9. 3.47,5	9.25.36,9	....
IV.......	....	9.30.37,8	$19^h 46^m 51^s 4$

On voit que les quatre séries de feux successifs en allant de Paris à Strasbourg, ou de l'ouest à l'est, ont été interrompues par le mauvais temps. Néanmoins la valeur de T s'obtiendra de deux manières, ou en passant de la première série à la seconde et de la seconde à la quatrième, ou en allant de la première série à la troisième, et de celle-ci à la quatrième. Dans le premier cas, on a

$$b_1^{(2)} = 8^h 54^m 10^s,8 \qquad c_3^{(4)} = 9^h 30^m 37^s,8$$
$$-b_1^{(1)} = 8.49.48,2 \qquad -c_2^{(2)} = 9.16.\ 0,2$$
$$4.22,6 \qquad 0.14.37,6$$
$$0.\ 4.22,6$$

Interv. de temps écoulé aux chronomèt. = 0.19. 0,2
Réduction en temps sidéral . . . . . . + 3,1
Intervalle écoulé en temps sidéral . . . = 0.19. 3,3

Temps de la pend. à Paris. $19^h\ 6^m 20^s,3$ à Strasbourg $19^h 46^m 51^s,4$
Réduction en temps sidér. −36,2 réd. en temps sid. −27,7
19. 5.44,1 19.46.23,7
Durée de transmission. . + 19. 3,3
Temps sidéral à Paris . . 19.24.47,4
Temps sid. à Strasbourg. 19.46.23,7
Différ. des méridiens T = 0.21.36,3
Moyenne de six résultats. 0.21.36,27

Quoique l'on puisse trouver diverses valeurs de T en liant ainsi les observations de différentes séries du même jour, il faut cependant ne procéder de la sorte que quand on y est contraint ; car il serait à craindre que de semblables combinaisons ne diminuassent le *poids* du résultat moyen au lieu de l'augmenter, surtout si les intervalles de temps entre les feux étaient de plus d'une demi-heure, parce qu'alors ce résultat serait moins indépendant des irrégularités de la marche des chronomètres.

Après avoir recueilli les résultats moyens de chaque jour, on détermine la moyenne de ces résultats par la règle énoncée à l'article **118**.

C'est ainsi qu'on a obtenu, en 1824, les longitudes de Brest et de Strasbourg, comptées de l'Observatoire royal de Paris (*). Cette méthode est, sans aucun doute, la meilleure à employer en pareille circonstance, parce qu'elle n'exige point la connaissance du temps absolu dans les stations intermédiaires, et qu'il suffit que la marche des chronomètres soit bien régulière dans l'intervalle de quinze à vingt minutes environ. Si même, au lieu de signaux de poudre, on faisait usage de réverbères construits comme pour les phares, d'après les idées ingénieuses de Fresnel, on pourrait, en les éclipsant un grand nombre de fois dans une même nuit, mesurer rapidement, et avec beaucoup de précision, l'amplitude totale d'un grand arc de parallèle : toutefois il est très-utile d'en connaître quelques amplitudes partielles, afin d'être à même de juger si cet arc est ou n'est pas circulaire. Dans tous les cas, la détermination du temps absolu aux stations extrêmes doit résulter, comme nous l'avons dit, d'observations très-précises. Ainsi il est important d'observer les mêmes étoiles fondamentales d'un même catalogue, afin que leurs positions moyennes, et par suite leurs positions apparentes, soient les mêmes de part et d'autre dans le calcul des angles horaires (art. **309**). De cette manière on sera à peu près certain que l'erreur commise sur une différence quelconque de longitude ne dépassera pas un quart de seconde de temps, ou 3″,75 de degré : erreur encore bien grande sans doute, comparativement à la précision des

---

(*) *Nouvelle Description géométrique de la France*, tome II, page 410.

mesures géodésiques. Quant à l'erreur probable d'observation qui affecte l'amplitude d'un arc de méridien, elle est ordinairement quatre fois moindre. Les mesures astronomiques, dans le sens des parallèles, n'ont donc pas en général la précision de celles qui sont prises dans le sens du nord au midi; les unes dépendent absolument du temps, les autres sont à peu près hors de l'influence de cet élément fugitif.

Les signaux de feu ont été essayés en France pour la première fois, par Cassini de Thury et Lacaille, en 1740, à l'occasion de la mesure de deux degrés de longitude aux environs de Marseille. Ils ont été plus tard renouvelés avec plus de succès en Allemagne, et c'est par leur secours que le baron de Zach, en 1810, est parvenu à déterminer avec beaucoup de précision la différence des méridiens de N.-D.-des-Anges et de l'Observatoire de Marseille. La moyenne entre 63 observations lui a donné cette différence de $29^s,95$ en temps, et il est remarquable que la plus grande discordance entre les résultats partiels est un peu moindre que 2^s (*Attraction des Montagnes*, tome I, page 135). Selon ses propres expériences, une demi-livre de poudre (244 grammes $\frac{75}{100}$) produit un feu visible à plus de 25 myriamètres. Il n'est pas même absolument nécessaire que le foyer de la flamme soit aperçu des stations dont on cherche la différence de longitude, car l'éclair qui se forme peut, en se réflétant dans le ciel, être visible à une très-grande distance. Mais il est important de noter l'heure, la minute, la seconde et fraction de seconde de l'instant de la première impression du feu, dont la durée est d'autant plus longue que l'on emploie une plus grande quantité de poudre.

3°. *Par les éclipses en général.*

348. Les éclipses de Soleil et les occultations d'étoiles par la Lune sont très-propres à donner avec précision les différences de longitude des lieux éloignés où elles ont été observées avec soin. Toutes les méthodes de calcul qui se rapportent à ces phénomènes sont fondées sur la détermination de la distance angulaire apparente des deux astres qui se superposent. Cette distance, considérée au même instant physique, n'est pas la même, à cause de la parallaxe, pour tous les points de la Terre où l'on voit l'éclipse. En effet, le commencement ou la fin

de ce phénomène se manifestant pour un point particulier de la Terre, lorsque les deux astres paraissent en contact, il arrive en général que leurs disques, relativement à tout autre point du globe, ne s'atteignent pas encore, ou que l'un anticipe sur l'autre. C'est ce qui fait que le problème des longitudes géographiques, par les éclipses de cette espèce, est un des plus compliqués de l'Astronomie pratique.

Lagrange a publié sur cette matière deux beaux Mémoires, l'un dans les volumes de l'Académie de Berlin, année 1766, l'autre dans les Éphémérides de cette ville pour l'année 1782. Ce second Mémoire a été reproduit dans la *Connaissance des Temps* pour 1817. La méthode que cet illustre géomètre a exposée dans celui-ci, étant considérée analytiquement, ne laisse rien à désirer; mais, sous le rapport de la pratique, elle n'a pu obtenir l'assentiment de tous les astronomes, à cause de l'extrême longueur des calculs qui en dépendent. Nous nous proposons d'exposer ici cette méthode, mais nous tâcherons de la simplifier de manière à la rendre susceptible d'offrir les mêmes avantages que celles dont les astronomes font habituellement usage.

Supposons, comme à l'art. **258**, que les points de l'espace soient rapportés à trois axes rectangles, et que le plan des xy soit celui de l'écliptique. Adoptons en outre une notation analogue à celle de cet article, c'est-à-dire désignons par

l, λ la longitude et la latitude vraies de la Lune ou d'un astre A;
L, Λ la longitude et la latitude vraies de l'astre occulté B;
g, h l'ascension droite et la déclinaison du zénith;
n, q la longitude et la latitude du zénith;
ψ, Ψ la parallaxe horizontale de la Lune et celle de l'astre occulté;
r la distance du centre de la Terre au centre de la Lune;
r' la distance de l'observateur au centre de la Lune;
ρ le rayon terrestre à la latitude H;
l'', λ'' la longitude et la latitude vraies du point C de contact d'un plan tangent à la sphère céleste;
ω l'obliquité apparente de l'écliptique;

enfin, appelons Σ' la distance apparente des centres des deux astres;

et supposons que les trois points A, B, C soient dans l'hémisphère boréal.

Choisissons maintenant un nouveau système d'axes rectangulaires, ayant toujours pour origine le centre O de la Terre (*fig.* 27); mais supposons l'axe des x'' dirigé vers un point C arbitraire de la sphère céleste, dont la longitude et la latitude soient l'', λ''; prenons pour axe des y'' la droite OD dans le plan même de l'écliptique, et pour axe des z'' la droite OE perpendiculaire au plan des $x''\,y''$.

Cela posé, si l'on mène par l'origine O des coordonnées une droite égale et parallèle au rayon vecteur apparent r' de la Lune, les équations de ce rayon vecteur seront en général, par rapport aux nouvelles coordonnées,

$$y_{''}=p'x_{''},\quad z_{''}=q'x_{''}.$$

Celles du rayon vecteur apparent R′ de l'astre occulté seront de même

$$y_{''}=P'x_{''},\quad z_{''}=Q'x_{''};$$

ainsi la tangente trigonométrique de l'angle Σ' de ces deux rayons, ou de la distance angulaire apparente des centres des astres, sera, comme l'on sait,

$$(\mathrm{M})\qquad \operatorname{tang}\Sigma'=\frac{\sqrt{(P'-p')^2+(Q'-q')^2+(P'q'-Qp')^2}}{1+P'p'+Q'q'};$$

expression dans laquelle il ne s'agirait plus que de remplacer P′, Q′, p', q' par leurs valeurs, si elle n'était d'ailleurs susceptible d'être considérablement simplifiée. Mais voyons auparavant quelles sont ces valeurs.

D'abord on a

$$p'=\frac{y_{''}}{x_{''}},\qquad q'=\frac{z_{''}}{x_{''}};$$

et si l'on désigne par $(r,\,x'')$, $(r,\,y'')$, $(r,\,z'')$ les angles que le rayon vecteur r fait avec les axes des x'', y'', z''; par a, b, c les cosinus de ces mêmes angles; on aura visiblement, à cause des triangles sphé-

riques ZAC, ZAD, ZAE, ces trois relations (art. 54)

$$(1)\begin{cases} a = \cos(r, x'') = \cos(l - l'')\cos\lambda\cos\lambda'' + \sin\lambda\sin\lambda'', \\ b = \cos(r, y'') = \sin(l - l'')\cos\lambda, \\ c = \cos(r, z'') = \sin\lambda\cos\lambda'' - \cos(l - l'')\cos\lambda\sin\lambda''. \end{cases}$$

Par la même raison, on aura ces trois autres relations :

$$(2)\begin{cases} \alpha = \cos(\rho, x'') = \cos(n - l'')\cos q\cos\lambda'' + \sin q\sin\lambda'', \\ \beta = \cos(\rho, y'') = \sin(n - l'')\cos q, \\ \gamma = \cos(\rho, z'') = \sin q\cos\lambda'' - \cos(n - l'')\cos q\sin\lambda''. \end{cases}$$

Or, en projetant orthogonalement les rayons r, r' et ρ sur les axes des x'', y'', z'', il est clair que

$$x_{''} = ar - \alpha\rho, \quad y_{''} = br - \beta\rho, \quad z_{''} = cr - \gamma\rho;$$

de là et de ce qui précède

$$p' = \frac{y_{''}}{x_{''}} = \frac{br - \beta\rho}{ar - \alpha\rho} = \frac{b - \beta\psi}{a - \alpha\psi}, \quad q' = \frac{z_{''}}{x_{''}} = \frac{cr - \gamma\rho}{ar - \alpha\rho} = \frac{c - \gamma\psi}{a - \alpha\psi}.$$

Pareillement, si l'on désigne par A, B, C, ce que deviennent les relations (1) lorsque l'on change l en L et λ en Λ, on aura, relativement à l'astre occulté,

$$P' = \frac{BR - \beta\rho}{AR - \alpha\rho} = \frac{B - \beta\Psi}{A - \alpha\Psi}, \quad Q' = \frac{CR - \gamma\rho}{AR - \alpha\rho} = \frac{C - \gamma\Psi}{A - \alpha\Psi},$$

Ψ étant le sinus de la plus grande parallaxe de hauteur de cet astre.

On remarquera que les deux systèmes d'équations (1), (2) satisfont aux relations suivantes :

$$(3)\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = \cos(r, \rho) = \cos(n - l'')\cos\lambda\cos q + \sin\lambda\sin q; \end{cases}$$

et que la méthode analytique actuelle signifie, en Géométrie, que les lieux apparents des astres sont projetés perspectivement du centre de la sphère céleste, sur un plan qui la touche au point C.

On peut être curieux de trouver l'angle V′ que le plan du grand cercle, passant par les projections des lieux apparents sur le plan tangent, fait avec le cercle de latitude $x''z''$ du point de contact C; or cela est facile, car soit en général

$$Mx_{\prime\prime} + Ny_{\prime\prime} + Pz_{\prime\prime} = 0$$

l'équation du plan de ce grand cercle; les coordonnées des deux projections dont il s'agit étant visiblement, en prenant le rayon de la sphère céleste pour unité,

$$1,\ p',\ q', \qquad 1,\ P',\ Q',$$

on aura

$$M = q'P' - p'Q', \quad N = Q' - q', \quad P = p' - P';$$

et comme en général

$$\cos V' = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}},$$

il viendra

$$\text{séc } V' = \frac{\sqrt{(q'P' - p'Q')^2 + (Q' - q')^2 + (P' - p')^2}}{Q' - q'}.$$

Supposons maintenant que les projections des deux lieux apparents et le point C′ soient en ligne droite; on aura alors $q'P' = p'Q'$, et de l'expression précédente on tirera

$$\text{tang } V' = \frac{P' - p'}{Q' - q'}.$$

Lagrange, en donnant cette valeur particulière de tang V′ pour le cas général, a évidemment commis une inadvertance.

349. Toutes les formules de l'art. **347** sont de la plus grande généralité; mais il en est quelques-unes qui se simplifient lorsque l'astre A, par exemple, est dans la direction de l'axe des x'' ou en C. En effet, on a dans ce cas $l = l''$, $\lambda = \lambda''$, et par suite $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; enfin,

$$p' = \frac{-\beta\psi}{1 - \alpha\psi}, \quad q' = \frac{-\gamma\psi}{1 - \alpha\psi}:$$

ces deux dernières valeurs sont donc l'effet de la parallaxe de l'astre A placé en C.

Supposons au contraire que l'axe des x'' passe par le centre du Soleil; on aura

$$l'' = \mathrm{L},\quad \lambda'' = \Lambda = 0,\quad \text{et par conséquent } \mathrm{A} = 1,\quad \mathrm{B} = 0,\quad \mathrm{C} = 0.$$

Quant aux équations (1), (2), elles deviennent

$$(1')\ \begin{cases} a = \cos(l - \mathrm{L})\cos\lambda, \\ b = \sin(l - \mathrm{L})\cos\lambda, \\ c = \sin\lambda. \end{cases} \qquad (2')\ \begin{cases} \alpha = \cos(n - \mathrm{L})\cos q, \\ \beta = \sin(n - \mathrm{L})\cos q, \\ \gamma = \sin q. \end{cases}$$

Malgré ces simplifications, la formule (M) serait encore beaucoup trop compliquée pour la pratique ; mais il est aisé de voir que, relativement aux éclipses de Soleil, cette formule peut être réduite à celle-ci :

$$(\mathrm{M}') \qquad \tang \Sigma' = \sqrt{(p' - \mathrm{P}')^2 + (q' - \mathrm{Q}')^2},$$

sans qu'il en résulte une erreur d'un dixième de seconde. Soient, pour le prouver,

$$\sqrt{(p' - \mathrm{P}')^2 + (q' - \mathrm{Q}')^2} = \tang \sigma', \quad \frac{\mathrm{Q}'(p'-\mathrm{P}') - \mathrm{P}'(q'-\mathrm{Q}')}{\mathrm{P}'(p'-\mathrm{P}') + \mathrm{Q}'(q'-\mathrm{Q}')} = \tang s,$$

on aura, pour le Soleil,

$$\sqrt{\mathrm{P}'^2 + \mathrm{Q}'^2} = \frac{\Psi(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha\Psi} = f;$$

et par suite

$$\tang \Sigma' = \frac{\tang\sigma'\,(1+f^2\sin^2 s)^{\frac{1}{2}}}{1+f\cos s\tang\sigma' + f^2}.$$

Lagrange cherche, par un procédé très-élégant, la différence $\Sigma' - \sigma'$ en série convergente, où la valeur du premier terme, dans les cas extrêmes, est moindre que $\frac{1}{10}$ de seconde. Pour parvenir à cette conclusion par une voie plus élémentaire et plus courte, prenons le logarithme de chaque membre de l'équation précédente, et développons :

il viendra une série de la forme

$$\log \text{tang}\, \Sigma' = \log \text{tang}\, \sigma' - \mu f \cos s \,\text{tang}\, \sigma' + \mu f^2 \text{R} - \mu f^3 s \ldots,$$

dans laquelle $\mu = 0{,}434294$ est le module des tables. Or, le terme $\mu f \cos s \,\text{tang}\, \sigma'$, qui est le plus considérable de la série, acquiert la plus grande valeur lorsque $\cos s = 1$: soit donc $\sigma' = 5^\circ$; dans ce cas, la quantité f ne pouvant surpasser tang $8'',5$, puisque pour le Soleil, $\Pi = 8'',5$ à très-peu près, on aura

$$\mu f \,\text{tang}\, \sigma' = 0{,}0000016\,;$$

c'est-à-dire que log tang σ' devrait être diminué de 0,0000016. Mais, par hypothèse, tang σ' = tang 5°, d'où log tang $\sigma' = 8{,}9419518$; ainsi log tang Σ' ne différant de log tang σ' que de 0,0000016, il s'ensuit que $\Sigma' = \sigma' - 0'',06$. Il est donc prouvé que, dans les éclipses de Soleil, et à plus forte raison dans les passages de Vénus et de Mercure sur cet astre, l'on peut toujours faire tang Σ' = tang σ', sans craindre de jamais commettre une erreur de $\frac{1}{10}$ de seconde de degré.

Enfin, le même géomètre démontre que l'expression (M'), quoique déjà fort réduite, peut cependant l'être davantage (voyez la *Connaissance des Temps* pour 1817, page 256). En effet, d'après ce qui précède, on a, par rapport au Soleil,

$$\begin{aligned} p' - \text{P}' &= \frac{b - \beta\psi}{a - \alpha\psi} + \frac{\beta\Psi}{1 - \alpha\Psi} \\ &= \frac{b - \beta\psi + \beta\Psi(a - \alpha\psi)(1 - \alpha\Psi)^{-1}}{a - \alpha\psi} = \frac{b - \beta(\psi - a\Psi)}{a - \alpha\psi}, \end{aligned}$$

en négligeant les termes du second ordre comme étant très-petits. Pareillement

$$q' - \text{Q}' = \frac{c - \gamma\psi}{a - \alpha\psi} + \frac{\gamma\Psi}{1 - \alpha\Psi} = \frac{c - \gamma(\psi - a\Psi)}{a - \alpha\psi}.$$

Mais a différant toujours très-peu de l'unité, on peut supposer dans le terme $a\Psi$, que $a = 1$; ainsi l'on a simplement

$$p' - \text{P}' = \frac{b - \beta(\psi - \Psi)}{a - \alpha\psi}, \qquad q' - \text{Q}' = \frac{c - \gamma(\psi - \Psi)}{a - \alpha\psi};$$

partant, l'équation (M') devient

$$(\mathrm{N}) \qquad \operatorname{tang} \Sigma' = \frac{\sqrt{[b-\beta(\psi-\Psi)]^2+[c-\gamma(\psi-\Psi)]^2}}{a-\alpha\psi},$$

et donne la distance apparente des astres avec une précision toujours très-suffisante, soit dans les éclipses de Soleil ou les passages des planètes sur son disque, soit dans les occultations d'étoiles par la Lune. Dans ce dernier cas, l'on doit diriger l'axe des x'' par l'étoile ou par le centre de la planète occultée, et alors on a $l'' = \mathrm{L}$, $\lambda'' = \Lambda$. Faisant donc $l - \mathrm{L} = t$, $\lambda - \Lambda = u$, les relations (1), (2) prendront la forme suivante, comme il est facile de s'en assurer,

$$(1'') \qquad \begin{cases} a = \cos u - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} t \cos\Lambda \cos\lambda, \\ b = \sin t \cos\lambda, \\ c = \sin u + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} t \sin\Lambda \cos\lambda, \end{cases}$$

$$(2'') \qquad \begin{cases} \alpha = \cos(n-\mathrm{L}) \cos\Lambda \cos q + \sin\Lambda \sin q, \\ \beta = \sin(n-\mathrm{L}) \cos q, \\ \gamma = \cos\Lambda \sin q - \cos(n-\mathrm{L}) \sin\Lambda \cos q, \end{cases}$$

et l'on aura en outre $\Pi = 0$, s'il s'agit des étoiles.

350. Au commencement et à la fin d'une éclipse, les disques des astres paraissent en contact, et alors la distance apparente des centres est égale à la somme des demi-diamètres apparents. Ces diamètres apparents variant en général à différentes hauteurs des astres sur l'horizon, la somme dont il s'agit ne peut être rigoureusement la même que celle qui est donnée par les Tables astronomiques (art. **244**); mais la variation des diamètres apparents n'étant réellement sensible que pour la Lune, qui est l'astre le plus près de la Terre, on se borne à évaluer l'*augmentation de son demi-diamètre*. Or, si d est le demi-diamètre horizontal de la Lune, donné par les tables, et d' son demi-diamètre apparent; si de plus r et r' sont respectivement les distances du centre de cet astre au centre de la Terre et au lieu de l'observateur, on aura évidemment

$$\sin d' = \frac{r}{r'} \sin d.$$

Reste à trouver l'expression du rapport $\frac{r}{r'}$. D'abord si l'on élève au carré chacune des équations (ε) de l'article 258, et qu'on fasse une somme des résultats, on aura, en rapportant l'astre à l'écliptique,

$$r'^2 = r^2 - 2\rho r\,[\cos(n-l)\cos\lambda\cos q + \sin\lambda\sin q] + \rho^2\,;$$

c'est ce que donne d'ailleurs immédiatement le triangle rectiligne $rr'\rho$.

Si ensuite on néglige, dans la formule (N), les très-petits termes $\beta\Psi$ et $\gamma\Psi$, ce qui est permis dans cette circonstance, et qu'on ait égard aux relations citées, il viendra, après avoir développé,

$$\begin{aligned}(a-\alpha\psi)\,\text{tang}\,\Sigma' &= \sqrt{(b-\beta\psi)^2+(c-\gamma\psi)^2}\\ &= \sqrt{(1-a^2)+\psi^2(1-\alpha^2)-2\psi(b\beta+c\gamma)},\end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$(a-\alpha\psi)^2\,\text{tang}^2\Sigma' + (a-\alpha\psi)^2 = 1 - 2\psi(a\alpha+b\beta+c\gamma)+\psi^2;$$

ainsi,

$$\frac{r'}{r} = (a-\alpha\psi)\,\text{séc}\,\Sigma' = \frac{a-\alpha\psi}{\cos\Sigma'}\,;$$

enfin

$$\sin d' = \frac{\sin d\cos\Sigma'}{a-\alpha\psi}.$$

Maintenant, soit D le demi-diamètre horizontal du Soleil, donné par les Tables astronomiques; on aura, au commencement comme à la fin de l'éclipse,

$$\Sigma' = d' + \text{D}, \qquad \text{ou} \qquad \sin d' = \sin\Sigma'\cos\text{D} - \cos\Sigma'\sin\text{D};$$

substituant cette valeur de sin d' dans la précédente, on obtiendra définitivement

$$(\text{P}) \qquad \text{tang}\,\Sigma' = \text{tang}\,\text{D} + \frac{\sin d}{(a-\alpha\psi)\cos\text{D}}.$$

Cette formule et celle (N) donnent le moyen de calculer toutes les circonstances d'une éclipse; mais afin de pouvoir y appliquer aisément

les logarithmes, il est nécessaire de leur faire subir préalablement quelques transformations. C'est pour avoir voulu les traiter directement, que Lagrange a rendu sa solution numérique extrêmement pénible, et même rebutante quand on veut l'appliquer aux occultations des étoiles.

Application aux éclipses de Soleil.

351. Soit $l - \mathrm{L} = t$; les relations (1'), (2') deviendront

$$(1_{,})\ \begin{cases} a = \cos t \cos\lambda, \\ b = \sin t \cos\lambda, \\ c = \sin\lambda; \end{cases} \qquad (2_{,})\ \begin{cases} \alpha = \cos(n - \mathrm{L}) \cos q, \\ \beta = \sin(n - \mathrm{L}) \cos q, \\ \gamma = \sin q; \end{cases}$$

et la formule (N) pourra, sans qu'il en résulte aucune erreur sensible, être écrite ainsi :

$$(\mathrm{N})\quad \operatorname{tang} \Sigma' = \frac{\sqrt{[\sin t \cos\lambda - \sin\beta\,(\psi - \Psi)]^2 + [\sin\lambda - \sin\gamma\,(\psi - \Psi)]^2}}{\cos t \cos\lambda - \sin\alpha\psi}.$$

Soient, pour abréger,

$$(4)\ \begin{cases} \sin t \cos\lambda = \sin\tau, \\ \beta\,(\psi - \Psi) = e, \\ \gamma\,(\psi - \Psi) = f, \\ \cos t \cos\lambda - \sin\alpha\psi = k, \end{cases}$$

on aura, vu la petitesse des angles,

$$(\mathrm{N}')\ \begin{cases} \operatorname{tang} \Sigma' = \dfrac{\sqrt{(\sin\tau - \sin e)^2 + (\sin\lambda - \sin f)^2}}{k} \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{\left[\cos\left(\dfrac{\tau + e}{2}\right) \sin(\tau - e)\right]^2 + \left[\cos\left(\dfrac{\lambda + f}{2}\right) \sin(\lambda - f)\right]^2}}{k}. \end{cases}$$

Faisant donc

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda + f)\sin(\lambda - f)}{\cos\frac{1}{2}(\tau + e)\sin(\tau - e)},$$

on aura définitivement

$$(6)\qquad \operatorname{tang}\Sigma' = \frac{\cos\frac{1}{2}(\tau + e)\sin(\tau - e)}{k\cos\theta};$$

et d'après cette notation, la formule (P) se changera en celle-ci :

$$(7) \qquad \operatorname{tang} \sigma' = \operatorname{tang} D \left(1 + \frac{\sin d}{k \sin D}\right).$$

Ainsi, à l'aide des équations (1), (2), (3) et (4), on obtiendra la distance apparente Σ' des centres des deux astres, aux approches ou pendant la durée de l'éclipse; et par le moyen de l'équation (7), on aura cette même distance, lorsque ces astres se touchent et que le contact est extérieur.

352. Lagrange a donné des Tables des valeurs de α, β, γ, rendues fonctions de l'ascension droite et de la déclinaison du zénith; mais leur emploi, vu le grand nombre d'arguments à former et de petites parties proportionnelles à calculer, ne nous paraît nullement préférable à celui de ces valeurs mêmes qui ne renferment, comme ici, que la longitude et la latitude du zénith, ou, ce qui est de même, la longitude du nonagésime et le complément de sa hauteur; c'est ce qu'un exemple numérique va mettre hors de doute.

Nous prendrons pour éléments du calcul ceux que Delambre a employés à la p. 433 du tome II de son *Astronomie ;* ainsi nous ferons,

Ascension droite du zénith. . . .		=	328°38′ 3″,0
ou	g	=−	31.21.57,0
Déclinaison du zénith	h	=	48.39.50,0
Longitude du Soleil	L	=	12. 6.36,7
Longitude de la Lune	l	=	11.29.48,7
Latitude boréale *idem*	λ	=	0.35 53,0
$\frac{1}{2}$ diamètre horizontal du ☉ . . .	D	=	15.57,0
$\frac{1}{2}$ diamètre horizontal de ☾ . . .	d	=	14.47,2
Parallaxe horizontale du ☉ . . .	Ψ	=	8″,5
Parallaxe horizontale de ☾ . . .	ψ	=	54.10,3
	$\psi - \Psi$	=	54. 1,8

Cela posé, on trouvera n et q, c'est-à-dire la longitude et la latitude du zénith, par les formules

$$(m) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} n = \cos \omega \operatorname{tang} g + \dfrac{\sin \omega \operatorname{tang} h}{\cos g}, \quad \cos q = \dfrac{\cos g \cos h}{\cos n}, \\ \text{ou } \sin q = \sin h \cos \omega - \cos h \sin \omega \sin g, \end{array} \right.$$

démontrées à l'art. **260**.

TYPE DU CALCUL.

Formules (m) *déterminant le nonagésime.*

$\cos\omega = 9{,}96249$	$\sin\omega \tang h = 9{,}65592$
$\tang g = 9{,}78503\,-$	$c.\cos g = 0{,}06861$
$9{,}74752 - 0{,}55914$	$9{,}72453 + 0{,}53031$
$+\,0{,}53031$	

$\tang n = -\ 1°39'\,5'',0 = -\ 0{,}02883$, $\log 8{,}45984$

$L = 12.\ 6.36,7$	$\cos h = 9{,}81986$
$n - L = -\ 13.45.41,7$	$\cos g = 9{,}93139$
	$c.\cos n = 0{,}00018$
	$\cos q = 9{,}75143$
	$\sin q = 9{,}91679$

Formules (2,) et (4) *évaluant l'effet des parallaxes.*

	$\sin(n - L) = 9{,}37635\,-$	$\cos(n - L) = 9{,}98735$
$\sin q = 9{,}91679$	$\cos q = 9{,}75143$	$\cos q = 9{,}75143$
$\log(\psi - \Psi) = 3{,}51079$	$\log\beta = 9{,}12778\,-$	$\log\alpha = 9{,}73878$
$\log f = 3{,}42758$	$\log(\psi - \Psi) = 3{,}51079$	$\log\psi = 3{,}51191$
$f = 2676'',6$	$\log e = 2{,}63857\,-$	$\log\alpha\psi = 3{,}25069$
$= 44'36'',6$	$e = -435'',08$	$\alpha\psi = 1781'',1$
	$= -7'15'',08$	$= 29'41'',1$

$\cos\lambda = 9{,}99998$	$\log\alpha\psi = 3{,}25069\,-$	
$\cos t = 9{,}99998$	$\sin 1'' = 4{,}68557\,+$	$0{,}99990$
$9{,}99996 = 0{,}99990$	$7{,}93626\,-$	$0{,}00863$
		$0{,}991271.\ 9{,}99619 = \log k$

$\lambda = 0°35'53'',00$	$l = 11°29'48'',8$	$\log t = 3{,}34398\,-$
$-f = -\ 44.36,54$	$L = 12.\ 6.36,7$	$\cos\lambda = 9{,}99998$
$\lambda + f = -\ 8.43,54$	$t = l - L = -\ 0.36.47,9$	$\log\tau = 3{,}34396\,-$
$= -\ 523'',54$	$= -\ 2207'',9$	$\tau = -\ 2207'',8$
$\lambda + f = 0°80'29'',6$		$= -\ 36'47'',8$
$\dfrac{\lambda + f}{2} = 0.40.14,8$		$-e = +\ 7.15,1$
		$\tau - e = -\ 29.32,7$
		$= -\ 1772'',7$
		$\tau + e = -\ 44'2'',9$
		$\dfrac{\tau + e}{2} = -\ 22'1'',4.$

Détermination de la distance apparente.

Formule (5).	Formule (6).
$\cos\frac{1}{2}(\lambda+f) = 9,99997$	$\cos\frac{1}{2}(\tau+e) = 9,99999$
$\log(\lambda-f) = 2,71895 -$	$\log(\tau-e) = 3,24864$
$c.\cos\frac{1}{2}(\tau+e) = 0,00001$	$c.\log k = 0,00381$
$c.\log(\tau-e) = 6,75136 -$	$c.\cos\theta = 0,01816$
$\tan\theta = 9,47029 +$	$\log\Sigma' = 3,27060 = 1864'',6$
$\cos\theta = 9,98184 -$	$\Sigma' = 31'4'',6$
	suivant Delambre... $31.4,5$
	différence... $0,1$

Formule (7), donnant la somme des demi-diamètres apparents.

$$\log d = 2,94802$$
$$c.\log D = 7,01909$$
$$c.\log k = 0,00381$$
$$\log\frac{d}{kD} = 9,97072 = 0,93525$$
$$+1$$
$$1,93525 = \zeta.$$
$$\log\zeta = 0,28673$$
$$\log D = 2,98091$$
$$\log\sigma' = 3,26764 = 1852'',0$$

$\sigma' = 30'52'',0$	$\Sigma' = 31'\ 4'',6$
selon Delambre..... $30.51,9$	$\sigma' = 30.52,0$
différence..... $0,1$	distance des bords $= 12,6$

Le calcul précédent, qui est complet, n'a donc rien de pénible, puisqu'on peut n'y employer que des logarithmes à 5 décimales; et il serait peut-être un peu moins long que la plupart de ceux dont les astronomes font usage, si l'on remplaçait par l'unité tous les cosinus qui en diffèrent très-peu; ce qui n'altérerait pas sensiblement les résultats.

353. Pour donner une idée de la méthode trigonométrique par laquelle on obtiendrait les résultats précédents, nous ferons remarquer que le triangle sphérique, qui a pour sommets le pôle et les lieux

apparents des deux astres, fournit cette relation,

$$\cos \Sigma' = \sin l' \sin L' + \cos l' \cos L' \cos(\lambda' - \Lambda'),$$

en désignant par un accent les coordonnées apparentes (art. **258**); et à cause de $\cos m = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} m$, on a

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \Sigma' = \sin^2 \tfrac{1}{2}(l' - L') + \cos l' \cos L' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\lambda' - \Lambda');$$

formule qui a lieu quelle que soit la grandeur de Σ', et qu'on pourrait transformer ainsi qu'on l'a enseigné à l'art. **77**.

Mais comme, dans le cas des éclipses de Soleil ou des passages des planètes sur cet astre, la distance apparente Σ' est très-petite, et qu'en outre la latitude du Soleil est nulle, on conçoit qu'en pareille circonstance la formule dont il s'agit doit être plus facile à évaluer numériquement.

En effet, on a sans erreur sensible,

$$\Sigma' = \sqrt{(\lambda' - \Lambda')^2 + (l' - L')^2 \cos^2 \Lambda'}$$

ou

$$\Sigma' = \sqrt{t'^2 \cos^2 \Lambda' + u'^2}, \quad \text{et} \quad t' = \frac{\sqrt{(\Sigma' + u')(\Sigma' - u')}}{\cos \Lambda'},$$

en faisant

$$l' - L' = t' \quad \text{et} \quad \lambda' - \Lambda' = u';$$

ou encore

$$\Sigma' = \frac{t' \cos \Lambda'}{\cos \theta},$$

lorsque

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{u'}{t' \cos \Lambda'}.$$

Il y a plus : pour ne pas calculer les parallaxes de longitude et de latitude des deux astres, qui serviraient à faire connaître les lieux apparents de chacun d'eux (art. **264**), et par suite tous les éléments de la formule précédente, les astronomes supposent que l'astre occulté est sans parallaxe de hauteur; mais dans le calcul du lieu apparent de la

Lune, qui se trouve fonction de sa parallaxe horizontale (art. **264**), ils emploient par compensation la parallaxe *relative* $\psi - \Psi$.

Il reste à déterminer le demi-diamètre apparent de la Lune, autrement que par la méthode de l'art. **350**. D'abord, en désignant par d' ce demi-diamètre et conservant la notation de l'art. **258**, on a

$$\sin d' = \frac{r}{r'} \sin d,$$

et par le même article, la troisième relation (ε) donne, en changeant les ascensions droites et les déclinaisons, respectivement en longitudes et en latitudes,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda - \sin \Pi \sin q} = \frac{\cos \lambda'}{\cos \lambda'} \cdot \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda - \sin \Pi \sin q};$$

mais la deuxième relation (ξ) est

$$\operatorname{tang} \lambda' = \frac{\cos l' (\sin \lambda - \sin \Pi \sin q)}{\cos l \cos \lambda - \sin \Pi \cos n \cos q},$$

donc

$$\sin d' = \frac{\sin d \cos l' \cos \lambda'}{\cos l \cos \lambda - \sin \Pi \cos n \cos q};$$

expression qui n'est autre que celle (ζ') trouvée à l'art. **258** et adaptée au plan de l'écliptique.

Si l'on connaissait la distance zénithale apparente Z et la parallaxe de hauteur ϖ, on aurait visiblement

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin Z}{\sin (Z - \varpi)}, \quad \text{et enfin } d' = \frac{d \sin Z}{\sin (Z - \varpi)};$$

mais cette distance étant inconnue, on l'élimine de ce résultat par le procédé suivant :

Désignons par A l'azimut de la Lune au moment de l'observation, par Δ sa distance au pôle de l'écliptique, et par P l'angle que le cercle de latitude de cet astre fait avec le méridien du lieu; on aura, en désignant d'ailleurs par $\delta\Delta$ la parallaxe de distance au pôle de l'écliptique, par δP la parallaxe de longitude,

$$\frac{\sin A}{\sin \Delta} = \frac{\sin P}{\sin (Z - \varpi)}, \quad \frac{\sin A}{\sin (\Delta + \delta\Delta)} = \frac{\sin (P + \delta P)}{\sin Z}.$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{\sin(\Delta + \delta\Delta)}{\sin \Delta} = \frac{\sin Z}{\sin(Z - \varpi)} \cdot \frac{\sin P}{\sin(P + \delta P)};$$

et par conséquent

$$\frac{\sin Z}{\sin(Z - \varpi)} = \frac{\sin(\Delta + \delta\Delta)}{\sin \Delta} \cdot \frac{\sin(P + \delta P)}{\sin P}.$$

Mais $d' = \frac{d \sin Z}{\sin(Z - \varpi)}$; donc

$$d' = d \frac{\sin(\Delta + \delta\Delta)}{\sin \Delta} \cdot \frac{\sin(l - n + \delta P)}{\sin(l - n)};$$

n étant la longitude du zénith et l la longitude vraie de la Lune.

Enfin si la distance zénithale Z du centre de là Lune était connue, l'augmentation de son demi-diamètre serait, en fonction de cette distance,

$$d' - d = d \frac{[\sin Z - \sin(Z - \varpi)]}{\sin(Z - \varpi)} = \frac{2d \sin \frac{1}{2}\varpi \cos(Z - \frac{1}{2}\varpi)}{\sin(Z - \varpi)};$$

et à cause de $\sin \varpi = \sin \Pi \sin Z$ (art. **255**), on aurait, à très-peu pres, en réduisant en série,

$$d' - d = d \sin \Pi \,[\cos Z + \sin \Pi \cos^2 Z + \tfrac{1}{2} \sin \Pi \sin^2 Z].$$

De plus, par les mesures astronomiques, on a eu $\frac{d}{\Pi} = 0,2725$ ou $\Pi = 3,6697d$. Tel est le rapport constant qui existe entre la parallaxe horizontale équatoriale et le demi-diamètre horizontal, deux quantités qui sont données dans la *Connaissance des Temps* pour midi et minuit, temps moyen. Entre toutes les valeurs de Π, la moyenne est de $57'0'',9$ et se nomme *constante de la parallaxe*. (Voyez l'*Astronomie pratique* de M. Francœur, 2e édit., n° 272.)

354. La formule (N) est propre à faire connaître les erreurs des Tables de la Lune, lorsque l'on a recueilli une observation complète dans un lieu connu. En effet, si l'on y a observé l'heure de l'immersion et celle de l'émersion, on calculera par les tables la longitude l et la latitude λ de la Lune, ainsi que les autres éléments de la formule (N),

pour l'immersion, par exemple; puis on déterminera par le procédé précédent les valeurs de Σ' et σ'; et si elles diffèrent l'une de l'autre d'une quantité $\delta\Sigma'$, de manière que $\sigma' = \Sigma' + \delta\Sigma'$, cette quantité $\delta\Sigma'$, qui sera évidemment positive ou négative, selon que σ' sera $>$ ou $< \Sigma'$, exprimera l'erreur provenant des tables. Supposons donc que les erreurs correspondantes en longitude et en latitude soient δt et $\delta\lambda$; on obtiendra une équation de condition entre ces trois erreurs, en différentiant l'équation (N'). Mais remarquons que les petits angles e, f, ψ peuvent, dans cette opération, être regardés comme constants, parce qu'en effet ils ne varient pas sensiblement, quand t et λ ne reçoivent, comme dans le cas dont il s'agit, que de très-petits changements, et qu'il suffit de retenir les termes du second ordre, ce qui revient à supposer le dénominateur k invariable. D'après cette remarque, on aura, eu égard d'ailleurs à la petitesse des angles,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Sigma'.\operatorname{tang}\Sigma' &= \delta\lambda\cos\lambda\cos\left(\frac{\lambda+f}{2}\right)\sin(\lambda-f)\frac{\cos^2\Sigma'}{k^2}\\ &\quad+\delta t\cos\lambda\cos t\cos\left(\frac{\tau+e}{2}\right)\sin(\tau-e)\frac{\cos^2\Sigma'}{k^2}.\end{aligned}\right.$$

Soit pareillement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Sigma''.\operatorname{tang}\Sigma'' &= \delta\lambda\cos\lambda_1\cos\left(\frac{\lambda_1+f_1}{2}\right)\sin(\lambda_1-f_1)\frac{\cos^2\Sigma''}{k_1^2}\\ &\quad+\delta t\cos\lambda_1\cos t_1\cos\left(\frac{\tau_1+e_1}{2}\right)\sin(\tau_1-e_1)\frac{\cos^2\Sigma''}{k_1^2},\end{aligned}\right.$$

l'équation correspondante à l'émersion; la combinaison de ces deux équations linéaires, dans lesquelles on pourrait, sans inconvénient, égaler à l'unité les cosinus qui en diffèrent très-peu, fournira les valeurs des deux seules inconnues δt, $\delta\lambda$; puis par les mouvements horaires on trouvera l'heure de la conjonction vraie, et enfin la longitude et la latitude exactes de la Lune à cette époque.

Par exemple, soient δl, δL les mouvements de la Lune et du Soleil pendant une heure, et x l'intervalle de temps qui sépare la phase observée de la conjonction vraie; on aura, pour la longitude vraie de la Lune à cette époque, $l + \delta t + x\delta l$, puisque δt est l'erreur des tables, et $x\delta l$ le mouvement pendant x heures. On aura aussi

$L + x\delta L$ pour la longitude correspondante du Soleil; par conséquent lors de la conjonction vraie,

$$x = \frac{l - L + \delta t}{\delta L - \delta l} = \frac{t + \delta t}{-\mu};$$

$\mu = \delta l - \delta L$ étant le mouvement horaire relatif en longitude.

Bien entendu que dans les applications numériques, il faut prendre t négativement lorsque $l < L$; il en est de même pour la latitude λ de la Lune, lorsqu'elle est australe.

Si, au lieu des équations différentielles précédentes, qu'il est si facile de soumettre au calcul logarithmique, on employait, comme le prescrit Lagrange, deux équations analogues à celle (N) dans laquelle Σ' serait remplacée par σ' (*voyez* le nº 35 de son Mémoire), on se trouverait dans la nécessité de combiner entre elles deux équations transcendantes en λ et en t, qu'on ne pourrait résoudre que par la méthode des substitutions successives; aussi voilà pourquoi les astronomes ont abandonné ce procédé extrêmement laborieux, et considéré le problème des éclipses comme au-dessus des forces de l'analyse.

355. Les erreurs des Tables étant connues, il est aisé d'obtenir la longitude géographique d'un lieu où il a été fait une observation correspondante à l'une de celles qui ont servi à déterminer ces erreurs. En effet, au moyen de la longitude du lieu à peu près connue, et des Tables, on calculera la longitude, la latitude et la distance apparente des centres, pour ce lieu et pour la phase observée; mais on sera en erreur sur cette distance de la quantité $\delta\Sigma_{\prime\prime}$, et sur les différences de longitude et de latitude des deux astres, des quantités $\delta t_{\prime\prime}$, $\delta\lambda_{\prime\prime}$. En désignant donc par M le mouvement relatif en longitude pour 1ˢ de temps, et par N celui en latitude, puis faisant $\delta t_{\prime\prime} = M\delta\varphi$, $\delta\lambda_{\prime\prime} = N\delta\varphi$, ($\delta\varphi$ exprimant l'erreur en temps commise sur la différence des méridiens cherchée), on aura, par ce qui précède,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Sigma_{\prime\prime}\operatorname{tang}\Sigma'' = {} & N\delta\varphi\cos\lambda_{\prime\prime}\cos\left(\frac{\lambda_{\prime\prime}+f_{\prime\prime}}{2}\right)\sin(\lambda_{\prime\prime}-f_{\prime\prime}).\frac{\cos^2\Sigma_{\prime\prime}}{k_{\prime\prime}^2} \\ & + M\delta\varphi\cos\lambda_{\prime\prime}\cos t_{\prime\prime}\cos\left(\frac{\tau_{\prime\prime}+e_{\prime\prime}}{2}\right)\sin(\tau_{\prime\prime}-e_{\prime\prime}).\frac{\cos^2\Sigma_{\prime\prime}}{k_{\prime\prime}^2}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tirera la valeur de $\delta\varphi$. Ainsi, appelant φ la différence supposée des méridiens, exprimée en temps, la vraie différence cherchée sera $\varphi + \delta\varphi = \varphi + \frac{\delta t_{''}}{M}$, du moins si $\delta\varphi$ est d'un petit nombre de secondes; autrement ce résultat ne serait qu'une première approximation de laquelle il faudrait repartir pour arriver à un nouveau résultat plus exact.

La méthode analytique de Lagrange, pour calculer les éclipses de Soleil, étant donc modifiée ainsi qu'il précède, se trouve réunir tous les avantages des méthodes purement trigonométriques usitées jusqu'à présent, et avoir avec elles beaucoup d'analogie. Montrons maintenant comment on peut l'adapter aux occultations des étoiles et des planètes par la Lune.

Application aux occultations des étoiles.

356. En faisant coïncider le point où le plan de projection touche la sphère céleste, avec le centre de l'astre B occulté, on a (art. **349**) $l'' = L$, $\lambda'' = \Lambda$; ayant donc égard aux relations (1''), (2''), et faisant

$$(12)\qquad V = u + \frac{t^2}{2}\sin 1''\cos\lambda\,\frac{\sin\Lambda}{\cos u},$$

$$(13)\qquad V' = \cos u - \frac{t^2}{2}\sin^2 1''\cos\lambda\cos\Lambda,$$

$$(14)\qquad F = (\psi-\Psi)[\sin q\cos\Lambda - \cos(n-L)\cos q\sin\Lambda],$$

$$(15)\qquad \psi\alpha' = \psi[\cos(n-L)\cos q\cos\Lambda + \sin q\sin\Lambda],$$

$$(16)\qquad K = V' - \sin\psi\alpha';$$

on a en général, à cause de

$$(17)\qquad T = t\cos\lambda,\quad E = \beta(\psi-\Psi) = (\psi-\Psi)\sin(n-L)\cos q$$

et de la formule (N),

$$(18)\qquad \tang\Sigma' = \frac{\sqrt{(\sin T - \sin E)^2 + (\sin V - \sin F)^2}}{K}.$$

Cette dernière formule, toute conforme à celle (N'), se prête par con-

séquent aux mêmes transformations; c'est-à-dire que

$$\tang \Sigma' = \frac{\sqrt{\cos\frac{1}{2}(T+E)\sin(T-E)+\cos\frac{1}{2}(V+F)\sin(V-F)}}{K},$$

et qu'elle prend une forme rationnelle au moyen d'un angle subsidiaire θ dont la tangente est

$$\tang \theta = \frac{\cos\frac{1}{2}(V+F)\sin(V-F)}{\cos\frac{1}{2}(T+E)\sin(T-E)}.$$

Quant à la formule (7), il suffit d'y changer k en K pour la rendre générale; ainsi

(19) $$\tang \sigma' = \tang D + \frac{\sin d}{K \cos D}.$$

Pour appliquer ces formules aux occultations des étoiles, il suffit de faire $\Psi = 0$, puisque leur parallaxe de hauteur est nulle; on a en outre $D = 0$, par conséquent

(20) $$\tang \sigma' = \frac{\sin d}{K}, \quad \text{ou simplement } \sigma' = \frac{d}{K}.$$

Les astronomes ont cherché à découvrir, par la comparaison d'un grand nombre d'éclipses de Soleil et d'étoiles, si la Lune est douée d'une atmosphère On conçoit en effet que si cette atmosphère existe, elle doit, en réfractant les rayons lumineux de l'astre occulté, et en les infléchissant derrière la Lune, influer sur l'instant précis et la durée des éclipses (*voyez* l'*Astron. théoriq.* et *prat.* de Delambre, t. II, p. 580). L'éclipse annulaire de Soleil, qui eut lieu en 1764, et qui fut visible dans toute l'Europe, parut offrir, par l'étendue et la variété de ses phases, des moyens de vérifier ce fait. Dionis-du-Séjour la calcula, par des procédés nouveaux, avec un soin tout particulier; mais il ne put concilier les nombreux résultats de ses calculs, comparés aux mesures directes de la distance des cornes du croissant prises pendant la durée de l'éclipse, qu'en supposant autour du Soleil une irradiation de $3''\frac{1}{2}$, et autour de la Lune une irradiation de $2''$ environ, produite par l'atmosphère de ce satellite. Dans cette hypothèse, on diminue de $5''\frac{1}{2}$ environ la somme des demi-diamètres apparents donnés par les tables, parce que ces demi-diamètres n'y sont pas dépouillés de l'irradiation;

de cette manière on a la distance des centres telle qu'elle se trouve réellement à l'instant du commencement ou de la fin de l'éclipse.

Cette correction des demi-diamètres est admise par plusieurs astronomes et rejetée par d'autres. Delambre craint bien que l'erreur prétendue des diamètres ne tienne à l'erreur de leurs mesures (*voyez* son *Astronomie*, tome II, page 423); mais il est incontestable que si l'atmosphère de la Lune existe réellement, elle est d'une extrême rareté.

Nous renverrons aux traités d'Astronomie, relativement aux moyens à employer pour observer avec succès les éclipses de Soleil. Nous nous bornerons à faire remarquer qu'il est absolument nécessaire de savoir à quel point du disque solaire doit s'effectuer le contact; car comme, au commencement d'une éclipse, l'on n'aperçoit le bord de la Lune que quand il échancre celui du Soleil, on pourrait bien, en ne dirigeant pas son attention vers le point où le contact doit s'effectuer, ne pas recevoir la première impression du phénomène. L'émersion des étoiles, pour être saisie exactement, exige les mêmes précautions.

Vu l'incertitude à laquelle sont sujettes les mesures micrométriques directes, Ferrer a cherché à déterminer la valeur de l'irradiation ou de l'inflexion de la Lune, indépendamment de la comparaison de ces mesures avec les diamètres déduits des occultations d'étoiles ou d'éclipses de Soleil. Les occultations qu'il a observées à la Havane, donnent, par une moyenne arithmétique, 2",07 d'inflexion. Cet habile observateur, enlevé prématurément à la géographie, fit usage d'un télescope qui grossissait deux cents fois; et, comme alors les étoiles de première et de deuxième grandeur lui paraissaient avoir un très-petit disque, il tenait compte, pour déterminer l'inflexion, du temps écoulé entre l'instant où le centre de l'étoile était en contact avec le disque apparent de la Lune, et celui de la disparition totale de l'étoile derrière le disque réel (*Connaissance des Temps* de 1817, page 318).

Par exemple, le 15 juillet 1811, Aldébaran était en contact avec le disque de la Lune à. . . . . $17^h8^m22^s,4$ t. moyen.
Il disparut entièrement à. 17.8.32,4

De là, temps écoulé entre le contact et l'occultation. . . . . $10^s,0$
Ferrer en conclut une inflexion de. 2,7

Calcul de la différence des méridiens de Paris et de Berlin, par l'occultation d'une étoile.

357. Comme en ce moment, nous avons moins pour but d'obtenir des résultats numériques très-exacts, que de guider le lecteur dans l'application de la méthode précédente; nous prendrons pour exemple l'occultation d'Antarès, observée le 16 avril 1749, et nous emploierons la plupart des éléments calculés par Lalande, p. 437 du tome II de son *Astronomie* : voici ceux qui ont été déduits de l'observation.

16 AVRIL 1749.	A PARIS, immersion.	A BERLIN, immersion.	A BERLIN, émersion.
Temps vrais de l'observation.	$13^h 1^m 20^s 0$	$14^h 6^m 19^s 0$	$15^h 12^m 54^s 0$
Temps moyen............	13.3.32,8	14. 8.31,6	15.15. 5,8

Mais à cette époque, on savait déjà que la longitude orientale de Berlin, comptée de Paris, était de $44^m 4^s$ en temps à fort peu près; ainsi

16 AVRIL 1749.	A PARIS, immersion.	A BERLIN, immersion.	A BERLIN, émersion.
Temps vrais des observations, réduits à Paris..........	$13^h 1^m 20^s 0$	$13^h 22^m 15^s 0$	$14^h 28^m 50^s 0$
Temps moy. correspondants.	13.3.32,8	13.24.27,6	14.31. 1,8

Avec ces données, et les tables de la Lune et du Soleil dont Lalande fit usage, on est arrivé à former le tableau suivant (*):

(*) Les principales phases de l'éclipse totale de Soleil, du 8 juillet 1842, ont été calculées par M. Largeteau : elles sont relatées dans une instruction remarquable que M. Arago vient de publier, sur les phénomènes qui devront plus particulièrement fixer l'attention des astronomes durant cette éclipse. (*Académie des Sciences*, 6 juin 1842.)

	A PARIS, immersion.	A BERLIN, immersion.	A BERLIN, émersion.
Longitude de la ☾	245°31′42″,4	245°43′16″,6	246°20′7″,8
Longitude apparente de la ☾	246. 0.56,9	246. 2.37,2	246.29.45,4
Latitude de la ☾ australe	3.47.58,7	3.47.18,7	3.45.10,3
Latitude apparente de la ☾ australe	4.36.12,1	4.40.11,8	4.40.26,4
Parallaxe horizontale de la ☾, pour chaque lieu (art. 263)	57.16,2	57.15,9	57.17,1
Temps vrais réduits en degrés	195.20. 0,0	211.34.45,0	228.13.30,0
Ascension droite du ☉	15.58. 2,3	15.58.50,7	16. 1.24,7
Ascension droite du zénith	211.18. 2,3	227.33.35,7	244.14.54,7
Déclin. du zénith, ou latit. géogr. moins l'angle de la vertic. avec le rayon (art. 260)	48.38.50,0	52.20.24,0	52.20.14,0
½ diamètre horizontal de la ☾	15.38,3	15.38,5	15.38,8
Augmentation (art. 385)	2,9	2,7	3,0
½ diamètre apparent de la ☾	σ'=15.41,2	σ''=15.41,2	σ'''=15.41,8

Les Tables de la Lune, par Burckhardt, et celles plus récentes de M. Damoiseau, fourniraient sans doute des résultats plus exacts; mais peu importe pour l'intelligence de la méthode.

Cagnoli, ayant calculé l'occultation dont il s'agit, trouva, comme Lalande, pour la position apparente d'Antarès, à l'époque du 16 avril 1749,

$$\text{longitude apparente} = 246°16'19'',2$$
$$\text{latitude apparente} = 4.32.10,5 \text{ (australe)};$$

et à la même époque

$$\text{l'obliquité apparente de l'écliptique } \omega = 23°28'22''.$$

Nous ferons remarquer que les Tables de la *Connaissance des Temps* ne donnant ordinairement que les ascensions droites et les déclinaisons

des étoiles, il serait nécessaire de recourir aux formules de l'art. **259**, pour déterminer leurs longitudes et leurs latitudes; mais comme il s'agit ici des lieux apparents, on prendrait pour Æ et D l'ascension droite et la déclinaison apparentes déterminées par le procédé de l'art. **281**, et l'on emploierait l'obliquité apparente déduite des Tables solaires (art. **244**).

La première opération est de chercher la distance apparente des centres des deux astres, afin de pouvoir la comparer à la somme des demi-diamètres apparents, et de connaître ainsi l'effet que produisent sur cette distance les erreurs qui affectent et la différence supposée des méridiens, et le lieu de la Lune déduit des tables.

Détermination de la distance apparente des centres des deux astres, lors de l'immersion à Paris.

Il résulte de la notation et des données précédentes, que

l'obliquité de l'écliptique $\omega = 23°28'22'',0$

longitude ☾... $l = 245.31.42,4$	latitude ☾... $\lambda = -\ 3°47'58'',7$
longitude ✶... $L = 246.16.19,2$	latitude ✶... $\Lambda = -\ 4.32.10,5$
$t = l - L = -\ 0.44.36,8$	$u = \lambda - \Lambda = +\ 0.44.11,8$
$= -2676'',8$	$= +\ 2651'',8$

ascension droite du zénith $g = 211°18'\ 2''$
déclinaison du zénith $h = 48.38.50.$

Formules (m) *donnant le nonagésime.*

$\cos\omega = 9{,}96248$	$\sin\omega = 9{,}60022$
$\text{tang}\, g = 9{,}78391$	$\text{tang}\, h = 0{,}05544$
$9{,}74639 = 0{,}55768$	$\text{c.}\cos g = 0{,}06831\ -$
$-\ 0{,}52963$	$9{,}72397 = -\ 0{,}52963$
$\text{tang}\, n = +\ 0{,}02805$	
$\log \text{tang}\, n = 8{,}44793,$	longit. du zénith $n = 181°36'24'',0$
	$L = 246.16.19,2$
$\text{l.}\cos g = 9{,}93169\ -$	$n - L = -\ 64.39.55,2$
$\text{l.}\cos h = 9{,}82000$	
$\text{c.log.}\cos n = 0{,}00017\ -$	
$\text{l.}\cos q = 9{,}75186\ +$	

$\text{l.}\sin q = 9{,}91658 =$ log. sin. latitude du zénith; de là $q = 55°36'50''$.

Formules (12) et (17) donnant les principaux éléments de la distance apparente.

$\log t = 3{,}42762-$
$idem = 3{,}42762-$
$\sin 1'' = 4{,}68557$
$c.\log 2 = 9{,}69897$
$1{,}23978$
$l.\cos\lambda = 9{,}99904$

$\log t^2 \frac{\sin 1''}{2} \cos\lambda = 1{,}23882 \quad \ldots\ldots \quad 1{,}23882$

$\sin A = 8{,}89811- \qquad \sin 1'' = 4{,}68557$
$c.\log \cos u = 0{,}00004 \qquad 5{,}92439$
$\log \delta u = 0{,}13697- \qquad l.\cos A = 9{,}99863$

$\log \delta u' = 5{,}92302 = \log t^2 \frac{\sin^2 1''}{2} \cos\lambda \cos A$

$\delta u = -1'',37 \qquad \delta u' = 0{,}0000837$
$u = 2651{,}80 \qquad \log \cos u = 9{,}99996$
$V = 2650{,}43 = u + \delta u \qquad \cos u = 9{,}99991$
$= 44'10'',4 \qquad -\delta u' = -0{,}00008$
$\log t = 3{,}42762- \qquad V' = 9{,}99983$
$l.\cos\lambda = 9{,}99904$
$\log T = 3{,}42666 = -2670'',9$
$T = -44'30'',9.$

Formules (14) et (15) évaluant l'effet des parallaxes.

$2{,}35077 - = -224'',27 \qquad 2{,}91795 + = 827'',84$
$\log \sin A = 8{,}89811 - \qquad \log \cos A = 9{,}99864$
$\log \sin q = 9{,}91658 \qquad \log \cos q = 9{,}75186$
$\log(\psi - \Psi) = 3{,}53608 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3{,}53608$
$\log \cos A = 9{,}99864 \qquad l.\cos(n-L) = 9{,}63137$
$3{,}45130 + = 2826'',8 \qquad l.\sin A = 8{,}89811 -$
$+65,7 \qquad 1{,}81742 - = -65'',68.$
$F = 2892,5$
$= +48'12'',5$

Dans ce dernier calcul, le log 2,35077 supérieur est la somme des trois log. suivants, savoir, l. sin A, l. sin q et log ($\psi - \Psi$); et le loga-

rithme inférieur 3,45130 est la somme des trois logarithmes immédiatement supérieurs, savoir, l. cos Λ, log $(\psi - \Psi)$, l. sin q.

On a ensuite, *formules* (16) et (17), et par ce qui précède,

$\log(\psi - \Psi) = 3{,}53608$		$+827'',84$
$\text{l.}\sin(n - \text{L}) = 9{,}95607-$		$-224'',27$
$\text{l.}\cos q = 9{,}75186$		$\psi\alpha' = +603'',57$
$\log \text{E} = 3{,}24401-$		$\log \psi\alpha' = 2{,}78073$
$\text{E} = -1754'',0 = -29'14''$		$\log \sin 1'' = 4{,}68557$
$\text{V}' = 9{,}99983$		$\log \psi\alpha' = 7{,}46630$
$-\psi\alpha' = -0{,}00293$		$\psi\alpha' = 0{,}0029262$
$\text{K} = 9{,}99690$	$\log \text{K} = 9{,}99865$	
$\text{V} = 2650'',4$		$\text{T} = -2670'',9$
$\text{F} = 2892\;,5$		$\text{E} = -1754\;,0$
$\text{V} - \text{F} = -242'',1$		$\text{T} - \text{E} = -916'',9$
$\text{V} + \text{F} = 5542\;,9$		$\text{T} + \text{E} = -4424\;,9$
$\frac{1}{2}(\text{V} + \text{F}) = 2771\;,4$		$\frac{1}{2}(\text{T} + \text{E}) = -2212\;,4$
$= 46'11'',9$		$= -36'52'',4$

Formule (18) donnant la distance des centres.

$\text{l.}\cos\frac{1}{2}(\text{V} + \text{F}) = 9{,}99996$	$\text{l.}\cos\frac{1}{2}(\text{T} + \text{E}) = 9{,}99998$
$\log(\text{V} - \text{F}) = 2{,}38399-$	$\log(\text{T} - \text{E}) = 2{,}96232$
$\text{c.}\log\cos\frac{1}{2}(\text{T} + \text{E}) = 0{,}00002$	$\text{c.}\log \text{K} = 0{,}00135$
$\text{c.}\log(\text{T} - \text{E}) = 7{,}03768-$	$\text{c.}\log\cos\theta = 0{,}01464$
$\text{l.tang}\,\theta = 9{,}42165+$	$\log \Sigma' = 2{,}97829 = 951'',23$
$\sin\theta = 9{,}40701-$	distance appar. $\Sigma' = 15'51'',2$

Formule (20) donnant la somme des demi-diamètres apparents.

Lors de l'immersion à Paris, on avait

demi-diamètre horizontal de la ☾, ou $d = 15'38'',3 = 938'',3$;

de là

$$\log d = 2{,}97234$$
$$\text{c.}\log \text{K} = 0{,}00135$$
$$\log \sigma' = 2{,}97369;$$

ainsi, demi-diamètre apparent de la ☾, ou $\sigma' = 941'',2 = 15'41'',2$;

mais $d = 938\;,3$

donc, augmentation $= 2\;,9$ comme Lalande.

En calculant de la même manière l'immersion et l'émersion à Berlin, on trouve

pour l'immersion, distance apparente $\Sigma'' = 15'51'',13$,
pour l'émersion, distance apparente $\Sigma''' = 15.45,20$.

Il est à remarquer maintenant que si les Tables lunaires étaient parfaitement exactes, et que la différence en longitude de Paris et de Berlin fût telle que nous l'avons supposée, on devrait avoir $\Sigma' = \sigma'$, $\Sigma'' = \sigma''$, $\Sigma''' = \sigma'''$; mais cette identité n'ayant pas lieu, et les valeurs de σ', σ'', σ''' pouvant être considérées comme exemptes d'erreurs, puisqu'elles ne sont pas influencées par les éléments sur lesquels il reste de l'incertitude, il s'ensuit que

$$\sigma' - \Sigma' = \partial\Sigma', \quad \sigma'' - \Sigma'' = \partial\Sigma'', \quad \sigma''' - \Sigma''' = \partial\Sigma'''$$

seront les erreurs cherchées.

Lalande, pour avoir égard à l'inflexion (art. 357), a diminué de $3''\frac{1}{2}$ le demi-diamètre apparent de la Lune; ainsi, en admettant les résultats ci-dessus, et les valeurs tirées du tableau précédent, on a

$$\partial\Sigma' = -13'',5, \quad \partial\Sigma'' = -13'',4, \quad \partial\Sigma''' = -6'',9.$$

358. Pour déterminer les erreurs des Tables lunaires, et celle qui affecte la différence supposée des méridiens, on procédera ainsi qu'il suit.

La formule (18) étant différentiée dans l'hypothèse posée à l'art. **354**, on a d'abord

$$\partial\Sigma' \operatorname{tang} \Sigma' = \frac{\cos^2 \Sigma'}{K^2}\left[\begin{array}{l} \quad\sin(T-E)\cos\left(\frac{T+E}{}\right)\cos T.\partial T \\ +\sin(V-F)\cos\left(\frac{V+F}{2}\right)\cos V.\partial V \end{array}\right];$$

mais $$T = t\cos\lambda, \quad \partial T = \partial t \cos\lambda;$$

de plus on a, à très-peu près,

$$\cos T = \cos t, \text{ et } \partial V = \partial u = \partial(\lambda - \Lambda) = \partial\lambda;$$

donc

$$(a)\left\{\begin{aligned}\partial\Sigma' &= \frac{\sin(T-E)\cos\left(\frac{T+E}{2}\right)}{K\,\text{tang}\,\Sigma'}\\ &\times\left[\cos\lambda\cos t.\partial t + \frac{\sin(V-F)\cos\left(\frac{V+F}{2}\right)\cos V.\partial V}{\sin(T-E)\cos\left(\frac{T+E}{2}\right)}\right]\frac{\cos^2\Sigma'}{K};\end{aligned}\right.$$

ou bien, à cause de $\cos\theta = \frac{\sin(T-E)\cos\left(\frac{T+E}{2}\right)}{K\,\text{tang}\,\Sigma'}$, d'après l'art. **351**, on a plus simplement

$$(b)\qquad \partial\Sigma' = (\cos\theta\cos\lambda\cos t.\partial t + \sin\theta\cos V.\partial V)\frac{\cos^2\Sigma'}{K}.$$

Par l'examen des formules (a) et (b) l'on voit que $\cos\theta$ est négatif, si $\sin(T-E)$ est négatif; et que $\sin\theta$ a le même signe que $\sin(V-F)$.

Dans ces deux formules différentielles, ∂t et ∂V représentent en général les erreurs totales en longitude et en latitude, provenant tant des Tables lunaires que de l'inexactitude de la différence des méridiens employée pour calculer le lieu de la Lune; en sorte que $\partial\Sigma'$ est l'effet de ces erreurs sur la distance apparente.

Soient M le mouvement horaire de la Lune en longitude, et m son mouvement horaire en latitude. On avait, au 16 avril 1749 et d'après les anciennes tables,

$$M = 1988'',5,\qquad m = 115'',46;$$

d'où

$$\log\frac{m}{M} = 8,763906.$$

Pour introduire le rapport $\frac{m}{M}$ dans la formule (b), nommons ∂T l'erreur commise sur la différence supposée des méridiens, ∂l et $\partial\lambda$ les erreurs en longitude et en latitude des Tables lunaires; la formule dont il s'agit, et qui est de la forme

$$(c)\qquad \partial\Sigma' = p\partial t + q\partial V,$$

deviendra pour l'immersion à Berlin, et en exprimant δT en secondes de temps,

$$(d)\qquad \delta\Sigma'' = p'\delta l + q'\delta\lambda + \left(p' + q'\frac{m}{M}\right)\frac{M\delta T}{3600};$$

pour l'émersion dans le même lieu, on a pareillement

$$(e)\qquad \delta\Sigma''' = p''\delta l + q''\delta\lambda + \left(p'' + q''\frac{m}{M}\right)\frac{M\delta T}{3600}.$$

En effet, puisque, par hypothèse, l'on s'est trompé de δT sur la différence des méridiens, et que le mouvement horaire de la Lune est M en longitude, il s'ensuit que $\frac{M\delta T}{3600}$ est l'erreur que cette hypothèse occasionne sur la longitude calculée de la Lune. De même, puisque m est le mouvement horaire en latitude, l'erreur, sur cette latitude, est représentée par $\frac{m\delta T}{3600}$; donc

$$\delta t = \delta l + \frac{M\delta T}{3600}, \qquad \delta V = \delta\lambda + \frac{m\delta T}{3600}.$$

Cela posé, si l'on calcule, par les logarithmes à 5 décimales, les coefficients des formules (c), (d), (e), on trouvera successivement

$$(c')\qquad 13'',5 = 0,96763\,\delta l + 0,25605\,\delta\lambda,$$
$$(d')\qquad 13'',4 = 0,86276\,\delta l + 0,50860\,\delta\lambda + 0,49287\,\delta T,$$
$$(e')\qquad 6'',9 = -0,85188\,\delta l + 0,52736\,\delta\lambda - 0,45363\,\delta T,$$

à cause de

$$\text{l. tang}\,\theta = 9,42165, \quad \text{l. tang}\,\theta' = 9,76956, \quad \text{l. tang}\,\theta'' = 9,70984-,$$
$$\text{l. sin}\,\theta = 9,40701-, \quad \text{l. sin}\,\theta' = 9,70503-, \quad \text{l. sin}\,\theta'' = 9,72063-;$$

équations qu'il s'agit de résoudre par la voie ordinaire.

D'abord on en tire ces trois valeurs,

$$(\text{I})\qquad \delta l = 13'',952 - 0,26461\,\delta\lambda,$$
$$(\text{II})\qquad \delta l = 15'',531 - 0,58951\,\delta\lambda - 0,57127\,\delta T,$$
$$(\text{III})\qquad \delta l = -8'',0997 + 0,61905\,\delta\lambda - 0,53250\,\delta T;$$

puis, en les combinant deux à deux, on a

$$\begin{aligned}
&(\text{II})(\text{I}) \quad 0 = 1'',579 - 0,32490\,\delta\lambda - 0,57127\,\delta\text{T},\\
&(\text{III})(\text{I}) \quad 0 = -22'',0517 + 0,88366\,\delta\lambda - 0,53250\,\delta\text{T};
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&(\text{IV}) \quad \delta\lambda = 4'',8599 - 1,7583\,\delta\text{T},\\
&(\text{V}) \quad \delta\lambda = 24'',955 + 0,60260\,\delta\text{T};
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(\text{V})(\text{IV}) \quad 0 = 20'',0951 + 2,3609\,\delta\text{T},$$

$$\delta\text{T} = \frac{-20,0951}{2,3609} = -8'',51;$$

de là

$$\delta\lambda = 24'',955 - 5'',131 = 19'',82;$$

enfin

$$\delta l = 13'',952 - 5'',25 = 8'',7.$$

Il résulte de ce calcul que les anciennes Tables de la Lune donnaient, à l'époque de l'occultation, une latitude trop forte de 19″,82, et une longitude trop petite de 8″,7. Cagnoli, qui a calculé le même exemple par ses formules, a trouvé 17″,7 pour la correction de la latitude, et 8″,3 pour celle de la longitude. (Voyez sa *Trigonométrie*.)

En nous en tenant à nos nombres, on a donc

Latitude corrigée . . . . $\lambda + \delta\lambda = -3^\circ 47' 38'',9$,
Longitude corrigée . . . . $l + \delta l = 245.31.51,1$.

Nous avons supposé originairement que la longitude de la Lune était trop petite par suite de l'erreur commise sur la différence des méridiens, et qu'il fallait en conséquence l'augmenter de la quantité $\frac{\text{M}\delta\text{T}}{3600}$; mais dans le cas particulier ci-dessus, on a $\delta\text{T} = -8'',5$; la longitude de la Lune est trop grande au contraire; il faut donc la diminuer de $\frac{\text{M}}{3600}\,8'',5 = 4'',7$, ou de 4″,26 selon Cagnoli. Or, en augmentant de 8″,5 la différence des méridiens 44′4″, c'est-à-dire en la portant à 44′12″,5, on comptera 8s,5 de temps de moins à Paris au moment du phénomène, puisque Berlin est à l'orient; et pour lors le temps se

trouvant moindre, la longitude de la Lune, calculée par les Tables, sera nécessairement plus petite.

On voit donc que le problème des occultations des étoiles, qu'on n'avait pas encore résolu d'une manière tout à fait analytique, est susceptible de l'être avec assez de simplicité.

Néanmoins la méthode trigonométrique étant généralement usitée, nous compléterons par ce qui suit ce que nous avons dit à ce sujet (art. **353**).

359. La formule

$$\Sigma'^2 = (l' - L')^2 \cos^2 \Lambda' + (\lambda' - \Lambda')^2$$

étant différentiée par rapport à l' et λ', on a

$$d\Sigma' = p dl' + q d\lambda'$$

en faisant

$$p = \frac{l' - L'}{\Sigma'} \cos^2 \Lambda' = \frac{t' \cos^2 \Lambda'}{\Sigma'}, \quad q = \frac{\lambda' - \Lambda'}{\Sigma'} = \frac{u'}{\Sigma'}.$$

Mais les variations dl', $d\lambda'$ se composant chacune de l'erreur des Tables lunaires et de celle commise sur la différence estimée des méridiens, on a, comme précédemment,

$$dl' = \delta l + \frac{M\delta T}{3600}, \quad d\lambda' = \delta\lambda + \frac{m\delta T}{3600},$$

valeurs qui étant introduites dans celle de $d\Sigma'$, lui donnent la forme

$$d\Sigma' = p\delta l + q\delta\lambda + \left(p + q\frac{m}{M}\right)\frac{M}{3600}\,\delta T,$$

c'est-à-dire celle (d) ou (e) (art. **358**) qu'il convient d'appliquer aux observations de Berlin. D'après cela, et en profitant des valeurs calculées de $\delta\Sigma'$, $\delta\Sigma''$, $\delta\Sigma'''$ (art. **357**), il est facile de s'assurer que l'on a : par l'immersion à Paris,

$$13'',5 = 0,96\,\delta l + 0,25\,\delta\lambda;$$

par l'immersion à Berlin,

$$13'',4 = 0,86\,\delta l + 0,51\,\delta\lambda + 0,49\,\delta T;$$

par l'émersion à Berlin,

$$6'',9 = -0,85\,\delta l + 0,52\,\delta\lambda - 0,45\,\delta T;$$

équations correspondantes à celles (c'), (d'), (e'), et desquelles on tire

$$\delta l = 8'',87, \qquad \delta\lambda = 19'',97, \qquad \delta T = -9'',0;$$

ce qui porte la longitude orientale de Berlin à $44^m 4^s + 9^s = 44^m 13^s$, en temps, comme ci-dessus, du moins à une demi-seconde près.

Vu la précision donnée théoriquement, dans ces derniers temps, aux tables de la Lune, on ne peut guère espérer maintenant de les rendre plus parfaites à l'aide de la méthode que nous expliquons; car il serait à craindre qu'on ne considérât comme erreurs de ces tables des différences, telles que δl et $\delta\lambda$ obtenues ci-dessus, qui devraient au contraire être attribuées aux erreurs d'observation, tant il est difficile d'apprécier à une ou deux secondes près l'instant du commencement d'une éclipse de Soleil ou de l'émersion d'une étoile.

Proposons-nous, pour dernière application, de déterminer l'heure de la conjonction vraie à Paris et à Berlin. D'abord, appelons D' la distance apparente des centres des deux astres, corrigée de l'inflexion de 3",5, afin de nous conformer à l'hypothèse admise (art. **357**), et faisons $\lambda' - \Lambda' = u'$; la différence des longitudes apparentes de ces mêmes astres sera

$$t' = \frac{\sqrt{(D'+u')(D'-u')}}{\cos\frac{1}{2}(\lambda'+\Lambda')};$$

puis, désignant par δP la parallaxe de longitude pour la phase observée, et par X la distance à la conjonction vraie, on aura, en temps,

$$X = \pm \frac{3600}{M}\left(t' \pm \delta P\right),$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon qu'il s'agit du commencement ou de la fin de l'éclipse.

Par exemple, lors de l'immersion à Paris, l'on avait, en corrigeant les latitudes lunaires de $+19'',8$ (art. précédent),

$\lambda' = -4°36'12'',1$ $\qquad$ $D' = 15'41'',2 - \quad 3'',5$

Correction. . $+ \quad 19,8$ $\qquad$ $= 15.37,7$

$\lambda' = -4.35.52,3$ $\qquad$ $u' = \quad 3.41,8$

$\Lambda' = -4.32.10,5$ $\qquad$ $D' + u' = 19.19,5 = 1159'',5$

$D' - u' = 11.55,9 = \quad 221,8$

Mouvement horaire de la Lune (t. moy.)

$\log(D' + u') = 3,06427$ $\qquad$ $M = 1993''$

$\log(D' - u') = 2,85485$ $\qquad$ De là $\log \frac{3600}{M} = 0,25680.$

Somme. . . . $= 5,91912$

Demi-somme. $= 2,95956$

c. cos $\Lambda' = 0,00140$

$\log t' = 2,96096 = 914'',0 = \quad 15'14'',0$

Parallaxe de longitude. . . $\delta P = +29.14,5$

$t' + \delta P = \quad 44.28,5 = 2668'',5$

et

$$X = \frac{3600}{M}(t' + \delta P) = 4820'',3$$

Ainsi

Heure de l'immersion . . . . $13^h\ 3^m 32^s,8$ temps moyen.

Distance à la conjonction vraie. . . X = $1.20.20,3$

Heure de la conjonction vraie à Paris. $14.23.53,1$ temps moyen.

L'immersion à Berlin conduit de même aux résultats suivants :

$\lambda' = -4°40'11'',8$ $\qquad$ $D' = 15'37'',7$

Correction. . $+ \quad 19,8$ $\qquad$ $u' = \quad 7.41,5$

$\lambda' = -4.39.52,0$ $\qquad$ $D' + u' = 23.19,2$

$\Lambda' = -4.32.10,5$ $\qquad$ $D' - u' = \quad 7.56,2$

$u' = \quad 0.\ 7.41,5 = 461'',5$

$t' = \quad 13'38'',99$ $\qquad$ Heure de l'immersion, $14^h\ 8^m 31^s,6$ t. moy.

Parall. $\delta P = +19.20,20$ $\qquad$ $X = + \quad 0.59.35,9$

$t' + \delta P = \quad 32.59,59$ $\qquad$ Heure de la conj. vraie

à Berlin. . . . . . $15.\ 8.\ 7,5$ t. moy.

Par l'émersion au même lieu, on a

$-4°40'26'',4$	$D' = 15'38'',3$
$+19,8$	$u' = 7.66,1$
$-4.40.\ 6,6$	$D' + u' = 23.34,4$
$-4.32.10,5$	$D' - u' = 7.42,2$
$u' = 7.56,1$	
$t' = 13'31'',2$	
Parallaxe $\delta P = -\ 9.38,1$	Heure de l'émersion, $15^h 15^m 5^s,8$
$t' - \delta P = 3.53,1$	$X = -\ 7.1,1$
et	Heure de la conj. vraie
$X = -\frac{3600}{M}(t' - \delta P) = -7'1'',1$	à Berlin. . . $= 15^h\ 8^m 4^s,7$ t. moy.

CONCLUSION.

A Paris, la conjonction vraie a eu lieu à $14^h 23^m 53^s,1$ temps moyen.
A Berlin, à. . . . . $15.\ 8.\ 6,1$ par un milieu.
Donc la différ. des méridiens cherchée= $44^m 13^s,0$ en temps.

C'est-à-dire qu'elle est la même que par les deux méthodes précédentes.

Il y aurait encore bien des choses à dire sur cette matière, mais ce serait sortir des limites dans lesquelles nous devons nous renfermer; c'est pourquoi nous renverrons aux traités d'Astronomie nautique, ou à notre *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, pour ce qui concerne la détermination des longitudes terrestres par la mesure des distances de la Lune au Soleil ou aux étoiles, à l'aide du cercle de réflexion : méthode d'ailleurs qui ne comporte pas la même précision que celles que nous venons d'exposer.

Règle générale pour apprécier le degré d'exactitude du résultat moyen d'un grand nombre d'observations.

360. Les observations astronomiques dont nous venons de nous occuper, procureront des résultats moyens qui seront d'autant plus exacts

que les valeurs observées seront en plus grand nombre, et qu'elles différeront moins entre elles. L'analyse des probabilités, portée de nos jours à un très-haut degré de perfection et de généralité par Laplace, et enrichie d'utiles développements par Poisson (*Connaissance des Temps* pour 1827), offre l'avantage de donner la mesure de l'exactitude de ces résultats moyens. Nous rappellerons, à ce sujet, une règle usuelle et très-simple, dont on est redevable au célèbre Fourier, et dont nous avons déjà fait une application à la page 491 du tome I.

1°. On détermine la valeur moyenne d'une série d'observations, en divisant la somme des valeurs par leur nombre; on élève le quotient au carré, ce qui donne le *carré de la valeur moyenne;*

2°. On élève au carré chacune des valeurs données par l'observation, et l'on divise leur somme par leur nombre, ce qui donne la *valeur moyenne du carré;*

3°. On retranche de la valeur moyenne du carré le carré de la valeur moyenne, on divise le reste par la moitié du nombre des valeurs observées, et l'on extrait la racine carrée du quotient.

Cette racine carrée donne la mesure exacte de la précision cherchée. En la multipliant par $\frac{1}{2}$ (plus exactement par 0,477), on trouve l'erreur de la valeur moyenne, et en multipliant cette même racine carrée par 3, on trouve la plus grande limite de l'erreur.

Le savant géomètre qui prescrit cette règle, observe en outre que l'on doit regarder dans la pratique comme entièrement impossible que l'erreur du résultat moyen surpasse ou même atteigne sa plus grande limite : il y a plus de 50000 à parier contre 1 que cela n'est pas.

L'erreur dont le résultat moyen est affecté peut être indifféremment au-dessus ou au-dessous de l'erreur moyenne; l'un de ces cas n'est pas plus vraisemblable que l'autre : leur probabilité commune est $\frac{1}{2}$.

Enfin l'on ne change rien au résultat de la présente règle, en retranchant de chaque valeur observée une même quantité, telle que la partie commune à toutes ces valeurs (art. **515**).

Si donc les valeurs moyennes

$$b+\theta',\quad b+\theta'',\quad b+\theta'''$$

correspondent respectivement aux nombres d'observations

$$s',\quad s'',\quad s''',$$

la valeur moyenne cherchée sera

$$M = b + \frac{s'\theta' + s''\theta'' + s'''\theta'''}{s' + s'' + s'''}.$$

Faisant $s' + s'' + s''' = s$, et $\frac{s'\theta' + s''\theta'' + s'''\theta'''}{s} = k$, la valeur moyenne du carré, que nous désignerons par k', aura pour expression

$$\frac{s'\theta'^2 + s''\theta''^2 + s'''\theta'''^2}{s} = k',$$

et la mesure de la précision cherchée sera

$$\sqrt{\frac{2(k' - k^2)}{s}} = 2\sqrt{\frac{k' - k^2}{2s}} = \frac{2h}{\sqrt{s}},$$

en faisant, pour abréger, $\frac{1}{2}(k' - k^2) = h^2$; alors $\pm \frac{h}{\sqrt{s}}$ sera l'erreur de la valeur moyenne k, et $\frac{6h}{\sqrt{s}}$ désignera la plus grande limite de cette erreur; mais il y aura 50000 à parier contre 1 qu'elle ne peut aller à cette limite. (Page 414, tome I.)

Généralement $\pm \frac{2hr}{\sqrt{s}}$ est l'erreur de la valeur moyenne k, et la probabilité p qui en dépend a pour expression

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int c^{-t^2} . dt,$$

c désignant la base des logarithmes népériens, π le rapport de la circonférence au diamètre, et l'intégrale étant prise entre les limites r et l'infini.

APPLICATION.

Soumettons à cette règle des probabilités les nombreuses observations de latitude faites par Méchain à l'Observatoire royal, et rapportées à la page 412 du tome II de la *Base du Système métrique*.

On trouve que 300 observations ont donné	48°50′15″,88
422	14 ,02
372	10 ,54
1670	13 ,64
Total $s = 2764$	

Si l'on prend $b = 48°50'13''$, on aura

$$\theta' = 2'',88,\quad \theta'' = 1'',02,\quad \theta''' = -2'',46,\quad \theta^{\text{iv}} = 0'',64,$$
$$s' = 300,\quad s'' = 422,\quad s''' = 372,\quad s^{\text{iv}} = 1670;$$

et par suite la valeur moyenne $k = 0'',53$.

Le résultat moyen des 2764 observations sera donc

$$M = 48°50'13'',53,$$

au lieu de 48°50′13″,2 selon Méchain. Il s'agit maintenant de savoir dans quelles limites ce résultat est renfermé : or, la valeur moyenne du carré étant

$$k' = 2'',23,$$

la mesure de l'exactitude des observations sera

$$\sqrt{\frac{(2k' - k^2)}{s}} = 0'',038,$$

et les limites de l'erreur de la valeur moyenne seront $\pm$ 0″,019; mais il y a 50000 à parier contre 1 que cette erreur n'est pas de 0″,114.

S'il était bien prouvé que le cercle qui a servi à ces observations était exempt d'une erreur constante, la valeur précédente de M serait aussi exacte qu'il est possible de le désirer.

LIVRE SIXIÈME.

QUESTIONS DE HAUTE GÉODÉSIE.

CHAPITRE PREMIER.

ANALYSE DES TRIANGLES SPHÉROÏDIQUES.

361. Lorsqu'on réfléchit sur le principe de la méthode employée dans le chapitre xv du livre III, on reconnaît bientôt qu'il repose sur une considération dont l'exactitude n'est pas rigoureuse. En effet, par rapport au sphéroïde elliptique de révolution, la ligne tracée sur sa surface, par les opérations géodésiques, ou celle que l'on considère comme la route d'un rayon de lumière qui va d'un point à un autre, est une ligne de plus courte distance et à double courbure, à moins qu'elle ne coïncide avec le méridien ou l'équateur (art. **160**). Les deux éléments extrêmes de cette ligne ne sont donc pas en général dans le même plan. Cependant, nous avons supposé jusqu'à présent que la perpendiculaire à la méridienne, ou qu'une ligne géodésique quelconque était située tout entière dans le plan vertical passant par ses deux extrémités. A la vérité, l'erreur provenant de cette hypothèse est presque nulle dans la pratique, les côtés des triangles qui forment un réseau eussent-ils plus d'un degré d'amplitude; mais, pour détruire le doute que l'on pourrait former à cet égard, Legendre a donné, dans

les *Mémoires de l'Institut* pour l'année 1806, une analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde (*). Entre autres résultats auxquels ses savantes recherches l'ont conduit, c'est que, dans tous les cas où le réseau trigonométrique s'étend sur une surface quelconque, mais peu différente de celle d'une sphère, son théorème, relatif aux triangles sphériques très-petits, a lieu (art. **100**). Comme nous nous sommes proposé de traiter aussi les questions de haute Géodésie, nous allons commencer par exposer les principes de la résolution des triangles sphéroïdiques.

Équations de la ligne la plus courte sur l'ellipsoïde de révolution.

Soient P le pôle de la Terre (*fig.* 28), s l'arc M'M'' de plus courte distance, H', H'' les latitudes vraies des points M', M''; λ', λ'' les latitudes réduites de ces mêmes points, H la latitude vraie du point A où le méridien PA est perpendiculaire à la ligne géodésique M'M'', et λ sa latitude réduite; V', V'' les angles azimutaux PM'A, PM''A; enfin φ' et φ'' les longitudes des points M', M'', comptées du méridien PA. Il s'agit de trouver des relations entre ces diverses quantités, dans l'hypothèse que la Terre est un ellipsoïde de révolution, et quelle que soit d'ailleurs la grandeur de la ligne géodésique s, par rapport aux arcs elliptiques PM', PM''.

Si $u = 0$ est l'équation d'une surface courbe quelconque, l'une de celles de la ligne la plus courte sur cette surface sera, d'après l'art. **165**,

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0.$$

Or, l'équation d'un solide de révolution, quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe génératrice, est

$$x^2 + y^2 + f(z) = u = 0,$$

f étant le signe d'une fonction quelconque, et l'axe des z étant celui

(*) A la même époque le même sujet a été traité avec beaucoup d'étendue par Oriani, sous ce titre : *Elementi di Trigonometrica sferoïdica*.

de rotation; ainsi les valeurs des coefficients aux différentielles partielles sont

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y;$$

l'équation (1) devient donc

$$xddy - yddx = 0,$$

et, en intégrant, l'on a

$$xdy - ydx = cds.$$

D'ailleurs si l'on fait CT ou $z = t$, $\text{TM}'' = q$, le triangle rectangle Cpm, dans lequel C$p = x$, $pm = y$ et C$m = q$, donnera évidemment

$$x = q \cos\varphi'', \quad y = q \sin\varphi'';$$

par conséquent, en différentiant, l'on obtiendra

$$(2) \quad \begin{cases} dx = dq \cos\varphi'' - q \sin\varphi''.d\varphi'', \\ dy = dq \sin\varphi'' + q \cos\varphi''.d\varphi'', \end{cases}$$

et l'on aura, par une combinaison de ces quatre équations,

$$xdy - ydx = q^2 d\varphi''.$$

Concluons de là, que

$$q^2 d\varphi'' = cds.$$

D'un autre côté, le triangle élémentaire $a'm'\text{M}''$, rectangle en m', donne

$$\sin \text{PM}''\text{A} \quad \text{ou} \quad \sin \text{V}'' = \frac{a'm'}{ds},$$

et les deux arcs semblables $\text{F}'\text{G}' = d\varphi''$ et $a'm'$ étant proportionnels à leurs rayons respectifs CF′ et $q - dq$, on a

$$a'm' = qd\varphi'',$$

en prenant toutefois $\text{CF}' = 1$, et négligeant le terme du second ordre

$-dqd\varphi''$; donc

$$\sin V'' = \frac{qd\varphi''}{ds}, \quad \text{et} \quad q \sin V'' = c;$$

ainsi la propriété de la ligne la plus courte est de rendre $q \sin V''$ constant.

Remarquons en outre, que l'on peut prendre pour méridien fixe ou pour plan des xz, celui qui est perpendiculaire à la ligne géodésique $M'M'' = s$. Soit donc PA ce méridien; alors au point A, l'azimut $V'' = 100^g$, et la constante c est égale à AI, valeur initiale de q.

De plus, l'équation différentielle d'un arc M'M'' étant

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

elle devient, à cause des valeurs ci-dessus de dx et dy, et faisant attention que $z = t$,

$$ds^2 = dq^2 + q^2 d\varphi''^2 + dt^2.$$

Substituant ici pour ds sa valeur $\frac{q^2 d\varphi''}{c}$, ensuite éliminant $d\varphi''$, on a

$$\left.\begin{aligned} q^2(q^2 - c^2)\, d\varphi''^2 &= c^2(dt^2 + dq^2), \\ (q^2 - c^2)\, ds^2 &= q^2(dt^2 + dq^2), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Avant d'intégrer ces équations, il faut en éliminer l'une des variables t, q à l'aide de l'équation du méridien mobile PM''F, qui est

$$a^2 t^2 + b^2 q^2 = a^2 b^2.$$

Mais, pour parvenir aux résultats les plus simples, introduisons une nouvelle variable λ'', telle que l'on ait l'abscisse

$$t = b \sin \lambda'',$$

auquel cas λ'' sera l'angle que forme avec l'équateur, le rayon b du cercle inscrit au méridien mobile PM'', et dont la variable t est l'abscisse d'un de ses points. Cette valeur étant introduite dans l'équation de ce méridien, on a l'ordonnée

$$q = a \cos \lambda'',$$

Il résulte de là que la constante c, qui a pour valeur $q \sin V''$, devient

$$c = a \sin V'' \cos \lambda''.$$

A un autre point M' de la plus courte distance, pour laquelle λ'' se change en λ', et V'' en V', on aurait de même

$$c = a \sin V' \cos \lambda'.$$

Enfin au point A où l'azimut de AM' est supposé de 100^g, on aurait, en désignant par λ ce que devient λ',

$$c = a \cos \lambda;$$

il résulte donc de ces trois valeurs, la relation

$$\cos \lambda = \sin V' \cos \lambda' = \sin V'' \cos \lambda''. \quad (4)$$

Ainsi *les sinus des angles azimutaux, aux extrémités d'une ligne géodésique, sont entre eux réciproquement comme les ordonnées de ces points.*

Maintenant si l'on substitue dans les formules (3), pour t, q et c leurs valeurs respectives $b \sin \lambda''$, $a \cos \lambda''$ et $a \cos \lambda$, et que pour l'uniformité de la notation, l'on écrive ds'' au lieu de ds, on aura, parce que φ'' augmente quand λ'' diminue,

$$(b') \left\{ \begin{aligned} d\varphi'' &= -\frac{d\lambda'' \cos \lambda}{a \cos \lambda''} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \lambda'' + b^2 \cos^2 \lambda''}{\cos^2 \lambda'' - \cos^2 \lambda}}, \\ ds'' &= -d\lambda'' \cos \lambda'' \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \lambda'' + b^2 \cos^2 \lambda''}{\cos^2 \lambda'' - \cos^2 \lambda}}; \end{aligned} \right.$$

ce sont les équations différentielles de l'arc perpendiculaire AM''. Il est évident qu'on a de même, pour celles de l'arc AM',

$$(b'') \left\{ \begin{aligned} d\varphi' &= -\frac{d\lambda' \cos \lambda}{a \cos \lambda'} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \lambda' + b^2 \cos^2 \lambda'}{\cos^2 \lambda' - \cos^2 \lambda}}, \\ ds' &= -d\lambda' \cos \lambda' \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \lambda' + b^2 \cos^2 \lambda'}{\cos^2 \lambda' - \cos^2 \lambda}}. \end{aligned} \right.$$

Il est remarquable que la variable λ'' se déduit immédiatement de la latitude H'' du point M''; car, à cause de $TM'' = a \cos \lambda''$ et de $CT = b \sin \lambda''$, on a, pour la sous-normale TO de ce point,

$$TO = \frac{a^2}{b^2} . b \sin \lambda'' = \frac{a^2}{b} \sin \lambda'',$$

et de là

$$\frac{TO}{TM''}, \text{ ou } \tang H'' = \frac{a}{b} \tang \lambda'';$$

donc réciproquement

$$\tang \lambda'' = \frac{b}{a} \tang H'';$$

c'est aussi ce qu'on a trouvé d'une autre manière à l'article **170**.

λ'', qui est la *latitude réduite* du point M'', est en général moindre que la latitude vraie H''; mais à cause du peu de différence de ces deux quantités, dans le cas du sphéroïde terrestre, il est commode et exact, dans la pratique, d'évaluer $H'' - \lambda''$ à l'aide de la série

$$H'' - \lambda'' = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \sin 2 H'' - \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin 4 H'' + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 \sin 6 H'' - \ldots$$

ou de celle-ci :

$$H'' - \lambda'' = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \sin 2 \lambda'' + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin 4 \lambda'' + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 \sin 6 \lambda'' + \ldots$$

selon que H'' ou λ'' est connue.

Il est évident que l'on aura aussi entre H' et λ', la relation

$$\tang \lambda' = \frac{b}{a} \tang H',$$

puisque, d'après la définition ci-dessus, λ' est la latitude réduite du point M' dont la latitude vraie est H'. Même observation pour le point A.

362. Legendre rend très-facile l'intégration des formules (b''), par l'introduction d'un angle subsidiaire et quelques transformations ingé-

nieuses : toutefois elles se prêtent assez aisément à cette opération, en changeant sous les radicaux les cosinus en sinus, et y faisant, pour abréger, $\frac{a^2-b^2}{b^2}=\varepsilon$. En effet, on a d'abord

$$ds = -\frac{bd.\sin\lambda'}{(\sin^2\lambda-\sin^2\lambda')^{\frac{1}{2}}}.\sqrt{1+\varepsilon\sin^2\lambda'},$$

$$d\varphi = -\frac{b}{a}.\frac{\cos\lambda\cos\lambda' d\lambda'}{\cos^2\lambda'(\sin^2\lambda-\sin^2\lambda')^{\frac{1}{2}}}.\sqrt{1+\varepsilon\sin^2\lambda'},$$

puis, développant le facteur $\sqrt{1+\varepsilon\sin^2\lambda'}$ jusqu'au terme de l'ordre ε^2 inclusivement, les premiers termes des valeurs de ds et $d\varphi$ seront respectivement

$$-\frac{bd.\sin\lambda'}{(\sin^2\lambda-\sin^2\lambda')^{\frac{1}{2}}},\quad \text{et} -\frac{b}{a}.\frac{\cos\lambda\cos\lambda' d\lambda'}{\cos^2\lambda'(\sin^2\lambda-\sin^2\lambda')^{\frac{1}{2}}},$$

ou bien

$$-b\frac{d.\frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}}{\left(1-\frac{\sin^2\lambda'}{\sin^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \text{et} -\frac{b}{a}\frac{d.\frac{\tang\lambda'}{\tang\lambda}}{\left(1-\frac{\tang^2\lambda'}{\tang^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

car, par les formules trigonométriques connues, l'on a

$$\sin^2\lambda-\sin^2\lambda' = (\tang^2\lambda-\tang^2\lambda')\cos^2\lambda\cos^2\lambda'.$$

Quant aux autres termes, ils seront de la forme

$$A\frac{u^m du}{(k^2-u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et l'on aura en général

$$\int\frac{u^m du}{(k^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{u^{m-1}\sqrt{k^2-u^2}}{m}+\frac{m-1}{m}k^2\int\frac{u^{m-2}du}{(k^2-u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

si donc on intègre, il viendra, à cause de $\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \ldots\ldots$,

$$\begin{aligned}
\frac{s}{b} &= \left[1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon \sin^2\lambda - \tfrac{3}{64}\varepsilon^2 \sin^4\lambda\right] \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}\right) \\
&+ \left[\tfrac{1}{4}\varepsilon \sin^2\lambda - \tfrac{3}{64}\varepsilon^2 \sin^4\lambda\right]\left[\frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}\left(1 - \frac{\sin^2\lambda'}{\sin^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&- \tfrac{1}{32}\varepsilon^2 \sin^4\lambda \left[\frac{\sin^3\lambda'}{\sin^3\lambda}\left(1 - \frac{\sin^2\lambda'}{\sin^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \\
\varphi &= \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda}\right) \\
&- \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 \sin^2\lambda\right] \cos\lambda \left[\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}\right)\right] \\
&+ \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 \sin^2\lambda \cos\lambda \left[\frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}\left(1 - \frac{\sin^2\lambda'}{\sin^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Il n'y a point de constantes à ajouter, parce qu'elles sont nulles en même temps que s et φ; en effet, λ' se change alors en λ.

Maintenant soient

$$\sigma = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}\right), \quad \text{et} \quad \omega = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos\sigma = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}, \qquad \cos\omega = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda};$$

on voit d'abord que ces deux relations appartiennent évidemment à un triangle sphérique rectangle dont les côtés de l'angle droit sont $(100^g - \lambda)$ et σ, et dont les angles opposés à ces mêmes côtés sont respectivement V' et ω. De plus, il est remarquable que σ est précisément l'angle auxiliaire employé par Legendre; partant,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\sigma}{\cos\lambda}, \quad \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}\left(1 - \frac{\sin^2\lambda'}{\sin^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\sigma,$$

$$\frac{\sin^3\lambda'}{\sin^3\lambda}\left(1 - \frac{\sin^2\lambda'}{\sin^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos^3\sigma \sin\sigma = \tfrac{1}{8}\sin 4\sigma + \tfrac{1}{4}\sin 2\sigma;$$

et par conséquent

$$\text{(A)}\quad\begin{cases}\frac{s}{b}=\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\sin^2\lambda-\frac{3}{64}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right)\sigma\\ \quad+\left(\frac{1}{8}\varepsilon\sin^2\lambda-\frac{1}{32}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right)\sin 2\sigma\\ \quad-\frac{1}{256}\varepsilon^2\sin^4\lambda\sin 4\sigma,\end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad\begin{cases}\varphi=\omega-\left[\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{3}{8}\varepsilon^2-\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2\lambda\right]\sigma\cos\lambda\\ \quad+\frac{1}{32}\varepsilon^2\sin^2\lambda\cos\lambda\sin 2\sigma.\end{cases}$$

Comme il est utile en outre d'avoir la valeur de σ en fonction de $\frac{s}{b}$, retournons la série (A), et remarquons que puisqu'elle donne d'abord, en tirant la valeur de σ développée jusqu'aux termes en ε^2 inclusivement,

$$\text{(C)}\quad\begin{cases}\sigma=\frac{s}{b}-\frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin^2\lambda+\frac{7}{64}\varepsilon^2\frac{s}{b}\sin^4\lambda\\ \quad-\frac{1}{8}\varepsilon\sin 2\sigma\sin^2\lambda+\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin 2\sigma\sin^4\lambda\\ \quad+\frac{1}{256}\varepsilon^2\sin 4\sigma\sin^4\lambda,\end{cases}$$

on peut représenter par $F(\sigma)$ la somme de tous les termes en ε, c'est-à-dire faire $\sigma=\frac{s}{b}+F(\sigma)$. Alors, d'après le théorème de Lagrange, on a généralement

$$\text{(D)}\qquad \sigma=\frac{s}{b}+F\left(\frac{s}{b}\right)+\frac{d.F(\sigma)^2}{2d\sigma}+\frac{d^2.F(\sigma)^3}{2.3\,d\sigma^2}+\ldots,$$

sauf à faire, après la différentiation, la variable $\sigma=\left(\frac{s}{b}\right)$. Or, en ne conservant que les termes en ε^2, il vient visiblement

$$F(\sigma)^2=\tfrac{1}{16}\varepsilon^2\left(\frac{s}{b}\right)\sin^4\lambda+\tfrac{1}{64}\varepsilon^2\sin^2 2\sigma\sin^4\lambda+\tfrac{1}{16}\varepsilon^2\left(\frac{s}{b}\right)\sin 2\sigma\sin^4\lambda;$$

et en différentiant cette expression, comme on l'a dit tout à l'heure, on a

$$\frac{d.F(\sigma)^2}{2d\sigma}=\tfrac{1}{32}\varepsilon^2\sin 2\left(\frac{s}{b}\right)\cos 2\left(\frac{s}{b}\right)\sin 2\left(\frac{s}{b}\right)\sin^4\lambda+\tfrac{1}{16}\varepsilon^2\left(\frac{s}{b}\right)\cos 2\left(\frac{s}{b}\right)\sin^4\lambda.$$

Enfin, changeant $F(\sigma)$ en $F\left(\frac{s}{b}\right)$, on arrive définitivement à cette série,

$$(E)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma = \frac{s}{b}&\left(1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sin^2\lambda + \tfrac{7}{64}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) \\ &- \sin 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{8}\varepsilon\sin^2\lambda - \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) \\ &+ \frac{s}{b}\cos 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) \\ &+ \tfrac{5}{256}\varepsilon^2\sin 4\left(\frac{s}{b}\right)\sin^4\lambda; \end{aligned}\right.$$

ce qu'il fallait trouver. On y parviendrait aussi par une méthode tout à fait élémentaire, celle des coefficients indéterminés; mais le calcul serait un peu plus long. Il faudrait, dans ce cas, supposer

$$(E')\qquad \sigma = \frac{s}{b} + P\varepsilon + Q\varepsilon^2 + \ldots,$$

et tirer de là

$$\sin 2\sigma = \sin 2\left(\frac{s}{b}\right) + 2P\varepsilon.\cos 2\left(\frac{s}{b}\right), \quad \sin 4\sigma = \sin 4\left(\frac{s}{b}\right);$$

ensuite substituer ces valeurs dans la série (C) ordonnée par rapport à ε, puis la comparer terme à terme avec la précédente (E'); ce qui fournirait autant d'équations de condition qu'il y a de coefficients à déterminer.

Les résultats (A), (B), (E) sont les mêmes que ceux auxquels Legendre est arrivé par une autre voie, et procurent le moyen de résoudre un triangle sphéroïdique formé par deux méridiens et une perpendiculaire à l'un d'eux, en sorte qu'il est possible de vérifier si les observations de latitude, de longitude et d'azimut faites en différents points de cette perpendiculaire s'accordent avec l'hypothèse formée sur la figure de la Terre. Voici d'ailleurs, d'après ce qui précède, les formules qui répondent directement à cette question.

363. Soient, comme ci-dessus, $2a$, $2b$ le grand et le petit axe de l'ellipse du méridien, et $\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$; soient en outre s un arc de plus courte distance perpendiculaire à ce méridien; H, H' les latitudes de ses extrémités M, M'; φ la différence en longitude de ces mêmes points;

et supposons l'arc s perpendiculaire au méridien qui passe par le point M. Enfin soient λ, λ' les *latitudes réduites* de M et de M'; on aura, d'après les propriétés de la plus courte distance sur la surface du sphéroïde de révolution, et quelle que soit la longueur de cette ligne,

$$(1) \quad \tang\lambda = \frac{b}{a}\tang H, \qquad (2) \quad \tang\lambda' = \frac{b}{a}\tang H',$$

$$(3) \quad \cos\sigma = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}, \qquad (4) \quad \cos\omega = \frac{\tang\lambda'}{\tang\lambda},$$

$$(5) \quad \tang\omega = \frac{\tang\sigma}{\cos\lambda};$$

$$(E) \quad \left\{\begin{aligned} \sigma = \frac{s}{b}&\left(1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sin^2\lambda + \tfrac{7}{64}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) \\ &- \sin 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{8}\varepsilon\sin^2\lambda - \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) \\ &+ \frac{s}{b}\cos 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) \\ &+ \tfrac{5}{256}\varepsilon^2\sin 4\left(\frac{s}{b}\right)\sin^4\lambda\ldots; \end{aligned}\right.$$

$$(B) \quad \left\{\begin{aligned} \varphi = \omega &- \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2\lambda\right)\sigma\cos\lambda \\ &+ \tfrac{1}{32}\varepsilon^2\sin^2\lambda\cos\lambda\sin 2\sigma\ldots; \end{aligned}\right.$$

on aura en outre

$$(F) \qquad \sin V' = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda'};$$

V' étant l'angle que l'arc s fait avec le méridien qui passe par son extrémité M'.

364. La ligne la plus courte menée perpendiculairement au méridien, affecte une figure qu'il est aisé de se représenter d'après cette solution; car lorsque $\sigma = 90^\circ$, on a

$$\lambda' = 0, \quad H' = 0, \quad \omega = 90^\circ,$$

et

$$\varphi = 90^\circ.\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\right)\cos\lambda + \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2\lambda\cos\lambda\right].$$

Le point de cette ligne, qui correspond à la valeur de $\sigma = 90^\circ$, est

donc situé sur l'équateur; mais sa longitude est moindre que celle qu'il aurait sur la sphère, d'une quantité à peu près proportionnelle à l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \ldots$

Dans la même hypothèse, la longueur de l'arc s est égale à un quart d'ellipse, dont la valeur développée est

$$s = b(1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon \sin^2\lambda - \tfrac{3}{64}\varepsilon^2 \sin^4\lambda)\, 90^\circ.$$

Lorsque ensuite $\sigma = 180^\circ$, on a

$$\lambda' = -\lambda, \quad H' = -H \quad \text{et} \quad \omega = 180^\circ;$$

ainsi les valeurs de φ et de s deviennent doubles de ce qu'elles étaient en faisant $\sigma = 90^\circ$; tandis que l'azimut V' est de 90°, comme au point A (*fig.* 28). Donc, la ligne géodésique, après avoir traversé l'équateur, atteint le parallèle qui a la même latitude que le point A, où elle est de nouveau perpendiculaire à la méridienne. Si l'on prolonge encore cette ligne, elle passera semblablement du second hémisphère dans le premier, et parviendra au même parallèle d'où elle était partie; mais dans un point différent, puisque la longitude de ce point, au lieu d'être de 360°, sera

$$360^\circ[1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2)\cos\lambda + \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 \sin^2\lambda \cos\lambda].$$

Il résulte de là que, quel que soit le nombre de pareilles révolutions, la perpendiculaire dont il s'agit formera une sorte de spirale comprise entre les deux parallèles situés de part et d'autre de l'équateur, à la même latitude. Toutes les spires de cette courbe seront égales entre elles, et la longueur de chaque quart de spire, comprise entre un parallèle et l'équateur, sera égale à celle du quart d'ellipse, ayant pour demi-axes b et $b\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda}$.

Ces propriétés, que nous venons de démontrer d'après Legendre, ont également lieu pour une ligne géodésique menée d'un point quelconque à un autre de l'ellipsoïde; car une telle ligne fait toujours partie d'une perpendiculaire à une méridienne (*voyez* le Mémoire cité de ce savant géomètre).

Il est une autre ligne dans l'ellipsoïde de révolution qu'il est, sinon utile, du moins curieux d'examiner en Géodésie; c'est la développée d'un méridien (*fig.* 40). Pour en obtenir l'équation, il faut partir de celle de ce méridien, qui est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et remarquer que, par la théorie des osculations, l'on a

$$(2) \qquad x - x_1 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{d^2y}, \quad y - y_1 = \frac{dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{d^2y},$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées courantes de la développée ou de l'un des centres m_1 de courbure. Alors, en différentiant deux fois de suite l'équat. (1), il vient

$$yd^2y = \frac{-b^2dx^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2y^2}\right),$$

et les équat. (2) donnent, avec un peu d'attention,

$$\left(\frac{ax_1}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{x}{a}, \quad \left(\frac{by_1}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{y}{b},$$

valeurs qui changent l'éq. (1) en celle de la développée, savoir.

$$\left(\frac{ax_1}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by_1}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ou pour abréger,

$$(Ax_1)^{\frac{2}{3}} + (By_1)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Enfin, faisant disparaître la puissance fractionnaire, on a cette fonction rationnelle

$$(1 - A^2x_1^2 - B^2y_1^2)^3 = 27\,A^2x_1^2 . B^2y_1^2,$$

dont la discussion montre que la développée de l'ellipse enveloppe un

espace curviligne $ab\,a'b'$, composé de quatre branches égales, et symétriquement placées par rapport aux axes des coordonnées qu'elles rencontrent aux points de rebroussement.

Du triangle formé par deux méridiens, et la ligne la plus courte qui en joint deux points quelconques.

365. Considérons maintenant deux triangles sphériques $pm'a$, $pm''a$ (*fig.* 28 et 29) correspondants aux triangles sphéroïdiques PM′A, PM″A; et supposons que les azimuts V′, V″ soient les mêmes de part et d'autre, mais que les latitudes des points a, m', m'' soient λ, λ', λ''. Enfin, représentons respectivement par σ', σ'', ξ les arcs am', am'', $m'm''$; par ω', ω'' les angles $m'pa$, $m''pa$: on aura, par la propriété des triangles sphériques rectangles, ou en vertu de l'art. **362**, les relations suivantes :

$$\text{I} \qquad \cos\lambda = \cos\lambda' \sin V', \qquad \sin\sigma' = \sin\omega' \cos\lambda',$$

$$\text{II} \qquad \cos\sigma' = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}, \qquad \cos\omega' = \cos\sigma' \sin V',$$

$$\text{III} \qquad \operatorname{tang}\omega' = \frac{\operatorname{tang}\sigma'}{\cos\lambda}, \qquad \sin\sigma' \sin\lambda = \cos V' \cos\lambda'.$$

Celles qui composent le premier système donneront la position du point A, lorsque le point M′ sera donné. On a en outre, par rapport au point M″,

$$\text{IV} \qquad \sin\lambda'' = \sin\lambda \cos\sigma'',$$

$$\text{V} \qquad \operatorname{tang}\omega'' = \frac{\operatorname{tang}\sigma''}{\cos\lambda},$$

$$\text{VI} \qquad \cos\lambda'' \sin V'' = \cos\lambda' \sin V';$$

enfin la proportion des quatre sinus donne

$$\text{(K)} \qquad \sin(\omega'' - \omega') = \frac{\sin(\sigma'' - \sigma') \sin V'}{\cos\lambda''}.$$

On pourra donc, à l'aide des relations (IV, V, VI), déterminer trois des quatre variables H″, σ'', ω'', V″, quand l'une d'elles sera connue.

De là et des formules (A), (B), art. **362**, on tire généralement deux autres équations relatives au triangle sphéroïdique obliquangle PM′M″

dans lequel $M'M'' = s$, et la différence en longitude $M'PM'' = \varphi$, savoir :

$$\text{VII} \qquad \frac{s}{b} = (\sigma'' - \sigma')\left(1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon\sin^2\lambda - \tfrac{3}{64}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) + (\sin 2\sigma'' - \sin 2\sigma')\left(\tfrac{1}{8}\varepsilon\sin^2\lambda - \tfrac{1}{32}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) - (\sin 4\sigma'' - \sin 4\sigma')\left(\tfrac{1}{256}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right),$$

$$\text{VIII} \qquad \varphi = \omega'' - \omega' - (\sigma'' - \sigma')\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\right)\cos\lambda + \left(\sigma'' - \sigma' + \tfrac{1}{2}\sin 2\sigma'' - \tfrac{1}{2}\sin 2\sigma'\right).\left(\tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2\lambda\cos\lambda\right).$$

Toute la théorie des triangles sphéroïdiques est renfermée dans les équations précédentes; mais il est des cas qui présentent d'assez grandes difficultés d'analyse pour combiner ces équations de manière à en déduire les valeurs de certaines inconnues. Le problème le plus simple, après celui que résolvent directement les équations fondamentales, c'est lorsqu'il s'agit de déterminer les éléments H″, V″, au moyen des autres éléments connus H′ et V′ et de la longueur s de la ligne la plus courte M′M″. En effet, les relations I, II, III feront d'abord connaître λ, σ' et ω'; puis de la formule VII on tirera, par l'un des procédés expliqués à l'art. **362**, la valeur suivante :

$$\text{IX.} \qquad \sigma'' = \sigma' + \frac{s}{b}\left(1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon\sin^2\lambda + \tfrac{7}{64}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) - \sin\frac{s}{b}\cos\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon\sin^2\lambda - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right) + \frac{s}{b}\cos\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\sin^4\lambda}{16}\right) + \sin\frac{s}{b}\cos\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\cos\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\sin^4\lambda}{16}\right) + \sin 2\frac{s}{b}\cos\left(4\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\sin^4\lambda}{128}\right);$$

ensuite on obtiendra λ'', ω'' et V″ par les équations IV, V, VI, et enfin φ par l'équation VIII.

Il est encore assez facile de résoudre le problème suivant, déjà traité à l'art. **199**, mais seulement pour le cas où la ligne géodésique est de l'ordre de l'aplatissement de la Terre.

Étant données les latitudes de deux points situés sur l'ellipsoïde de

révolution, et leur différence en longitude, trouver leur plus courte distance et les azimuts de cette ligne géodésique.

Soient pour données, les latitudes vraies H′, H″ des points M′, M″, et φ leur différence en longitude (*fig.* 29). On calculera d'abord les latitudes réduites λ' et λ'' à l'aide des relations

$$\operatorname{tang}\lambda' = \frac{b}{a}\operatorname{tang} H', \quad \operatorname{tang}\lambda'' = \frac{b}{a}\operatorname{tang} H'',$$

et l'on passera ensuite du triangle géodésique au triangle sphérique correspondant, dont les côtés et l'angle compris sont

$$90^0 - \lambda', \quad 90^0 - \lambda'', \quad \omega = \omega'' - \omega'.$$

Mais la différence de longitude réduite ω est une inconnue qu'il faut déterminer au moyen de la différence de longitude vraie φ; et ce qu'il y a de plus simple à faire à cet égard, c'est de procéder par la méthode des approximations successives, ainsi qu'il suit.

D'abord on voit, par la formule VIII précédente, que $\omega'' - \omega'$ ou ω diffère peu de φ. Supposons donc en premier lieu $\omega = \varphi$; alors le triangle sphérique $m'pm''$ dans lequel les angles azimutaux V′, V″ sont les mêmes que dans le triangle sphéroïdique, étant résolu par les analogies de Néper, on aura

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(V' + V'') = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda'')}{\sin\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda'')}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(V' - V'') = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda'')}{\cos\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda'')}.$$

Ayant trouvé approximativement V′ et V″, on calculera

λ par la formule $\cos\lambda = \cos\lambda' \sin V'$,

puis σ' par. . . . . . $\cos\sigma' = \dfrac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}$,

et σ'' par. . . . . $\cos\sigma'' = \dfrac{\sin\lambda''}{\sin\lambda}$.

Ensuite avec ces données approchées l'on déterminera, au moyen de la série VIII, une nouvelle valeur de ω, laquelle étant mise à la place

de φ dans les analogies précédentes, donnera lieu à d'autres valeurs de V' et V'' qu'on pourra regarder comme suffisamment exactes, pour en avoir de nouvelles de λ, σ' et σ''. Enfin ces dernières étant employées dans la série VII, on aura $\frac{s}{b}$. Cette solution générale, dont Legendre n'a pas parlé, se présente naturellement à l'esprit.

Les formules que Dionis-du-Séjour a publiées sur le même sujet, dans le deuxième volume de son *Traité analytique des mouvements des Corps célestes*, sont représentées par les précédentes I, II, IV, VI, (K), et par les séries VII, VIII, IX, dans lesquelles on supprimerait les termes en ε^2. Ces séries ont évidemment lieu quelle que soit la grandeur de la ligne géodésique s, et leur convergence ne dépend que de la petitesse de ε. Pour le sphéroïde terrestre, cette quantité diffère peu de $\frac{1}{150}$: on peut donc négliger presque toujours les termes en ε^2; mais lorsque la ligne géodésique est très-petite ou de l'ordre ε, ainsi que cela a lieu dans la pratique des opérations géodésiques, il est plus commode de développer d'une manière particulière les formules relatives au triangle PM'M'', dans lequel M'M'' est très-petit par rapport aux deux autres. Ce développement fera l'objet des articles suivants.

366. Par ce qui précède, on a

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\sin\lambda'' &= \sin\lambda\cos(\sigma'+\xi),\\ \sin\lambda' &= \sin\lambda\cos\sigma',\\ \sin\lambda\sin\sigma' &= \cos V'\cos\lambda'.\end{aligned}\right.$$

Ces relations sont d'un merveilleux secours pour la solution du problème qu'il s'agit de résoudre maintenant. D'abord si dans les équations (b') de l'art. **361**, qui font voir que λ'' est compris entre $+\lambda$ et $-\lambda$, on fait, pour cette raison,

$$\sin\lambda'' = \sin\lambda\cos\sigma'',$$

d'où il suit que $\sigma''=\sigma'+\xi$; elles deviendront, par la substitution de cette valeur, et en faisant de plus $a^2=b^2(1+\varepsilon)$,

$$(c')\quad\left\{\begin{aligned}d\varphi &= \frac{b\cos\lambda.d\sigma''\sqrt{1+\varepsilon\sin^2\lambda\cos^2\sigma''}}{a(1-\sin^2\lambda\cos^2\sigma'')},\\ ds &= bd\sigma''\sqrt{1+\varepsilon\sin^2\lambda\cos^2\sigma''};\end{aligned}\right.$$

mais puisque $\sigma'' = \sigma' + \xi$, on a, en regardant σ' comme constant,

$$d\sigma'' = d\xi;$$

de plus, si l'on fait $\frac{s}{b} = \mathrm{U}$, on aura

$$\frac{ds}{b} = d\mathrm{U};$$

et U pourra être considérée comme une quantité très-petite du même ordre que ε; partant

$$d\mathrm{U} = d\xi\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda \cos^2(\sigma' + \xi)}.$$

Or, pour n'admettre dans la valeur de U que des termes du troisième ordre, il suffira de prendre

$$\begin{aligned} \cos(\sigma' + \xi) &= \cos\sigma' - \xi\sin\sigma', \\ \cos^2(\sigma' + \xi) &= \cos^2\sigma' - 2\xi\sin\sigma'\cos\sigma', \\ \cos^4(\sigma' + \xi) &= \cos^4\sigma'; \end{aligned}$$

et comme le développement de l'équation précédente est

$$d\mathrm{U} = d\xi\left[1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda\cos^2(\sigma' + \xi) - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda\cos^4(\sigma' + \xi)\right],$$

on a, en intégrant entre les limites m' et m'', et remarquant que la constante est nulle, vu que U et ξ s'évanouissent en même temps,

$$\mathrm{U} = \xi(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda\cos^2\sigma' - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda\cos^4\sigma') - \tfrac{1}{2}\xi^2(\varepsilon\sin^2\lambda\cos\sigma'\sin\sigma');$$

ensuite, si l'on a égard aux deux dernières relations (6), il vient

$$\mathrm{U} = \xi(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda' - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda') - \tfrac{1}{2}\xi^2\varepsilon\cos\mathrm{V}'\sin\lambda'\cos\lambda';$$

et réciproquement, par le retour des séries,

$$(i') \qquad \xi = \mathrm{U}(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda' + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda') + \tfrac{1}{2}\mathrm{U}^2\varepsilon\cos\mathrm{V}'\sin\lambda'\cos\lambda';$$

d'où

$$\xi^2 = \mathrm{U}^2(1 - \varepsilon\sin^2\lambda'), \quad \xi^3 = \mathrm{U}^3.$$

Actuellement, il s'agit d'obtenir le développement de la latitude λ'' en fonction de λ' et des puissances de l'arc ξ, sur une sphère dont le rayon est b : or, à cet égard, le théorème de Maclaurin donne

$$\lambda'' = \lambda' + \left(\frac{d\lambda''}{d\xi}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda''}{d\xi^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\lambda''}{d\xi^3}\right)\xi^3 + \ldots.$$

Les valeurs des coefficients différentiels des différents ordres étant rapportées au point où $\xi = 0$, on a (art. **195**), en se bornant aux termes de l'ordre ξ^3, et comptant les azimuts V′, V″ du nord à l'est,

$$\lambda'' = \lambda' - \xi\cos V' - \tfrac{1}{2}\xi^2\sin^2 V'\operatorname{tang}\lambda' + \tfrac{1}{2}\xi^3\sin^2 V'\cos V'\left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\lambda'\right);$$

puis mettant dans cette équation, pour ξ sa valeur précédente, l'on a, à l'égard du sphéroïde,

$$(l')\quad \left\{\begin{aligned} \lambda'' = \lambda' &- \mathrm{U}\cos V'\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda' + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda'\right)\\ &- \tfrac{1}{2}\mathrm{U}^2\sin^2 V'\operatorname{tang}\lambda'\left(1 - \varepsilon\sin^2\lambda'\right)\\ &- \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathrm{U}^2\cos^2 V'\sin\lambda'\cos\lambda'\\ &+ \tfrac{1}{2}\mathrm{U}^3\sin^2 V'\cos V'\left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\lambda'\right). \end{aligned}\right.$$

L'azimut V″ se détermine avec la même facilité; car, suivant la notation actuelle, on a

$$V'' = V' + \left(\frac{dV''}{d\xi}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V''}{d\xi^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3V''}{d\xi^3}\right)\xi^3 + \ldots;$$

et par l'article cité,

$$\begin{aligned} V'' = V' &- \xi\sin V'\operatorname{tang}\lambda'\\ &+ \xi^2\sin V'\cos V'\left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\lambda'\right)\\ &- \xi^3\sin V'\cos^2 V'\operatorname{tang}\lambda'\left(1 + \tfrac{4}{3}\operatorname{tang}^2\lambda'\right)\\ &+ \xi^3\sin V'\operatorname{tang}\lambda'\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\lambda'\right); \end{aligned}$$

puis éliminant ξ, il vient, après quelques transformations faciles à effectuer,

$$(m')\quad \left\{\begin{aligned} V'' = V' &- \mathrm{U}\sin V'\operatorname{tang}\lambda'\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda' + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda'\right)\\ &+ \mathrm{U}^2\sin V'\cos V'\left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\lambda' - \varepsilon\operatorname{tang}^2\lambda'\right)\\ &+ \mathrm{U}^3\sin^3 V'\operatorname{tang}\lambda'\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\lambda'\right)\\ &- \mathrm{U}^3\sin V'\cos^2 V'\operatorname{tang}\lambda'\left(\tfrac{5}{6} + \operatorname{tang}^2\lambda'\right) \end{aligned}\right.$$

Quant à la différence en longitude $\varphi = \varphi'' - \varphi'$, elle ne peut être calculée aussi aisément : voici comment l'on parvient à son expression.

Pour décomposer en deux parties, s'il est possible, le second membre de la première équation (c'), soit fait

$$d\varphi = \frac{d\sigma'' \cos\lambda}{1 - \sin^2\lambda \cos^2\sigma''} + \frac{C d\sigma'' \cos\lambda}{a(1 - \sin^2\lambda \cos^2\sigma'')};$$

C étant un coefficient qu'il s'agit de déterminer; et soient égalées entre elles les deux valeurs de $d\varphi$, on trouvera sur-le-champ

$$C = -(a - b)\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda \cos^2\sigma''};$$

ainsi le deuxième terme de la valeur hypothétique de $d\varphi$ prend la forme suivante,

$$-d\sigma'' \cos\lambda \left[\frac{a - b\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda \cos^2\sigma''}}{a(1 - \sin^2\lambda \cos^2\sigma'')}\right],$$

et en multipliant haut et bas par $a + b\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda \cos^2\sigma''}$, puis se rappelant que $a^2 - b^2 = b^2\varepsilon$, on a

$$-\frac{b^2\varepsilon \cos\lambda}{a} \cdot \frac{d\sigma''}{a + b\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda \cos^2\sigma''}};$$

donc la valeur de $d\varphi$ devient

$$d\varphi = \frac{d\sigma'' \cos\lambda}{1 - \sin^2\lambda \cos^2\sigma''} - \frac{b^2\varepsilon \cos\lambda}{a} \cdot \frac{d\sigma''}{a + b\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2\lambda \cos^2\sigma''}}.$$

Enfin prenant l'angle ω'', d'après la formule

$$\tang\omega'' = \frac{\tang\sigma''}{\cos\lambda},$$

donnée par la propriété du triangle sphérique rectangle $pm''a$, et faisant attention qu'à cause de

$$d\omega'' = \frac{d.\tang\omega''}{1 + \tang^2\omega''}, \quad \text{d'où} \quad d\omega'' = \frac{d\sigma'' \cos\lambda}{1 - \sin^2\lambda \cos^2\sigma''},$$

on a

$$(d') \qquad d\varphi = d\omega'' - \frac{b^2\varepsilon\cos\lambda}{a} \cdot \frac{d\sigma''}{a + b\sqrt{1 + \varepsilon\sin^2\lambda\cos^2\sigma''}}.$$

Avant d'intégrer cette équation, il convient de lui faire encore subir une transformation, pour la composer des seules quantités relatives au triangle M'PM'': or, on a, par ce qui précède,

$$a = b\sqrt{1+\varepsilon}, \quad \cos\lambda = \sin V'\cos\lambda' \quad \text{et} \quad \cos\sigma' = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda};$$

donc

$$d\varphi = d\omega'' - \frac{d\xi . \varepsilon\sin V'\cos\lambda'}{2(1+\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon\cos^2\lambda')}$$
$$= d\omega'' - \tfrac{1}{2}d\xi . \varepsilon\sin V'\cos\lambda'(1 - \varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon\cos^2\lambda'),$$

et intégrant entre les limites m' et m'', il vient

$$\varphi'' - \varphi' = \omega'' - \omega' - \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\xi\sin V'\cos\lambda'(1 - \varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon\cos^2\lambda'),$$

$\omega'' - \omega'$ étant la différence en longitude des méridiens pm'', pm' sur une sphère du rayon b. Mais dans ce cas,

$$\omega'' = \omega' + \left(\frac{d\omega''}{d\xi}\right)\xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega''}{d\xi^2}\right)\xi^2 + \tfrac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\omega''}{d\xi^3}\right)\xi^3 + \ldots$$

Ainsi, déterminant la valeur des coefficients différentiels (art. **195**), on obtient, avec un peu d'attention,

$$\omega'' - \omega' = \xi\frac{\sin V'}{\cos\lambda'} - \xi^2\frac{\sin V'\cos V'}{\cos\lambda'} . \operatorname{tang}\lambda'$$
$$+ \tfrac{1}{3}\xi^3\frac{\sin V'\cos^2 V'}{\cos\lambda'}(4\operatorname{tang}^2\lambda' + 1) - \tfrac{1}{3}\xi^3\frac{\sin V'\operatorname{tang}^2\lambda'}{\cos\lambda'};$$

et ensuite

$$\varphi'' - \varphi' = \xi\frac{\sin V'}{\cos\lambda'} - \xi^2\frac{\sin V'\cos V'}{\cos\lambda'} . \operatorname{tang}\lambda'$$
$$- \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi\sin V'\cos\lambda'(1 - \varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon\cos^2\lambda')$$
$$+ \xi^3\frac{\sin V'\cos^2 V'}{\cos\lambda'}(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\lambda')$$
$$- \xi^3\frac{\sin^3 V'}{\cos\lambda'}(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\lambda');$$

enfin si l'on exprime ξ en fonction de U, on aura, toutes réductions faites,

$$(k')\quad \left\{\begin{aligned}(\varphi'' - \varphi')\cos\lambda' &= \mathrm{U}\sin\mathrm{V}'(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2)\\ &- \mathrm{U}^2\sin\mathrm{V}'\cos\mathrm{V}'\,\mathrm{tang}\,\lambda'(1 - \varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon\cos^2\lambda')\\ &+ \mathrm{U}^3\sin\mathrm{V}'\cos^2\mathrm{V}'(\tfrac{1}{3} + \mathrm{tang}^2\lambda')\\ &- \mathrm{U}^3\sin^3\mathrm{V}'(\tfrac{1}{3}\mathrm{tang}^2\lambda').\end{aligned}\right.$$

Ce sont ces formules mêmes que Legendre a publiées dans son Mémoire sur les triangles sphéroïdiques : bien entendu qu'il faudra, dans toutes, faire $\mathrm{U} = \frac{s}{b}r''$, $\mathrm{U}^2 = \frac{s^2}{b^2}r''$, $\mathrm{U}^3 = \frac{s^3}{b^3}r''$, afin d'avoir en secondes, les termes où ces quantités entrent comme facteurs. On juge, à leur inspection, de l'influence de l'excentricité de la Terre sur les quantités qui en dérivent, en y mettant pour ε sa valeur $\frac{e^2}{1-e^2} = e^2\frac{a^2}{b^2}$ (art. **167**); et elles mettent à même de pouvoir apprécier en outre le degré d'exactitude des formules (a'), (b'), (c') des art. **192** et **193**; mais comme elles entraînent dans de longs calculs, nous allons leur faire subir des transformations qui auront le double avantage de les rendre d'une application beaucoup plus facile, et de prouver que celles de l'article cité, que nous avons déduites de considérations moins rigoureuses, leur sont identiques.

Simplification des formules géodésiques précédentes.

367. D'abord, pour nous conformer à la notation de l'art. **192**, nous nommerons λ, λ' les latitudes réduites des extrémités de la ligne géodésique K, et nous désignerons par Z l'azimut de cette ligne, compté du sud à l'ouest sur l'horizon du point dont H est la latitude vraie et λ sa latitude réduite. Alors la série précédente (l') donnera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\lambda' - \lambda = &- \frac{\mathrm{K}}{r}\cos\mathrm{Z} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{K}^2}{r^2}\sin^2\mathrm{Z}\,\mathrm{tang}\,\lambda\\ &- \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\mathrm{K}^2}{b^2}\cos^2\mathrm{Z}\sin\lambda\cos\lambda\\ &+ \frac{1}{6}\frac{\mathrm{K}^3}{b^3}\sin^2\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z}(1+3\,\mathrm{tang}^2\lambda)\ldots,\end{aligned}\right.$$

en faisant d'ailleurs

$$r = b\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 \lambda},$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 \lambda + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4 \lambda \ldots\right).$$

Ensuite, pour en éliminer les latitudes réduites, on tirera des relations

$$\tang \lambda = \frac{b}{a}\tang \mathrm{H}, \quad \tang \lambda' = \frac{b}{a}\tang \mathrm{H}',$$

cette série régulière et très-convergente (art. 95)

$$(2) \quad \mathrm{H}' - \mathrm{H} = \lambda' - \lambda + m(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda) + \tfrac{1}{2}m^2(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + \ldots,$$

dans laquelle $m = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 \ldots$; $e^2 = \varepsilon \frac{b^2}{a^2}$ étant, comme l'on sait, l'excentricité des méridiens. Ces mêmes relations donnant ces valeurs approchées,

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \sin \mathrm{H}\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 \mathrm{H}\right), \\ \cos \lambda &= \cos \mathrm{H}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 \mathrm{H}\right), \\ \tang \lambda &= \tang \mathrm{H}\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4\right), \end{aligned}$$

il s'ensuit que l'on aura

$$\begin{aligned} \sin 2\lambda &= \sin 2\mathrm{H}\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 + e^2 \sin^2 \mathrm{H}\right), \\ \cos 2\lambda &= 1 - 2\sin^2 \mathrm{H}\left(1 - e^2 + e^2 \sin^2 \mathrm{H}\right), \\ \cos 4\lambda &= 1 - 8\sin^2 \mathrm{H}\cos^2 \mathrm{H}, \end{aligned}$$

en ne tenant compte toutefois que des termes du premier ordre en ε.

D'un autre côté, la valeur ci-dessus de r étant développée au même degré d'approximation, l'on a

$$r = a\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 \lambda\right),$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 \mathrm{H}\right),$$

puisque $\sin^2 \lambda = \sin^2 \mathrm{H}(1 - e^2 + e^2 \sin^2 \mathrm{H})$. Ainsi la série (1) donnera

sur-le-champ

$$\lambda' = \lambda - \frac{K}{a}\cos Z(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H) - \tfrac{1}{2}\frac{K}{a^2}\sin^2 Z \operatorname{tang} H,$$

en n'ayant toujours égard qu'aux termes du premier ordre.

Maintenant, si l'on prend le sinus du double de cette valeur approchée de λ', et que pour abréger l'on fasse $\lambda' = \lambda - Q$, on aura

$$\sin 2\lambda' = \sin 2\lambda - \frac{K^2}{a^2}\cos^2 Z \sin 2\lambda - 2Q\cos 2\lambda.$$

Par un procédé semblable on obtiendra

$$\sin 4\lambda' = \sin 4\lambda - 4\frac{K}{a}\cos Z\cos 4\lambda.$$

Ces dernières valeurs et les précédentes étant introduites dans (2), et l'approximation étant poussée jusqu'aux quantités du troisième ordre inclusivement, on aura pour le deuxième terme

$$\begin{aligned} &m(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda)\\ &= -2m\frac{K}{a}\cos Z(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - 2\sin^2 H + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H - e^2\sin^4 H)\\ &\quad - m\frac{K^2}{a^2}\sin^2 Z\operatorname{tang} H(1 - 2\sin^2 H) - 2m\frac{K^2}{a^2}\cos^2 Z\sin H\cos H,\end{aligned}$$

et le troisième terme, à cause de la valeur ci-dessus de $\sin 4\lambda'$, prendra cette forme :

$$\tfrac{1}{2}m^2(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) = -2m^2\frac{K}{a}\cos Z(1 - 8\sin^2 H\cos^2 H).$$

Enfin, mettant pour m et m^2 leurs valeurs, la série (2) se changera en cette autre :

$$\begin{aligned} H' - H = &-\frac{K}{a}\cos Z(1 + e^2 + e^4 - \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 H - \tfrac{3}{2}e^4\sin^2 H + \tfrac{3}{8}e^4\sin^4 H)\\ &- \tfrac{1}{2}\frac{K^2}{a^2}\sin^2 Z\operatorname{tang} H(1 + e^2 - 2e^2\sin^2 H) - \tfrac{3}{2}e^2\frac{K^2}{a^2}\cos^2 Z\sin 2H\\ &+ \tfrac{1}{6}\frac{K^3}{a^3}\sin^2 Z\cos Z(1 + 3\operatorname{tang}^2 H).\end{aligned}$$

Sous cette forme la différence des latitudes H′, H est sans doute fort compliquée; mais si l'on a égard à ce que la normale N au point H, et le rayon ρ de courbure du méridien au même point donnent respectivement

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = a(1+\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H+\tfrac{3}{8}e^4\sin^4 H\ldots),\quad \rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\rho = a(1-e^2+\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 H-\tfrac{3}{2}e^4\sin^2 H+\tfrac{15}{8}e^4\sin^4 H\ldots),$$

la série (3) se changera en celle-ci :

$$(3)\quad \begin{cases} H'-H = -\dfrac{K}{\rho}\cos Z - \tfrac{1}{2}\dfrac{K^2}{N\rho}\sin^2 Z\,\text{tang}\,H \\ \qquad -\tfrac{3}{2}e^2\dfrac{K^2}{N^2}\cos^2 Z\sin H\cos H \\ \qquad -\tfrac{1}{6}\dfrac{K^3}{N^3}\sin^2 Z\cos Z(1+3\,\text{tang}^2 H)\ldots \end{cases}$$

Cette formule, tout à fait semblable à celle (1), s'évaluera assez promptement à l'aide d'une table des log. de N et de ρ. Elle prend une forme encore plus simple en multipliant et divisant à la fois le premier terme par le rayon de courbure du méridien correspondant au milieu de l'arc H′ — H; c'est-à-dire, par

$$R = a(1-e^2)[1-e^2\sin^2\tfrac{1}{2}(H+H')]^{-\frac{3}{2}}.$$

En effet, si l'on pose $H'-H=\delta H$, on aura

$$\tfrac{1}{2}(H+H') = H+\tfrac{1}{2}\delta H,$$

et comme δH est du même ordre que la ligne géodésique K ou que l'aplatissement de la terre, la valeur finie de R étant développée en série deviendra, à cause de

$$\sin^2(H+\tfrac{1}{2}\delta H) = \sin^2 H + \delta H\sin H\cos H;$$

cette valeur, disons-nous, sera

$$\frac{R}{\rho} = 1-\tfrac{3}{2}e^2\frac{K}{a}\cos Z\sin H\cos H,$$

et par conséquent l'on aura à très-peu près

$$\frac{K}{\rho}\cos Z = \frac{K}{R}\cos Z - \tfrac{3}{2}e^2\frac{K^2}{N^2}\cos^2 Z \sin H \cos H;$$

ainsi, en définitive,

$$(4)\quad \begin{cases} H' - H = -\frac{K}{R}\cos Z - \frac{1}{2}\frac{K^2}{RN}\sin^2 Z \operatorname{tang} H \\ \qquad + \frac{1}{6}\frac{K^3}{RN^2}\sin^2 Z \cos Z\,(1 + 3\operatorname{tang}^2 H), \end{cases}$$

expression qu'il faudrait diviser par $\sin 1''$ pour l'avoir en secondes de degré.

Il est évident maintenant que si l'on supprime dans le dénominateur de chaque terme le facteur R, cette formule se rapportera précisément à une sphère du rayon N, et donnera en unités métriques, avec toute la précision désirable, la distance des parallèles des extrémités du côté K, ce côté eût-il plus d'un degré et demi d'amplitude; propriété à laquelle on peut sans doute arriver par une voie plus élémentaire, mais dont la démonstration, pour être rigoureuse, paraît devoir reposer essentiellement sur la considération de la ligne la plus courte entre deux points quelconques de la surface de l'ellipsoïde de révolution.

Il est à remarquer que cette distance des parallèles se calculerait aussi à l'aide d'une formule plus simple, déduite de l'une des analogies de Neper, si l'on connaissait les azimuts respectifs Z, Z' des extrémités de K. En effet, dans le triangle sphérique a, b, c, nous considérerons l'angle C opposé au côté c, comme le pôle de la Terre; et comme ce triangle donne

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

on aura, en employant la notation géodésique ordinaire,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(dM) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}K\,\frac{\sin\frac{1}{2}(Z'+Z)}{\sin\frac{1}{2}(Z'-Z)},$$

puisque

$$A = 180^\circ - Z,\quad B = Z' - 180^\circ,\quad \text{et}\quad (a-b) = H' - H = dH.$$

Réduisant en série, puis substituant les arcs à leurs tangentes, on trouvera sans difficulté, sur une sphère du rayon N,

$$dM = \frac{K \sin\frac{1}{2}(Z'+Z)}{\sin\frac{1}{2}(Z'-Z)}\left[1 - \frac{1}{12}\frac{K^2}{N^2}\frac{\sin Z' \sin Z}{\sin^2\frac{1}{2}(Z'-Z)} \cdots\right]$$

Cherchons pour exemple la distance méridienne de Campvey à Désierto (*Pl.* X, tome I) sachant, (art. **201**) que le log K de ces deux points est, en mètres, $\log K = 5{,}2065667$;

qu'à Campvey $Z = 150^c{,}5306.4$,
qu'à Désierto $Z' = 349^c{,}5940.8$,

et enfin qu'à la latitude moyenne 44^c, on a $\log N = 6.8051869$.

Cela posé, la formule ci-dessus donnera en toises

1er terme.		2e terme.	
$\log K =$	5,2065667	$\log$ 1er terme	4,76667
	9,7101800	$\log \frac{1}{12} =$	8,92082 −
$\mathrm{l.}\sin\frac{1}{2}(Z+Z') =$	9,8499099	$\log K^2 =$	0,41313
$\mathrm{c.\,l.}\sin\frac{1}{2}(Z'-Z) =$	0,0000118	$\mathrm{l.}\sin Z' =$	9,85223 −
log 1er terme =	4,7666684	$\mathrm{l.}\sin Z =$	9,84583
1er terme	58434T,64	$2\,\mathrm{c.}\log N =$	6,38964
2e terme	1 ,54	$2\,\mathrm{c.\,l.}\sin\frac{1}{2}(Z'-Z) =$	0,00002
distance méridienne	58436 ,18	l. 2e terme =	0,18834 +

et c'est précisément ce qu'il fallait trouver.

Cette formule très-exacte est donc une de celles qu'on pourra encore employer pour la rectification d'un arc de méridien. Enfin elle donnerait la différence des latitudes des extrémités de K en multipliant par $\frac{1}{R \sin 1''}$ le second membre.

La formule (4) pouvant s'écrire de la sorte :

$$H' - H = -\frac{K}{N}\frac{\cos Z}{\sin 1''}\cdot\frac{N}{R} - \frac{1}{2}\frac{K^2}{N^2}\frac{\sin^2 Z}{\sin 1''}\operatorname{tang} H\cdot\frac{N}{R}$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{K^3}{N^3}\frac{\sin^2 Z \cos Z}{\sin 1''}(1 + 3\operatorname{tang}^2 H)\cdot\frac{N}{R},$$

il s'ensuit qu'un triangle formé par deux méridiens elliptiques et un arc de plus courte distance peut se résoudre, dans tous les cas pratiques, comme un triangle sphérique de même espèce. En d'autres termes, on a ce théorème : *La différence de latitude des sommets d'un triangle géodésique sur le sphéroïde terrestre est à leur différence de latitude sur une sphère dont le rayon est égal à la normale correspondante terminée au petit axe, comme cette normale est au rayon de courbure de l'arc de méridien intercepté.*

On observera en outre que, puisqu'il faut multiplier par $\frac{N}{R}$ la valeur de $H' - H$ calculée sur une sphère du rayon N pour l'avoir sur le sphéroïde, il est nécessaire d'évaluer ce facteur soit à l'aide de la table dont nous avons déjà parlé (art. **198**), soit en recourant à cette série trouvée (art. **195**),

$$\frac{N}{R} = 1 + e^2 \cos^2 H + e^4 \cos^2 H + \tfrac{3}{2} e^2 \frac{K}{N} \cos Z \sin H \cos H \ldots$$

Mais comme ordinairement l'on suppose seulement $\frac{N}{R} = 1 + e^2 \cos^2 H$, les différences $H' - H$, qui dérivent de cette hypothèse, doivent être multipliées derechef par les deux autres termes $e^4 \cos^2 H +$ etc., afin qu'aucune quantité du troisième ordre ne soit omise dans cette évaluation (*).

Passons maintenant à la formule qui donne la différence en longitude des extrémités de la ligne géodésique K en fonction des mêmes éléments H, K et Z.

(*) La normale N et le rayon de courbure ρ du méridien, à la latitude H, lorsque l'on fait, comme à l'art. 362, $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \varepsilon$, ont respectivement pour expression

$$N = \frac{a^2}{b(1 + \varepsilon \cos^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho = \frac{b(1+\varepsilon)}{(1 + \varepsilon \cos^2 H)^{\frac{3}{2}}},$$

ainsi qu'il est aisé de le démontrer. Telles sont les formes sous lesquelles ces lignes entrent dans les calculs de la *Mécanique céleste.*

Si l'on désigne par p, p' les longitudes des extrémités de K, on aura

$$p'-p=\frac{K}{a}\frac{\sin Z}{\cos\lambda}-\frac{K^2}{br}\frac{\sin Z\cos Z}{\cos\lambda}\operatorname{tang}\lambda$$
$$+\frac{K^3}{b^3}\frac{\sin Z\cos^2 Z}{\cos\lambda}\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{tang}^2\lambda\right)-\frac{K^3}{b^3}\frac{\sin^3 Z}{\cos\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\lambda\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et si à la place de ε, λ et b on met leurs valeurs en fonctions de e^2, H et a, et qu'on effectue les développements qui se présenteront, en ayant soin de les prolonger jusqu'aux termes du troisième ordre, il viendra

$$(5)\quad \begin{cases} p'-p=\dfrac{K}{N}\dfrac{\sin Z}{\cos H}-\dfrac{1}{2}\dfrac{K^2}{N^2}\dfrac{\sin 2Z}{\cos H}\operatorname{tang} H \\ \quad +\dfrac{1}{3}\dfrac{K^3}{N^3}\dfrac{\sin Z\cos^2 Z}{\cos H}(1+3\operatorname{tang}^2 H)-\dfrac{1}{3}\dfrac{K^3}{N^3}\dfrac{\sin^3 Z}{\cos H}\operatorname{tang}^2 H. \end{cases}$$

Ce résultat nous apprend que l'angle au pôle, formé par deux méridiens elliptiques, peut se calculer comme sur une sphère du rayon N, lorsque l'on connaît la ligne géodésique K, la latitude H et l'azimut Z. Quoiqu'il renferme des facteurs communs avec ceux de la série par laquelle on calcule la différence de latitude H' — H, il est très-avantageux dans la pratique de le remplacer par cette série :

$$(6)\qquad p'-p=\frac{K}{N'}\frac{\sin Z}{\cos H'}-\frac{1}{6}\frac{K^3}{N'^3}\frac{\sin Z}{\cos H'}+\frac{1}{6}\frac{K^3}{N'^3}\frac{\sin^3 Z}{\cos^3 H'}\ldots,$$

dans laquelle N' est la normale à la latitude H'. La démonstration élémentaire que nous en avons donnée tome I, page 391, peut se déduire des principes de la trigonométrie sphéroïdique, ainsi qu'il suit :

En vertu du théorème précédent, on a

$$\sin(p'-p)=\frac{\sin u\sin Z}{\cos h'},$$

lorsqu'on fait $u=\frac{K}{N}$ et $H'=h'+\psi$, ψ étant la correction due à l'ellipticité des méridiens terrestres, et dont la valeur approchée est, d'après ce qui précède,

$$\psi=e^2\,\delta H\cos^2 H=-e^2\frac{K}{N}\cos Z\cos^2 H.$$

(Nous l'affectons du signe négatif, parce que l'azimut Z est supposé aigu dans toutes nos formules, et qu'alors $H' < h'$).

On remarquera d'abord que l'on a

$$p' - p = \sin(p' - p) + \tfrac{1}{6}\sin^3(p' - p)\ldots.$$

et que si l'on y substitue pour $\sin u$ sa valeur en série, il viendra

$$(6')\qquad p' - p = u\frac{\sin Z}{\cos h'} - \tfrac{1}{6}u^3\frac{\sin Z}{\cos h'} + \tfrac{1}{6}u^3\frac{\sin^3 Z}{\cos^3 h'}\ldots;$$

mais, à cause de $h' = H' - \psi$, on a, à un degré d'approximation suffisant,

$$\cos h' = \cos H' \cos\psi + \sin H' \sin\psi = \cos H' - e^2\frac{K}{N}\cos Z \sin H \cos^2 H;$$

ainsi, à très-peu près,

$$\frac{1}{\cos h'} = \frac{1}{\cos H'}\left(1 + e^2\frac{K}{N}\cos Z \sin H \cos H\right).$$

D'un autre côté, si N et N' désignent les normales aux points H et H', on aura, sans erreur sensible,

$$N = a(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H),\quad N' = a(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H');$$

et comme généralement $H' = H + \delta H$, il s'ensuit qu'au même degré d'approximation,

$$\frac{N}{N'} = 1 - e^2\delta H \sin H \cos H = 1 + e^2\frac{K}{N}\cos Z \sin H \cos H,$$

puisque d'ailleurs, Z étant supposé aigu et compté du sud à l'ouest, la différence de latitude δH est nécessairement négative; par conséquent

$$\frac{1}{\cos h'} = \frac{1}{\cos H'}\cdot\frac{N}{N'}.$$

Enfin, à cause de $u = \frac{K}{N}$, la série (6') se changera en celle (6), en mettant toutefois N'^2 au lieu de N^2 dans un des termes du troisième ordre, ce qui est évidemment permis.

Il est à remarquer cependant que, les deux termes du troisième ordre

étant toujours de signes contraires et forts petits, on peut le plus souvent en faire abstraction dans le calcul ordinaire de la différence de longitude. On a donc alors simplement, et en secondes de degré,

$$p' - p = \frac{K}{N'} \frac{\sin Z}{\cos H' \sin 1''};$$

on peut même changer N′ en N, puisque, dans la pratique, la différence des latitudes H, H′ est toujours très-petite: c'est ce que nous avons fait (art. **199**).

La formule (6), en privant chacun de ses termes du facteur $N' \cos H'$, donnerait en mesures métriques, et à la latitude H′, la longueur d'un arc de parallèle intercepté entre les méridiens de la ligne géodésique K. (*Voyez* tome I, page 350).

Il nous reste, pour compléter la résolution du triangle sphéroïdique obliquangle, à considérer la différence des azimuts Z, Z′. Or on a

$$Z' - Z = V' - V + 180^\circ \quad (\textit{fig. } 29),$$

et la différence V′ — V est donnée par cette série

$$\begin{aligned} V' - V = & -\frac{K}{r} \sin Z \operatorname{tang} \lambda + \tfrac{1}{2} \frac{K^2}{b^2} \sin Z \cos Z (1 + 2 \operatorname{tang}^2 \lambda) \\ & - \varepsilon \frac{K^2}{b^2} \sin Z \cos Z \operatorname{tang}^2 \lambda + \frac{K^3}{b^3} \sin^3 Z \operatorname{tang} \lambda \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^2 \lambda\right) \\ & - \frac{K^3}{b^3} \sin Z \cos^2 Z \operatorname{tang} \lambda \left(\tfrac{5}{6} + \operatorname{tang}^2 \lambda\right). \end{aligned}$$

Substituant, comme précédemment, à la latitude réduite la latitude vraie, éliminant r et b, et faisant attention à la valeur précédente de $p' - p$, on parviendra en définitive à cette expression plus simple, dont nous croyons pouvoir garantir l'exactitude (*):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} Z' - Z = 180^\circ & - (p' - p) \sin H + \tfrac{1}{4} \frac{K^2}{N^2} \sin 2Z (1 + e^2 \cos^2 H) \\ & - \tfrac{1}{2} \frac{K^3}{N^3} \sin Z \cos^2 Z \operatorname{tang} H + \tfrac{1}{6} \frac{K^3}{N^3} \sin^3 Z \operatorname{tang} H. \end{aligned} \right.$$

(*) La valeur de r employée ici n'est pas celle du rayon de l'ellipsoïde correspondant

Bien entendu qu'il faut diviser par sin 1″ tous les termes du deuxième et du troisième ordre.

Il suit de là que la différence en longitude des extrémités d'une grande ligne géodésique, calculée sur une sphère du rayon N, est très-exacte, et que la différence des azimuts de cette ligne aux mêmes extrémités, déterminée sur la même sphère, n'a besoin que d'être augmentée algébriquement du très-petit terme $\frac{1}{4}\frac{K^2}{N^2}e^2 \sin 2Z \cos^2 H$, pour appartenir aussi à l'ellipsoïde de révolution sur lequel les triangles sont projetés. Ainsi la correction la plus importante à faire aux coordonnées géographiques d'un réseau de triangles de l'ordre de ceux d'Espagne, calculées par les formules en usage, ne porte réellement que sur les grandes différences de latitude; encore est-elle très-faible, pour le triangle dont les sommets sont *Campvey, Mongò, Desierto* (art. 154).

Les différences d'azimuts peuvent aussi être déterminées plus simplement que par la dernière formule ci-dessus : voici comment.

Considérons d'abord le triangle sphérique correspondant au triangle sphéroïdique : ses trois côtés seront, d'après ce qui précède, K, $90^\circ - H$ et $90^\circ - h'$, et les trois angles respectivement opposés, $p' - p$, $Z' - 180^\circ$ et $180^\circ - Z$. Or, par une des analogies de Néper, qui donne la tangente de la demi-somme de deux angles, on a

$$\operatorname{tang}\left[90^\circ - \tfrac{1}{2}(Z' - Z)\right] = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p' - p)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(H + h')}{\cos\frac{1}{2}(H - h')},$$

expression dans laquelle

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(H + h')}{\cos\frac{1}{2}(H - h')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(H + H' + \psi)}{\cos\frac{1}{2}(H - H' - \psi)},$$

en attribuant à l'angle ψ la même signification qu'à la p. 330; angle qui doit être ici pris positivement, parce que, l'azimut Z étant aigu, on a $h' > H'$. Si l'on développe le second membre de cette expression, on

---

au point dont la latitude réduite est λ; car, en appelant $r^{(1)}$ ce rayon, l'on a exactement, comme l'on sait,

$$r^{(1)} = a\sqrt{1 - e^2 \sin\lambda} = a\sqrt{\frac{1 - e^2(2 - e^2)\sin^2 H}{1 - e^2 \sin^2 H}}.$$

aura d'une manière suffisamment approchée

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}'+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{H}'-\psi)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{H}')} + \tang\frac{1}{2}\psi\cos\mathrm{H},$$

et, à cause de $\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}e^2\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}}\cos\mathrm{Z}\cos^2\mathrm{H}$, la formule finie ci-dessus deviendra

$$\tang[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z})] = \tang\tfrac{1}{2}(p'-p)\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{H})} + \tfrac{1}{4}e^2\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{N}^2}\sin\mathrm{Z}\cos\mathrm{Z}\cos^2\mathrm{H}.$$

Telle est l'équation qui, relativement à la sphère, donnerait en fonction des latitudes vraies la différence des azimuts des extrémités de la ligne géodésique; mais, vu la petitesse de l'angle $p'-p$, même dans le plus grand triangle d'Espagne, la valeur suffisamment exacte de cette différence serait

$$\mathrm{Z}'-\mathrm{Z} = 180^\circ - (p'-p)\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{H}')} - \tfrac{1}{4}e^2\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{N}^2}\sin 2\mathrm{Z}\cos^2\mathrm{H},$$

à quoi il faudrait ajouter le même terme en e^2, conformément à ce qui a été dit précédemment, afin d'avoir la différence d'azimut sur le sphéroïde. On a donc enfin

$$(8) \qquad \mathrm{Z}'-\mathrm{Z} = 180^\circ - (p'-p)\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{H}')}.$$

C'est effectivement par cette formule que les azimuts de tous les côtés de la méridienne de Dunkerque ont été calculés au Dépôt de la Guerre. Comme elle est fonction de la différence de longitude et des latitudes des extrémités du côté K, on pourrait en désirer une qui dépendît seulement de ce côté, de l'azimut Z et de la latitude H' : or, à cause de

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' + u\cos\mathrm{Z} + \tfrac{1}{2}u^2\sin^2\mathrm{Z}\tang\mathrm{H} \quad \text{(art. 193)},$$

on a, en s'arrêtant aux termes du premier ordre,

$$\tang\mathrm{H} = \tang\mathrm{H}' + u\cos\mathrm{Z} + u\cos\mathrm{Z}\tang^2\mathrm{H}'.$$

Substituant cette valeur dans la formule (c) du même art., en y conservant les termes du deuxième ordre, et réduisant, il vient

$$Z' - Z = 200^{\circ} - u \sin Z \operatorname{tang} H' - \tfrac{1}{2} u^{2} \sin Z \cos Z \sin 1'',$$

lorsque $u = \frac{K}{N}$ est réduit en secondes.

Voilà, sur la résolution des grands triangles géodésiques par la voie la plus directe et la plus simple, des remarques qui, ce nous semble, éclaircissent complétement ce qu'elle pouvait laisser d'obscur, même après ce qu'ont écrit, dans ces derniers temps, plusieurs géomètres que ce sujet a intéressés.

Du triangle dont les côtés sont très-petits par rapport aux dimensions du sphéroïde.

368. Il reste une question importante à examiner pour compléter l'analyse précédente : c'est de savoir si les triangles sphéroïdiques, dont les côtés sont très-petits à l'égard des dimensions du sphéroïde, peuvent être résolus par les mêmes règles que celles qui s'appliquent aux triangles sphériques, ou s'ils exigent une méthode toute particulière.

Soit MM'M'' (*fig.* 30) un triangle sphéroïdique dont les côtés sont supposés fort petits relativement aux axes de l'ellipsoïde de révolution. Désignons par λ, λ', λ'' les latitudes réduites des points M, M', M''; par A', A'' les azimuts des côtés MM', MM'' par rapport au méridien PM. Enfin, soient le côté $MM' = bU'$ et le côté $MM'' = bU''$; b étant toujours le rayon du pôle.

Cela posé, il s'agit d'abord de déterminer la position des points M', M'' d'après ces cinq données, savoir : λ, bU', bU'', A', A''.

Or on a, en vertu de la formule (l'), les deux valeurs

$$\begin{aligned}\lambda' = \lambda & - U' \cos A' \left(1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin^{2} \lambda + \tfrac{3}{8} \varepsilon^{2} \sin^{4} \lambda\right) \\ & - \tfrac{1}{2} U'^{2} \sin^{2} A' \operatorname{tang} \lambda \left(1 - \varepsilon \sin^{2} \lambda\right) \\ & - \tfrac{1}{2} \varepsilon U'^{2} \cos^{2} A' \sin \lambda \cos \lambda \\ & + \tfrac{1}{2} U'^{3} \sin^{2} A' \cos A' \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^{2} \lambda\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda'' = \lambda & - U''\cos A''\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\lambda + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^4\lambda\right)\\ & - \tfrac{1}{2}U''^2\sin^2 A''\operatorname{tang}\lambda\,(1-\varepsilon\sin^2\lambda)\\ & - \tfrac{1}{2}\varepsilon U''^2\cos^2 A''\sin\lambda\cos\lambda\\ & + \tfrac{1}{2}U''^3\sin^2 A''\cos A''\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{tang}^2\lambda\right).\end{aligned}$$

D'un autre côté, la formule (k') donnant la différence de longitude de deux points, tels que M, M', on aura évidemment, en désignant par $\Delta\varphi$ la différence M'PM'',

$$\begin{aligned}\Delta\varphi\cos\lambda = & \left(U'\sin A' - U''\sin A''\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\right)\\ & + \left(U''^2\sin A''\cos A'' - U'^2\sin A'\cos A'\right)\operatorname{tang}\lambda\left(1-\varepsilon+\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos^2\lambda\right)\\ & + \left(U'^2\sin A'\cos^2 A' - U''^2\sin A''\cos^2 A''\right).\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{tang}^2\lambda\right)\\ & + \left(U''^2\sin^3 A'' - U'^2\sin^3 A'\right).\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\lambda\right).\end{aligned}$$

Les trois quantités λ', λ'' et $\Delta\varphi$ se trouvant maintenant déterminées, on tirera des deux équations (l') (k') les valeurs de $U\cos V' = x'$, $U\sin V' = y'$, développées jusqu'aux termes du troisième ordre inclusivement, et l'on aura définitivement la longueur $bU = b\sqrt{x'^2+y'^2}$ du troisième côté M'M'' du triangle proposé, puis $\operatorname{tang} V = \frac{y'}{x'}$. C'est ainsi que Legendre résout cette question; mais l'analyse de l'article précédent exigerait évidemment bien moins de calculs, sans nuire à la précision des résultats numériques.

369. Si l'on considère maintenant un triangle rectiligne $mm'm''$, dont les côtés seraient égaux à ceux du triangle sphéroïdique MM'M'', l'angle M de celui-ci sera égal à $A' - A''$; et dans le triangle rectiligne, l'angle m correspondant sera égal à $M - z$; z étant une inconnue qu'il faut déterminer, et qui est nécessairement fort petite. Or, d'après la notation ci-dessus, on a

$$\cos(M-z) = \frac{U'^2 + U''^2 - U^2}{2U'U''};$$

ou bien, à cause de la petitesse de z, il vient, en développant et s'arrêtant aux quantités du second ordre,

$$z\sin M - \tfrac{1}{2}z^2\cos M = \frac{U'^2 + U''^2 - 2U'U''\cos M - U^2}{2U'U''};$$

équation dans laquelle il ne s'agit plus que de substituer pour U^2 sa valeur déduite, comme on vient de le dire, des formules (l'), (k') de

l'art. **366**. Mais le développement de cette valeur, poussé jusqu'aux quantités du quatrième ordre, étant fort long et exigeant beaucoup d'adresse analytique, nous nous bornerons à faire remarquer que l'on obtiendrait

$$U^2 = U'^2 + U''^2 - 2U'U'' \cos M - \tfrac{1}{3} U'^2 U''^2 \sin^2 M;$$

de là

$$z \sin M - \tfrac{1}{2} z^2 \cos M = \tfrac{1}{6} U'U'' \sin^2 M;$$

et ensuite

$$z = \tfrac{1}{6} U'U'' \sin M + \tfrac{1}{72} U'^2 U''^2 \sin M \cos M,$$

ou simplement

$$z = \tfrac{1}{6} U'U'' \sin M;$$

vu que le second terme $\frac{1}{72} U'^2 U''^2 \sin M \cos M$, qui est du quatrième ordre, supposerait que les termes du sixième ordre ont été conservés dans la valeur de U^2. (*Voyez* le *Mémoire de Legendre.*)

Il résulte de là que la valeur de z est égale au tiers de l'aire du triangle sphéroïdique, et qu'elle doit être exacte, aux quantités près du troisième ordre. Ainsi les triangles de cette espèce, dont les côtés auraient pour amplitude un degré ou même plus, peuvent se calculer comme les petits triangles tracés sur la surface de la sphère. Ce principe est même applicable à tous les triangles géodésiques qui seraient formés sur une surface peu différente d'une sphère; car, comme l'observe Legendre, « on peut supposer qu'une telle surface se confond » sensiblement dans la portion occupée par le triangle que l'on con- » sidère, avec un sphéroïde elliptique disposé de manière que les sec- » tions verticales de plus grande et de moindre courbure, qui se » coupent toujours à angles droits dans un solide (art. **187**), se con- » fondent avec les sections semblables et de rayons égaux dans l'autre » solide. Alors le triangle commun aux deux surfaces jouira de la » même propriété que les triangles sphériques. »

Nous pourrions suivre une méthode analogue à celle de l'art. **365**, pour résoudre les différents cas des triangles sphéroïdiques quelconques, dont deux côtés seraient des arcs de méridiens; mais, les solutions précédentes étant déjà plus que suffisantes dans la pratique, nous terminerons cette matière, sur laquelle on peut d'ailleurs consulter notre *Essai de Trigonométrie sphéroïdique*, inséré dans le tome X des *Mémoires de l'Institut* (année 1830).

CHAPITRE II.

DE LA FIGURE DE LA TERRE, DÉDUITE DE LA COMPARAISON DES MESURES GÉODÉSIQUES.

370. Nous avons dit, conformément à la théorie newtonienne (art. **167**), que la Terre, assimilée à une masse fluide homogène dont les molécules s'attirent réciproquement aux carrés des distances, a dû, en vertu de son mouvement de rotation sur elle-même, et par l'effet de la force centrifuge, s'écarter de la figure sphérique qu'elle avait probablement à l'origine de ce mouvement, en se renflant à l'équateur et s'aplatissant aux pôles, et affecter la forme ellipsoïdale. Pour en donner la preuve, Huygens, dans son traité *de Causa gravitatis*, suppose la pesanteur partout constante et toujours dirigée au centre; puis il imagine un siphon composé de deux branches rectangulaires et contenant un fluide homogène, l'une ayant son axe sur celui de rotation de la Terre, l'autre l'ayant dans le plan de l'équateur. Alors, celle-ci décrivant ce plan dans l'intervalle de 24 heures sidérales, la colonne fluide qu'elle renferme, et qui devient moins pesante à cause de la force centrifuge qui l'anime, doit s'allonger aux dépens de l'autre, jusqu'à ce qu'elle lui fasse équilibre. Ainsi le rayon de l'équateur excède celui du pôle, et le calcul fait voir que l'aplatissement est alors de $\frac{1}{578}$; mais cet aplatissement est trop petit, et celui de $\frac{1}{230}$ trouvé par Newton est trop grand, ainsi qu'il résulte de la supposition plus admissible que la densité des couches terrestres croît de la surface vers le centre de la masse. (*Exposit. du Syst. du Monde*, 6ᵉ édit. page 252.)

On peut d'ailleurs vérifier l'hypothèse de l'homogénéité de la Terre, soit en comparant les longueurs des degrés des méridiens pour savoir si leur irrégularité s'accorde avec l'aplatissement résultant de cette hypo-

thèse, soit en mesurant, à l'aide du pendule à secondes, l'accroissement de la pesanteur depuis l'équateur jusqu'aux pôles. Occupons-nous du premier moyen plus particulièrement que nous ne l'avons fait dans le troisième livre, et employons toujours dans nos calculs les mesures les plus accréditées, afin de donner plus de poids aux conséquences que nous en déduirons.

Si la Terre était parfaitement sphérique, tous les degrés des méridiens seraient égaux; mais, quels que soient leurs rapports entre eux, il est évident que si, à un point quelconque de la surface terrestre, on mesure la hauteur méridienne d'une étoile, et qu'après s'être avancé vers le pôle élevé, sur le méridien de la première station, l'on mesure encore la hauteur de la même étoile lors de sa culmination, l'arc parcouru sera d'un degré, en supposant que la différence des hauteurs méridiennes de l'étoile soit elle-même d'un degré. A la rigueur, l'angle formé par les verticales des deux stations, ou l'*amplitude* de l'arc intercepté, est égale à la différence des hauteurs méridiennes, moins l'angle sous lequel on verrait du centre de l'étoile l'arc parcouru; mais nous avons dit (art. **23**) que cet angle est insensible.

Afin de n'avoir aucun doute à cet égard, soient AC la verticale (*fig.* 31) et AH l'horizon de A; soient pareillement BC la verticale, et BH' l'horizon de B. Cela posé, la hauteur méridienne de l'étoile E sur l'horizon de A sera représentée par l'angle EAH $= h$; la hauteur de cette étoile sur l'horizon de B sera de même représentée par l'angle EBH$=h'$. Or l'angle C a pour mesure l'arc AB; et comme les angles HAB, HBA sont égaux, et qu'ils ont chacun pour mesure $\frac{1}{2}$ arc AB, il s'ensuit que HAB + HBA = C. Donc les trois angles du triangle EAB ou $2^q = E + h + (2^q - h') + C$, donc enfin $C = h' - h - E$.

371. Nous avons fait voir, dans les chapitres précédents, comment on détermine rigoureusement, par la Trigonométrie, la longueur d'un arc de plus courte distance compris entre deux points de la surface terrestre, quelle que soit sa direction par rapport à une méridienne. Nous avons en outre exposé les méthodes des astronomes pour observer avec précision tant les azimuts des extrémités de cet arc que son amplitude; ainsi, en divisant la longueur d'un arc par le nombre

de degrés qu'il contient, le quotient exprime la valeur du degré moyen correspondant à la latitude moyenne. C'est de cette manière que l'on est parvenu à connaître la grandeur des degrés des méridiens sous différentes latitudes, et que l'on s'est convaincu de leur accroissement de l'équateur aux pôles.

Voici, par exemple, le tableau des principaux degrés mesurés, avec les latitudes de leurs milieux, exprimées suivant la division du cercle en 360 degrés.

LIEUX des observations.	ARCS mesurés.	LATITUDES moyennes.	LONGUEURS des degrés.	NOMS des observateurs.
Pérou............	3° 7′ 3″0	—1°31′ 0″5 A	110582m1	Bouguer, Lacondamine.
Inde.......... ...	9.53.45,25	13. 6.31,0 B	110627,2	Lambton, Éverest.
Cap de Bonne-Espér.	1.13.17	33.18.30,0 A	111163,0	Lacaille.
Pensylvanie........	1.28.45	39.12. 0,0 B	110880,0	Mason, Dixon.
Italie............	2.11.26	43.10. 0,0 B	111054,0	Boscovich, Lemaire.
France............	12.22.12,4	44.51. 2,3 B	111125,7	Delambre, Méchain, Biot, Arago.
Angleterre.........	3.57.13	52.35.45,0 B	111241,0	Roy, Mudge, Kater.
Suède............	1.37.19	66.20.10,3 B	111488,5	Melanderhielm, Svanberg.

La Terre est donc, comme nous l'avons déjà supposée, aplatie vers les pôles et renflée vers l'équateur. Cependant la comparaison des divers degrés mesurés dans les deux hémisphères, démontre que les méridiens sont différents entre eux et n'ont pas exactement la forme elliptique; par exemple, le degré moyen de France et celui de Suède donnent un aplatissement de $\frac{1}{314}$, tandis que le degré de Suède et celui du Pérou le supposent de $\frac{1}{307}$.

372. Une des opérations les plus importantes en Géodésie est, comme on sait, celle qui a été exécutée par Delambre et Méchain, depuis Dunkerque jusqu'à Montjouy, continuée au sud par MM. Biot et Arago jusqu'à l'île de Formentera, et rattachée au nord à celle du major général Roy, en Angleterre.

En voici les résultats, extraits de l'*Astronomie* de Delambre, tome III, page 566, mais corrigés tant de la discordance des bases de Melun et de Perpignan, que de l'erreur qui avait été commise dans l'évaluation

de l'arc de méridien compris entre Montjouy et Formentera (art. **201**); c'est-à-dire que la distance du Panthéon à Montjouy a été augmentée de 33^{T},3, à cause de cette discordance.

	LATITUDES astronomiqu.	AMPLITUDES astronomiqu.	INTERVALLES en toises.	INTERVALLES en mètres.	LONGUEURS des degrés.	CHANGEM. pour 1°.
Greenwich......	51°28′ 40″00	0°26′ 31″50	25241^{T}9	49197^{M}39	111284^{M}5	
Dunkerque......	51. 2. 8,50	2.11.19,13	124944,8	243521,99	111266,0	− 14^{M}0
Panthéon.......	48.50.49,37	2.40. 6,83	152305,0	296848,02	111238,8	− 11,0
Evaux..........	46.10.42,54	2.57.48,24	168859,8	329113,93	111060,5	− 63,2
Carcassonne....	43.12.54,30	1.51. 7,72	105507,2	205637,39	111026,7	− 13.9
Montjouy......	41.21.46,58	2.41.50,47	153674,0	299516,25	111040,6	+ 5,1
Formentera.....	38.39.56,11					
		Arc total...	730532,7	1423834,97		
ou, suivant la *Description géométrique de la France*, tome II, page 610			730532,8	1423835,16		

On voit tout d'abord, par ce tableau, que les degrés n'ont pas entre eux les rapports qui conviennent à un méridien elliptique, puisqu'en allant du nord au sud ils décroissent très-irrégulièrement à partir du troisième, et que de Montjouy à Formentera ils éprouvent au contraire un petit accroissement. Cette anomalie serait encore plus grande si nous n'avions pas adopté, comme Delambre, le milieu entre les observations de latitude faites à Barcelone et à Montjouy, et pour Dunkerque, le milieu entre les deux étoiles observées par cet astronome (*).

Lorsqu'au moyen de la série donnée en note à la page 332 (tome I), on calcule les différences des latitudes géodésiques des stations précédentes, en partant du Panthéon et prenant pour longueurs des arcs ceux que nous avons obtenus, il en résulte le tableau suivant, dans lequel nous avons adopté la latitude du Panthéon telle qu'elle a été dé-

(*) La latitude de Formentera réobservée, en 1825, des deux côtés du zénith, par M. Biot, qui n'a pas encore publié l'ensemble de ses résultats, n'offrira, de l'aveu de ce savant, aucune différence notable avec la première détermination mentionnée ci-dessus.

duite, par les ingénieurs-géographes, de celle de l'Observatoire royal, observée de 48°50′13″,2.

STATIONS.	LATITUDES géodésiques.	LATITUDES astronomiques.	DIFFÉRENCES.
Greenwich (Observatoire)	51°28′ 44″6	51°28′ 40″0	− 4″6
Dunkerque	51. 2.11,6	51. 2. 8,5	− 3,1
Paris (Panthéon)	48.50.48,6	48.50.48,6	0,0
Evaux	46.10.35,3	46.10.42,5	+ 7,2
Carcassonne	43.12.52,2	43.12.54,3	+ 2,1
Montjouy	41.21.46,8	41.21.46,6	− 0,2
Formentera	38.39.55,0	38.39.56,1	− 1,1

Ainsi il existe à Évaux une déviation du fil à plomb qui transporte le zénith vers le nord d'environ 7 secondes, en supposant toutefois cette station et Paris situés sur un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement serait de $\frac{1}{309}$.

373. Si les quatre arcs consécutifs du méridien, mesurés en France, appartenaient réellement à un ellipsoïde de révolution; que l'on substituât leurs valeurs dans la formule suivante,

$$(a) \quad A = g''(H' - H) - \frac{3}{2}\alpha g'' \frac{200}{\pi} \sin(H' - H)\cos(H' + H),$$

qui dérive de celle de l'art. **178**, et dans laquelle $g'' = \frac{Q}{100}$ désigne le grade moyen, α l'aplatissement, on aurait, entre ces deux inconnues, quatre équations qui, étant combinées deux à deux, donneraient exactement les mêmes valeurs pour g'' et α, en supposant toutefois que les erreurs d'observation fussent insensibles; mais, comme il n'en est pas ainsi, on cherche à déterminer l'ellipse qui satisfait le mieux aux arcs mesurés. Il existe, pour cet effet, une méthode très-élégante que Legendre a appelée *méthode des moindres carrés*, et qu'il a publiée pour la première fois dans son Mémoire sur la *Détermination des orbites des comètes* (année 1805). Elle jouit de l'avantage de diminuer autant que possible l'influence des erreurs commises dans la mesure des arcs entiers, ou dans une série quelconque d'observations, en rendant *minimum* la somme des carrés de ces erreurs. L'illustre auteur de la *Mé-*

canique céleste a, depuis, confirmé l'exactitude de cette méthode par sa savante *Théorie des probabilités*, et M. Ivory en a donné une démonstration fort simple que M. Francœur a rapportée dans son *Astronomie pratique*, page 427.

Si, par exemple, on a le système d'équations

$$E = a + bx + cy + fz + \ldots,$$
$$E' = a' + b'x + c'y + f'z + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dans lesquelles abc, $a'b'c'$,... sont des coefficients connus, et xyz... sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que les valeurs E, E',... se réduisent à une quantité ou nulle ou très-petite, on aura, pour la somme des carrés des erreurs,

$$\begin{aligned} E^2 + E'^2 + E''^2 \ldots = & (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots) + (b^2 + b'^2 + b''^2 \ldots)x^2 \\ & + (c^2 + c'^2 + c''^2 \ldots)y^2 + (f^2 + f'^2 + f''^2 \ldots)z^2 \ldots \\ & + 2(ab + a'b' + a''b'' \ldots)x + 2(ac + a'c' + a''c'' \ldots)y \\ & + 2(af + a'f' + a''f'' \ldots)z \ldots \\ & + 2(bc + b'c' + b''c'' \ldots)xy + 2(bf + b'f' + b''f'' \ldots)xz \\ & + 2(cf + c'f' + c''f'' \ldots)yz \ldots \end{aligned}$$

Or le *minimum* de cette expression, pris d'abord par rapport à x seul, sera (*Calcul différentiel* de M. Lacroix, 5e édit., n° 156)

$$o = \Sigma ab + x\Sigma b^2 + y\Sigma bc + z\Sigma bf + \text{etc.},$$

en représentant, pour abréger, par Σab la somme des produits semblables $ab + a'b' + \ldots$, par Σb^2 la somme des carrés $b^2 + b'^2 + \ldots$, et ainsi de suite.

Le *minimum*, pris en faisant varier y, sera de même

$$o = \Sigma ac + x\Sigma bc + y\Sigma c^2 + z\Sigma fc + \text{etc.}\ldots;$$

puis, en faisant varier z, on aura

$$o = \Sigma af + x\Sigma bf + y\Sigma cf + z\Sigma f^2 + \text{etc.}\ldots$$

Il suit de là que, *pour former l'équation du* minimum *par rapport à*

l'une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chaque équation proposée par le coefficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et égaler à zéro la somme de tous ces produits.

Par cette méthode, qui non-seulement est exacte, générale et directe, mais encore d'une application facile, on obtient autant d'équations du *minimum* qu'il y a d'inconnues, et il ne s'agit ensuite que de résoudre ces équations du premier degré par les voies ordinaires. Elle consiste, en quelque sorte, à prendre le centre de gravité des observations que l'on compare, pour trouver des valeurs les plus avantageuses. On pourrait aussi employer la méthode des *équations de condition,* imaginée par Mayer, et dont les astronomes font encore usage dans certains cas, parce que, quoiqu'elle soit moins sûre que la précédente, elle exige moins de calculs numériques.

374. Pour donner une première application du principe des moindres carrés, nous emploierons les éléments suivants, qui sont ceux auxquels s'était arrêtée la Commission des poids et mesures, et que nous laisserons intacts.

LIEUX des observations.	LATITUDES en grades.	ARCS COMPRIS exprimés en modul.	H — H'.	H + H'.
Dunkerque.........	56g706944			
Panthéon...........	54,274614	DP 62472,59	2g432330	110g981558
Evaux..............	51,309414	PE 76145,74	2,965200	105,584028
Carcassonne........	48,016790	EC 84424,55	3,292624	99,326204
Montjouy..........	45,958281	CM 52749,48	2,058509	93,975071

Le 50e grade étant d'environ 25650 modules, égaux chacun à deux toises (art. **145**), on peut faire $\frac{1}{g''} = \frac{1+\beta}{25650}$, β étant une très-petite fraction; et pour lors l'équation (a) renversée, savoir,

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{\mathrm{A}}{g''} + \frac{3}{2}\alpha\frac{200}{\pi}\sin(\mathrm{H}-\mathrm{H}')\cos(\mathrm{H}+\mathrm{H}'),$$

deviendra

$$\mathrm{H} - \mathrm{H}' = \frac{\mathrm{A}}{25650} + \beta.\frac{\mathrm{A}}{25650} + \alpha.\frac{300}{\pi}\sin(\mathrm{H}-\mathrm{H}')\cos(\mathrm{H}+\mathrm{H}').$$

Maintenant, appelant E, E′,... les corrections additives aux latitudes de Dunkerque, du Panthéon, etc., on aura $H + E - H' - E'$, au lieu de $H - H'$, etc., et alors, en unités de grade,

$$\begin{aligned}
E - E' &= 0{,}003252 + (2{,}435)\beta - (0{,}626)\alpha,\\
E' - E'' &= 0{,}003443 + (2{,}969)\beta - (0{,}389)\alpha,\\
E'' - E''' &= -0{,}001219 + (3{,}291)\beta + (0{,}052)\alpha,\\
E''' - E^{\text{iv}} &= -0{,}001999 + (2{,}056)\beta + (0{,}292)\alpha.
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir considérer ces erreurs séparément, on regardera comme une nouvelle inconnue l'erreur E″, par exemple, et l'on aura

$$\begin{aligned}
E &= E'' + 0{,}006695 + (5{,}404)\beta - (1{,}016)\alpha,\\
E' &= E'' + 0{,}003443 + (2{,}969)\beta - (0{,}389)\alpha,\\
E'' &= E'',\\
E''' &= E'' + 0{,}001219 - (3{,}291)\beta - (0{,}052)\alpha,\\
E^{\text{iv}} &= E'' + 0{,}003218 - (5{,}348)\beta - (0{,}344)\alpha.
\end{aligned}$$

Appliquant le principe des *moindres carrés*, énoncé précédemment, et exprimant d'abord la condition du *minimum* par rapport à l'inconnue E″, dont tous les coefficients sont 1, on aura, par l'addition de toutes ces équations,

$$0 = 5E'' + 0{,}014575 - (0{,}266)\beta - (1{,}801)\alpha;$$

donc

$$E'' = -0{,}002915 + (0{,}053)\beta + (0{,}360)\alpha.$$

La substitution de cette valeur dans les cinq équations ci-dessus conduit à

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned}
E &= 0{,}003780 + (5{,}457)\beta - (0{,}655)\alpha,\\
E' &= 0{,}000528 + (3{,}022)\beta - (0{,}029)\alpha,\\
E'' &= -0{,}002915 + (0{,}053)\beta + (0{,}360)\alpha,\\
E''' &= -0{,}001696 - (3{,}238)\beta + (0{,}308)\alpha,\\
E^{\text{iv}} &= 0{,}000303 - (5{,}295)\beta + (0{,}016)\alpha.
\end{aligned}\right.$$

On exprimera la condition du *minimum* par rapport à β, en multipliant chacune de ces équations par le coefficient de β dans ces mêmes

équations, pris avec son signe, et en égalant à zéro la somme de tous ces produits. Si l'on opère de la même manière par rapport à α, on aura les deux relations

$$o = \quad 0{,}025957 + (77{,}438)\beta - (4{,}729)\alpha,$$
$$o = - \, 0{,}004060 - (\;4{,}729)\beta + (0{,}655)\alpha;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0{,}00675, \quad \beta = 0{,}0000773;$$

donc l'aplatissement le plus probable, résultant de l'ensemble des observations, est

$$\alpha = \tfrac{1}{148},$$

et le 50e grade

$$g'' = \frac{25650}{1+\beta} = 25648{,}02.$$

Enfin, substituant dans les équations (b) les valeurs de α et β, on aura, pour les erreurs exprimées en secondes centésimales,

$$E = -2'',19, \quad E' = 5'',65, \quad E'' = -4'',79, \quad E''' = 1'',34, \quad E^{\text{iv}} = 0'',05;$$

de là, en secondes sexagésimales,

$$E = -0'',73, \quad E' = 1'',83, \quad E'' = -1'',55, \quad E''' = 0'',42, \quad E^{\text{iv}} = 0'',02.$$

L'aplatissement déterminé de la sorte est beaucoup plus grand que celui qui résulte des phénomènes de la précession et de la nutation, et qu'on trouve de $\frac{1}{305}$, en le déduisant de deux inégalités du mouvement lunaire, l'une en latitude, l'autre en longitude (*). On sait d'ailleurs, par la comparaison des arcs mesurés en France et à l'équateur, qu'il est de $\frac{1}{304.8}$ (art. **181**), résultat presque identique avec le précédent. Ainsi l'aplatissement $\frac{1}{148}$ que fournissent les quatre arcs de méridien mesurés en France, appartiendrait à une ellipse qui ne peut convenir à la figure générale du globe, et qui supposerait dans les

(*) *Exposition du Système du Monde,* sixième édition, page 231.

observations des latitudes de Paris et d'Évaux des erreurs beaucoup plus fortes que celles qui sont probables. De telles anomalies dans les latitudes ne pouvant donc être entièrement attribuées aux observations, on doit croire qu'elles tiennent à des attractions locales qui agissent irrégulièrement sur le fil à plomb, et écartent la figure de la Terre de celle d'un ellipsoïde de révolution.

Si, dans les équations (b), l'on fait $\alpha = \frac{1}{230}$, suivant Newton, et que l'on cherche, comme on vient de l'enseigner, l'équation du *minimum*, on obtiendra une résultante qui fournira une nouvelle valeur de β; et pour lors le 50e grade, qui est une fonction de cette valeur, s'accordera suffisamment avec la détermination primitivement adoptée; mais il résultera de là que les valeurs de E, E', E'' s'écarteront davantage des limites probables des erreurs des observations, dans l'hypothèse du *minimum* absolu. (Consultez, à cet égard, le Mémoire cité de Legendre, et la *Mécanique céleste*, tome II, page 140.)

Delambre préfère la méthode qui donne les moindres erreurs de latitude, moitié positives, moitié négatives; celle qu'il emploie pour cet effet n'est pas directe, mais elle est trop simple pour la passer sous silence. Ce célèbre astronome prend la formule

$$(\mathrm{H}' - \mathrm{H}) = \mathrm{A}\frac{\pi}{2^{q}}\left[1 + \frac{3}{2}\alpha\cos^{\frac{1}{3}}(\mathrm{H}' - \mathrm{H})\cos(\mathrm{H}' + \mathrm{H})\right],$$

qu'on déduit aisément de celle de l'art. **178**, en y négligeant les puissances supérieures de l'aplatissement, et transformant le terme en α par le procédé de l'art. **184**; puis il détermine, d'après l'arc mesuré, la différence H' − H des latitudes pour différentes hypothèses d'aplatissement, et par conséquent l'erreur des observations. En considérant, par exemple, la latitude de Paris comme la plus exacte, et appliquant la formule ci-dessus aux arcs du méridien compris entre le Panthéon et les lieux rapportés dans les tableaux précédents, il a reconnu que, pour l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{175}$, la somme des erreurs se réduit presque à rien, tandis qu'aucune d'elles ne passe $3''\frac{1}{3}$ de la division sexagésimale. L'aplatissement $\frac{1}{200}$ satisfait encore assez bien à la condition, au lieu que $\frac{1}{227}$ donne la somme des erreurs $= + 13'',96$. (*Abrégé d'Astronomie*, page 607.)

375. Puisque la comparaison des parties dont se compose un arc de méridien ne donne qu'imparfaitement la valeur de l'aplatissement de la Terre, à cause du peu de différence de leur courbure, établissons-la entre les longueurs de plusieurs degrés mesurés à de hautes et basses latitudes, et arrêtons-nous aux mesures suivantes, qui sont les plus accréditées, savoir :

NOMS des contrées.	ARCS d'un degré.	LATITUDES moyennes.	AMPLITUDES astronomiques des arcs mesurés.	NOMS des observateurs.
A l'équateur.	110582m,1	— 1°3.′ 0″5	3° 7′ 3″00	Bouguer, Lacondamine.
Dans l'Inde......	110627,2	13. 6.31,0	9.53.45,25	Major Lambton.
En France.......	111131,2	45. 4.18,1	12.48.43,89	Delambre, Méchain, Biot, Arago.
En Suède........	111488,5	66.20.10,3	1.37.18,98	Melanderhielm, Swanberg.

Or il a été démontré (art. **184**) que, dans l'hypothèse elliptique, les degrés des méridiens croissent à très-peu près comme les carrés des sinus des latitudes qui correspondent à leurs milieux; si donc $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$, $\varepsilon^{(4)}$ sont respectivement les erreurs dont les mesures $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, peuvent être affectées, on aura ces quatre équations de condition

$$\begin{aligned}
A^{(1)} - z - y\sin^2\psi^{(1)} &= \varepsilon^{(1)} \quad \text{ou} \quad 110582{,}1 - z - y.0{,}00070 = \varepsilon^{(1)},\\
A^{(2)} - z - y\sin^2\psi^{(2)} &= \varepsilon^{(2)} \quad \text{ou} \quad 110628{,}6 - z - y.0{,}05144 = \varepsilon^{(2)},\\
A^{(3)} - z - y\sin^2\psi^{(3)} &= \varepsilon^{(3)} \quad \text{ou} \quad 111131{,}2 - z - y.0{,}50125 = \varepsilon^{(3)},\\
A^{(4)} - z - y\sin^2\psi^{(4)} &= \varepsilon^{(4)} \quad \text{ou} \quad 111488{,}5 - z - y.0{,}83890 = \varepsilon^{(4)},
\end{aligned}$$

dans lesquelles

$$y = \tfrac{3}{2}.\frac{\pi}{180}ae^2, \qquad z = \frac{\pi}{180}a(1-e^2);$$

et les deux équations du *minimum* qui seront, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
443830{,}4 - 4z - y.1{,}39229 &= 0,\\
-155000{,}4 + z.1{,}39229 + y.0{,}95765 &= 0,
\end{aligned}$$

fourniront ces valeurs

$$y = 1089^{\mathrm{m}},03, \quad z = 110578^{\mathrm{m}},54.$$

D'un autre côté, l'aplatissement α ayant pour expression

$$\alpha = \tfrac{1}{2} e^2 = \tfrac{1}{3} \frac{y}{z},$$

et le rayon de l'équateur étant

$$a = \frac{180}{\pi} z(1 + 2\alpha),$$

on trouve

$$\log \alpha = 7,5162475, \quad \alpha = \frac{1}{304,61};$$
$$\log a = 6,8046357, \quad a = 6377284^{\mathrm{m}};$$

par suite le rayon du pôle (art. **179**),

$$\log b = 6,8032076, \quad b = 6356347^{\mathrm{m}},$$

et le quart du méridien,

$$\log Q = 7,0000424, \quad Q = 10000976^{\mathrm{m}}.$$

Enfin les erreurs les plus probables sont

$$\varepsilon^{(1)} = +2^{\mathrm{m}},8; \quad \varepsilon^{(2)} = -6^{\mathrm{m}},0; \quad \varepsilon^{(3)} = +6^{\mathrm{m}},8; \quad \varepsilon^{(4)} = -3^{\mathrm{m}},6;$$

mais, vu l'extrême précision des mesures de France et de l'Inde, les erreurs probables dont elles paraissent être affectées doivent plutôt être attribuées aux irrégularités de la Terre.

376. Les géomètres désiraient depuis longtemps faire concourir à la détermination de l'ellipticité de la Terre les mesures d'arcs de parallèles, et les grandes opérations géodésiques relatives à la nouvelle carte de France leur en ont procuré l'occasion. En effet, les deux lignes de courbure d'une surface quelconque étant perpendiculaires entre elles, la mesure d'un arc de parallèle est, théoriquement parlant,

propre à faire connaître si la surface à laquelle elle appartient est ou n'est pas de révolution. Par les opérations dont il s'agit, l'on ne mesure pas directement cet arc; ce sont, comme pour la méridienne, les triangles établis le long de cette ligne qui servent à en déterminer la grandeur (art. 203) : il ne reste plus ensuite qu'à en évaluer l'amplitude par les signaux de feu, ou à l'aide d'excellents chronomètres, ou par tout autre moyen. Mais il paraît si difficile d'obtenir cette amplitude avec une extrême précision, qu'on a peu d'espoir d'acquérir par là, sur la véritable figure de la Terre, plus de lumières qu'on n'en possède maintenant. Néanmoins, on ne doit pas négliger de faire entrer en considération les mesures d'arcs de parallèles, ou de perpendiculaires à la méridienne, si les observations de longitude et d'azimut peuvent inspirer assez de confiance, et si les opérations géodésiques ont été faites avec tous les soins que leur importance exige.

La longueur d'un arc de parallèle compris entre les points extrêmes d'une chaîne de triangles, et son amplitude étant connues, on aura aisément la longueur du *degré moyen* de ce parallèle; car ce serait sans doute un hasard si les portions de cette ligne étaient rigoureusement proportionnelles à leurs degrés. Les irrégularités observées dans les arcs de méridiens donnent lieu de penser qu'il en existe aussi dans les arcs de parallèles. Cependant, si les différences entre les degrés d'un même parallèle sont très-légères, et qu'elles puissent être uniquement attribuées aux erreurs des observations, l'on sera en droit de conclure que, dans le lieu où l'on a opéré, la surface de la Terre est réellement de révolution. Dans la supposition contraire, le parallèle mesuré sera une courbe irrégulière, et la différence de longitude de ses extrémités ne sera pas rigoureusement son amplitude : on déterminera alors l'ellipse qui y satisfait le mieux. Mais que pourra-t-on conclure de là, si ce n'est que la Terre, dans le lieu des observations, a sensiblement la forme d'un ellipsoïde?

Supposons, par exemple, qu'aux arcs partiels $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$,... correspondent les amplitudes astronomiques $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$,..., exprimées en secondes de temps; que $\frac{1}{u}$ désigne le degré sexagésimal du parallèle B dont il s'agit, et que ε soit généralement l'erreur commise sur l'amplitude T, on aura (en faisant attention que 4^m de temps ou 240^s répondent

à l'arc d'un degré) ces quatre équations de condition,

$$(6)\quad \begin{cases} b^{(1)}u - \dfrac{T^{(1)}}{240} = \dfrac{\varepsilon^{(1)}}{240}, \\ b^{(2)}u - \dfrac{T^{(2)}}{240} = \dfrac{\varepsilon^{(2)}}{240}, \\ b^{(3)}u - \dfrac{T^{(3)}}{240} = \dfrac{\varepsilon^{(3)}}{240}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Traitant ces équations par la méthode des moindres carrés, il viendra, pour la valeur la plus probable du degré du parallèle,

$$\frac{1}{u} = B_m = \frac{240\,[b^{(1)2} + b^{(2)2} + b^{(3)2} + \dots]}{b^{(1)}T^{(1)} + b^{(2)}T^{(2)} + b^{(3)}T^{(3)} + \dots};$$

ensuite, portant cette valeur dans les équations précédentes, on obtiendra les erreurs les plus probables des amplitudes partielles. Il sera convenable de prendre une grande ligne pour unité de mesure, afin d'éviter de trop grands nombres dans ce calcul.

Quant à la recherche de l'expression de la probabilité que le rapport de l'erreur de la valeur de $\frac{1}{u}$ à cette valeur est compris entre certaines limites, c'est une question délicate, que l'auteur de la *Mécanique céleste* devait traiter dans un nouveau mémoire sur la *Théorie analytique des Probabilités*. Ce savant illustre voulut bien m'apprendre que si le nombre n des équations de condition ci-dessus est petit, la probabilité que le rapport de l'erreur de la valeur précédente du degré du parallèle mesuré à cette valeur, est compris dans les limites ± le produit de cette valeur par

$$\frac{r}{\sqrt{n+2}} \cdot \sqrt{\frac{2\,[\theta^{(1)2} + \theta^{(2)2} + \dots + \theta^{(n)2}]}{b^{(1)2} + b^{(2)2} + b^{(3)2} + \dots + b^{(n)2}}},$$

égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dr.c^{-r^2},$$

lorsqu'on désigne par $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$ les nombres $\frac{\varepsilon^{(1)}}{240}, \frac{\varepsilon^{(2)}}{240}, \dots$, et par c la base des logarithmes népériens.

Le calcul de $\frac{1}{u}$ est d'autant plus pénible par cette voie que le nombre des équations de condition est plus grand; mais il est facile de le simplifier considérablement en modifiant ces équations de la manière suivante :

Si l'on suppose $\frac{1}{u} = \beta + x = \beta\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)$, et que l'on prenne pour valeur de β celle qui ne diffère de la plus probable que d'un petit nombre d'unités, x sera alors une très-petite quantité dont on pourra négliger le carré dans l'expression de

$$u = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-1} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{x}{\beta}\right).$$

D'après cela, les équations de condition (6) se changeront en celles-ci :

$$(A)\quad \begin{cases} \frac{240.b^{(1)}}{\beta} - T^{(1)} - \frac{240.b^{(1)}}{\beta^2}x = \varepsilon^{(1)}, \\ \frac{240.b^{(2)}}{\beta} - T^{(2)} - \frac{240.b^{(2)}}{\beta^2}x = \varepsilon^{(2)}, \\ \frac{240.b^{(3)}}{\beta} - T^{(3)} - \frac{240.b^{(3)}}{\beta^2}x = \varepsilon^{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ou, pour abréger, en ces autres :

$$(A')\quad \begin{cases} M^{(1)} - N^{(1)}x = \varepsilon^{(1)}, \\ M^{(2)} - N^{(2)}x = \varepsilon^{(2)}, \\ M^{(3)} - N^{(3)}x = \varepsilon^{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Opérant sur ces équations comme il est dit ci-dessus, on obtiendra

$$x = \frac{M^{(1)}N^{(1)} + M^{(2)}N^{(2)} + M^{(3)}N^{(3)} + \dots}{N^{(1)2} + N^{(2)2} + N^{(3)2} + \dots}.$$

Telle est la quantité à ajouter algébriquement à β pour avoir le degré le plus probable résultant de la mesure géodésique. Si l'on substitue ensuite cette valeur de x dans les équations (A'), on aura également

les valeurs les plus probables de $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$,... Enfin la somme de ces erreurs, prises avec leurs signes, sera la correction à appliquer à la différence en longitude $T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \ldots$

Pour faire ressortir, par quelques applications numériques, l'utilité et les avantages de la méthode actuelle, j'emprunterai de la mesure de l'arc de parallèle compris entre l'Océan et Padoue les résultats qui ont été en partie obtenus par mon procédé, et que l'on trouve à la page 291 de la *Connaissance des Temps* pour 1829, mais corrigés ici de la très-petite discordance des bases de Bordeaux et du Tésin, et ramenés à la latitude de 45°43′12″. Voici en peu de mots comment j'ai effectué cette correction.

D'abord la rectification de ce parallèle a été faite en prenant pour base de départ le côté *Bort-Herment* de la méridienne de Dunkerque, calculé par Delambre. Or la base de Bordeaux conclue de ce côté s'étant trouvée de. . . . . 14117^m,46 log 4,1497566
et sa mesure directe étant de. . . . . 14119 ,08 log 4,1498064
on a pour la différence logarithmique. . . . . . . + 0,0000498

Il faut donc ajouter au log. de la longueur B du parallèle la correction + 0,0000498, pour convertir cette longueur en unités de la base de Bordeaux.

De plus, le réseau trigonométrique de ce parallèle étant lié par ses extrémités à la base de Bordeaux et à celle du Tésin, et celle-ci, déduite de la première, étant de . . . . 9999^m,455 log 3,9999763
tandis que sa mesure directe est de. . 9999 ,254
il s'ensuit que la base moyenne = 9999 ,3545 log 3,9999720
et que par conséquent la 2e correct. logarithmique = − 0,0000043

Ainsi, en définitive, on a pour le log. de la longueur B du parallèle moyen, évaluée en unités de cette base moyenne,

$$\log B + 0{,}0000498 - 0{,}0000043 = \log B + 0{,}0000455.$$

Telle est, en effet, la correction que j'ai faite à chacun des arcs partiels avant de former le tableau suivant.

ARCS PARTIELS.	AMPLITUDES astronomiques.	AMPLITUDES géodésiques.	DIFFÉR.
Marennes et St-Preuil. $b^{(1)} =$ 74414m96	$T^{(1)} = 0^h\ 3^m 48^s 990$	$P^{(1)} = 0^h\ 3^m 49^s 430$	+0″440
St-Preuil et Sauvagnac $b^{(2)} =$ 124194,79	$T^{(2)} =$ 0. 6.23,094	$P^{(2)} =$ 0. 6.22,910	−0,184
Sauvagnac et Usson.. $b^{(3)} =$ 133359,09	$T^{(3)} =$ 0. 6.51,391	$P^{(3)} =$ 0. 6.51,160	−0,231
Usson et Genève..... $b^{(4)} =$ 233111,08	$T^{(4)} =$ 0.11.57,820	$P^{(4)} =$ 0.11.58,720	+0,900
Genève et Milan..... $b^{(5)} =$ 236741,47	$T^{(5)} =$ 0.12. 9,570	$P^{(5)} =$ 0.12. 9,890	+0,320
Milan et Padoue..... $b^{(6)} =$ 209279,52	$T^{(6)} =$ 0.10.45,383	$P^{(6)} =$ 0.10.45,230	−0,153
Arc total B = 1011100,91	T = 0.51.56,248	P = 0.51.57,340	+1,096

La première conséquence que l'on tire de ce tableau, c'est que l'aplatissement d'après lequel a été calculée l'amplitude géodésique P est plus petit que celui qui répond à l'amplitude astronomique T. Elle devient d'ailleurs évidente par cette relation :

$$P = \frac{90^\circ.B}{Q \cos H} - \frac{45^\circ.B}{Q \cos H} . \alpha (1 + 2\sin^2 H),$$

tirée des formules démontrées aux art. **179** et **190** du tome I, puisque, plus l'aplatissement α augmente, plus P diminue, le quart du méridien elliptique Q restant toutefois le même. Observons cependant en passant qu'on aurait tort de vouloir déduire définitivement de cette seule relation la valeur de α, en y remplaçant P par T exprimée en degrés sexagésimaux, parce que Q est aussi une inconnue dont la valeur, à la vérité, diffère dans tous les cas bien peu de 10 millions de mètres. Au surplus, en supposant Q constant, on a l'équation différentielle

$$dP = - \frac{45^\circ.B}{Q \cos H} . d\alpha (1 + 2\sin^2 H),$$

qui donnerait la correction d'aplatissement au moyen de celle de longitude, et réciproquement.

La seconde conséquence est encore plus frappante que la première, en jetant un coup d'œil sur le tableau suivant, formé des valeurs de $\frac{b^{(1)}}{15T^{(1)}}$, $\frac{b^{(2)}}{15T^{(2)}}$, etc., insérées dans la seconde colonne.

	LONGUEURS du degré.	DIFFÉRENCES.
Par le 1er arc.........	77992m87	
Par le 2e.............	77805,32	— 187m55
Par le 3e.............	77799,93	— 5,39
Par le 4e.............	77939,49	+ 139,56
Par le 5e.............	77878,67	— 60,82
Par le 6e.............	77825,25	— 53,42
Par l'arc total.........	77870,60	

Nous croyons devoir attribuer en grande partie ces différences considérables entre les longueurs des degrés, bien plus à l'imperfection de la méthode qui a été employée pour mesurer les amplitudes astronomiques de très-petits arcs qu'aux irrégularités de la figure du parallèle. Il n'y a donc rien de mieux à faire, pour rétablir autant que possible l'harmonie entre les six parties de cette ligne, que de procéder comme on vient de le dire. Ainsi, en supposant $\beta=77870^m,6$, les équations (A) deviendront

$$(A'')\quad \left\{\begin{aligned} 0,359 - 0,002945\, x &= \varepsilon^{(1)},\\ -\,0,321 - 0,004915\, x &= \varepsilon^{(2)},\\ -\,0,374 - 0,005278\, x &= \varepsilon^{(3)},\\ +\,0,636 - 0,009213\, x &= \varepsilon^{(4)},\\ +\,0,075 - 0,009370\, x &= \varepsilon^{(5)},\\ -\,0,376 - 0,008283\, x &= \varepsilon^{(6)}, \end{aligned}\right.$$

et donneront, par la méthode la plus avantageuse,

$$\begin{aligned} &-\,0,1057 + 0,000867\, x,\\ &+\,0,1578 + 0,002416\, x,\\ &+\,0,1974 + 0,002786\, x,\\ &-\,0,5860 + 0,008489\, x,\\ &-\,0,0703 + 0,008780\, x,\\ &+\,0,3114 + 0,006861\, x. \end{aligned}$$

Égalant cette somme à zéro, on aura

$$x = \frac{0,0954}{0,030199} = 3^{m},16.$$

Mais par hypothèse	β =	$77870^{m},60$
Ajoutant	x =	$3\ ,16$
il viendra pour le degré le plus probable	B_m =	$77873^{m},76$

Enfin, substituant pour x sa valeur dans les équations (A″), les erreurs les plus probables qui affectent les amplitudes partielles seront

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(1)} &= +\ 0^{s},350\\
\varepsilon^{(2)} &= -\ 0\ ,337\\
\varepsilon^{(3)} &= -\ 0\ ,391\\
\varepsilon^{(4)} &= +\ 0\ ,607\\
\varepsilon^{(5)} &= +\ 0\ ,045\\
\varepsilon^{(6)} &= -\ 0\ ,402\\
\text{Somme } \varepsilon &= -\ 0\ ,128
\end{aligned}$$

Cette valeur de ε est donc la correction à faire à l'amplitude totale $T = 0^{h}51^{m}56^{s},248$ pour avoir la différence en longitude la plus probable entre Marennes et Padoue; ainsi l'amplitude corrigée $= 0^{h}51^{m}56^{s},12 = 12^{\circ}51'1'',8$.

Il est à regretter que les irrégularités du parallèle mesuré, ou les perturbations du fil à plomb dans le sens de cette ligne, qui paraissent exister, ne puissent, quant à présent, être mises tout à fait en évidence, à cause des trop fortes erreurs d'amplitude dont au reste il était impossible de se garantir. Cependant l'on serait porté à croire que la différence $+\ 0'',900$ entre $T^{(4)}$ et $P^{(4)}$, que l'on remarque dans le premier tableau ci-dessus, n'est pas entièrement due à ces erreurs. On aurait éclairci ce point important en réobservant l'amplitude de l'arc entre Genève et Marennes, par la méthode qui a été pratiquée avec un grand succès sur le parallèle de Brest (art. **347**). Quoi qu'il en soit, cherchons maintenant l'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur en France par la formule que nous avons donnée art. **191**.

On a d'abord

$$H = 45^\circ 43' 12'',$$
$$B_m = 77873^m,76.$$

De plus, l'arc du méridien compris entre Greenwich et Formentera a pour longueur

$$A = 1423835^m,16,$$

et les latitudes de ses extrémités sont

$$\begin{aligned} \lambda &= 51^\circ 28' 40'',00 \\ \lambda' &= 38.39.56\ ,11 \\ \text{Amplitude } \lambda - \lambda' &= 12.48.43\ ,89 \\ &= 12^\circ,8121917; \end{aligned}$$

de là, degré moyen,

$$\frac{A}{\lambda - \lambda'} = A_m = 111131^m,23.$$

Cela posé, la formule citée, qui se réduit, en négligeant le très-petit terme en e^4, à la suivante,

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(B_m - A_m \cos H)}{B_m \left[\frac{1}{4} + \frac{135}{\pi}\frac{\sin(\lambda-\lambda')\cos(\lambda+\lambda')}{\lambda - \lambda'}\right] + \frac{1}{2} A_m \cos H \sin^2 H},$$

donne, en opérant par logarithmes,

$$\begin{aligned} \log A_m &= 5,0458361 \quad - \\ \text{l. } \cos H &= 9,8439583 \qquad 77873,76 \\ \text{l. } A_m \cos H &= 4,8897944 = -\ 77581,79 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 291,97 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ ou numérateur $=$ 145,985 log 2,1643083

$\log B_m = 4,8913911$ $\qquad$ $\log \frac{1}{2} = 9,6989700$

$\log \frac{135}{\pi} = 1,6331839$ $\qquad$ $\text{l.} A_m \cos H = 4,8897944$

$\log \frac{\sin(\lambda-\lambda')\cos(\lambda+\lambda')}{\lambda-\lambda'} = 5,6364761 -$ $\qquad$ $\text{l.} \sin^2 H = 9,7097490$

$2,1610511 = -\ 144^m,89$ $\qquad$ $4,2985134 = 19884^m,44$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{4}B_m & = & 19468^m,44 & \\
 & - & 144\ ,89 & \\
 & & 19323\ ,55 & \\
 & + & 19884\ ,44 & \\
\text{dénominateur} & = & 39207\ ,99 & \log = 4,5933747 \\
\text{log numér.} & = & 2,1643083 & \\
\text{c. log dénom.} & = & 5,4066253 & \\
\log \alpha & = & 7,5709336 & = 0,0037233 \\
\text{compl. arith.} & = & 2,4290664 & = 268,57 ;
\end{array}$$

donc enfin,

$$\text{aplatissement } \alpha = \frac{1}{268,57}.$$

Vu l'incertitude qui reste encore sur la valeur du degré moyen du parallèle mesuré, il est inutile de tenir compte du second terme de la formule en e^2. Néanmoins il est assez prouvé que les mesures de France, dans le sens des deux lignes de courbure, donnent un aplatissement plus fort que celui qui paraît convenir le mieux à la figure du globe en général, et que le résultat ci-dessus est beaucoup plus exact que celui de $\frac{1}{148}$, tiré des seules parties de l'arc du méridien (art. **374**) (*).

Achevons de compléter la solution du problème que nous nous sommes proposé. D'abord, en admettant que $\alpha = \frac{1}{269}$ exactement, le carré de l'excentricité de l'ellipsoïde osculateur est

$$e^2 = \frac{(a+b)(a-b)}{a^2} = \frac{537}{(269)^2};$$

de là $\log e^2 = 7,8704697$; ensuite le demi-grand axe se déduira de

(*) Lorsqu'aux six arcs précédents l'on ajoute celui qui a été mesuré en dernier lieu par M. le général Fallon, et qui est compris entre le clocher de Sainte-Justine de Padoue et la tour de la ville de Fiume, son amplitude astronomique $T^{(7)} = 0^h 10^m 13^s,536$, son amplitude géodésique $P^{(7)} = 0^h 10^m 15^s,392$, et sa longueur $b^{(7)} = 199571^m,64$, toutes corrections faites. Alors le degré moyen le plus probable, déduit de ces sept arcs partiels, a pour valeur 77906^m, et l'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur est de $\frac{1}{247}$.

cette formule,

$$B_m = \frac{\pi}{180} . a \cos H \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 H + \ldots\right),$$

démontrée (art. **189**), et dans laquelle, F étant le facteur polynome du second membre, on trouvera aisément, d'après les données précédentes, F = 1,001907. Voici ce calcul :

$$\begin{aligned}
\log B_m &= 4{,}8913911 \\
\text{c. l.} \cos H &= 0{,}1560417 \\
\log \frac{180}{\pi} &= 1{,}7581226 \\
\text{c.} \log F &= 9{,}9991717 \\
\log a &= 6{,}8047271 \quad a = 6378624^{\text{m}} \\
\log a^2 &= 13{,}6094542 \\
1 - e^2 = 0{,}9925789;\ \log(1 - e^2) &= 9{,}9967649 \\
\log b^2 &= 13{,}6062191 \\
\log b &= 6{,}8031095 \quad b = 6354910^{\text{m}}
\end{aligned}$$

Enfin le quart du méridien sera donné par cette série :

$$\log 2Q = \log a + \log \pi - \mu \left(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{16}\alpha^2 \ldots\right),$$

trouvée (art. **179**), laquelle donnera, à cause de $\log \mu = 9{,}63778$ et de $\log \alpha = \log \frac{1}{289} = 7{,}5702477$,

$$\begin{aligned}
\log 2Q &= 7{,}3010694 \\
&\ 9{,}6989700 \\
\log Q &= 7{,}0000394 = 10000907 \text{ mètres.} \\
&\ 9{,}7101800 \\
\log Q &= 6{,}7102194 = 5131206 \text{ toises.}
\end{aligned}$$

Il suit de là que, par les seules mesures de l'ellipsoïde osculateur en France, on aurait trouvé pour la longueur du mètre 3^pi^ 0^po^ 11^lig^,336
Sa longueur légale est . . . . 3 . 0 . 11 ,296
Différence . . . . 0 ,04

Dans la recherche de la figure générale du globe par les mesures géodésiques et astronomiques, il est impossible de rendre les latitudes et les longitudes indépendantes des anomalies produites par des causes perturbatrices qui étendent leur action jusqu'aux lieux des observateurs ; mais il est évident que l'influence de ces anomalies locales sur l'expression numérique de l'aplatissement est d'autant moindre que les arcs mesurés ont plus d'amplitude.

En examinant au contraire ce qui se passe dans une petite étendue superficielle, cette influence en décèle toutes les inégalités. Par exemple, nous avons cherché, à l'aide des équations différentielles de l'art. **200**, quels seraient, en France, les aplatissements qui feraient accorder exactement entre elles les déterminations géodésiques et astronomiques correspondantes, en supposant les stations situées deux à deux sur des ellipsoïdes tangents au sphéroïde terrestre à l'Observatoire de Paris, et nous avons trouvé les résultats suivants, que nous extrayons de la *Nouvelle carte de France,* tome II, page 614.

STATIONS COMBIN. (partie occid.)	LATIT. ET LONGIT. géodésiques.	DIFFÉRENCES avec les mesures astr.	ÉQUATIONS A RESOUDRE.	CORRECT. D'APPL. ET DU $\frac{1}{4}$ DU MÉRIDIEN, aplatissement déduit.
Observat. royal de Paris.....	H = 48°50′ 13″20	....	....	Q = 10000724^{m}
Crozon........	H′=48.14.50,05	dH'=− 1″55	− 1″55= 392″74 $d\alpha$+ 2123″15 dq	$d\alpha$=+0,0002852; dq=− 0,0007828
	P′ = 6.49.40,32	dZ'=− 9,67	− 9,67=19435,0 $d\alpha$+ 18396,0 dq	$\alpha' = \alpha + d\alpha = 0{,}00324 + d\alpha = \frac{1}{283{,}7}$
Angers........	H′=47.28.10,67	dH'=− 3,88	− 3,88= 811,02 $d\alpha$+ 4922,53 dq	$d\alpha$=− 0,0015834; dq=−0,0052734
	P′ = 2.53.21,57	dZ'=−16,71	−16,71= 7999,7 $d\alpha$+ 7669,70 dq	α' = 0,0016566 = $\frac{1}{603{,}6}$
Puits-Berteau..	H′=47.13.59,85	dH'=+ 0,69	+ 0,69= 915,61 $d\alpha$+ 5773,35 dq	$d\alpha$=− 0,0421844; dq= 0,0068097
	P′ = 0.14.52,47	dZ'=−24,28	−24,28= 681,35 $d\alpha$+ 655,18 dq	α' =− 0,038944 =− $\frac{1}{25{,}67}$
La Ferlanderie.	H′=45.44.44,87	dH'=− 3,83	− 3,83= 1333,0 $d\alpha$+11128,33 dq	$d\alpha$=− 0,0036448; dq= 0,0000924
	P′ = 3. 1.12,04	dZ'=−28,05	−28,05= 7893,3 $d\alpha$+ 7792,00 dq	α' =− 0,0004048 =− $\frac{1}{2470{,}4}$
Tour de Borda.	H′=43.42 41,75	dH'=+ 0,34	+ 0,34= 1229,1 $d\alpha$+18451,45 dq	$d\alpha$=−0,00536943; dq= 0,0003761
	P′ = 3.24. 5,84	dZ'=−41,27	−41,27= 8279,5 $d\alpha$+ 8469,7[illegible] dq	α' =−0,00212943 =− $\frac{1}{469{,}8}$

Dans ce tableau, relatif à la *Pl. III*, les différences de latitude et d'azimut sont positives ou négatives, selon que les déterminations géodésiques calculées pour l'aplatissement $\alpha = 0,00324$ sont plus faibles ou plus fortes que les déterminations astronomiques. Il suit évidemment des résultats qu'il renferme, et auxquels il ne faut pas cependant accorder une exactitude absolue, que la sphère tient à peu près le milieu entre les deux ellipsoïdes aplati et allongé qu'on obtiendrait en groupant les stations qui répondent à des aplatissements de même signe, fît-on même la part des erreurs d'observation la plus grande possible.

STATIONS COMBIN. (partie orient.).	LATIT. ET LONGIT. géodésiques.	DIFFÉRENCES avec les mesures astr.	ÉQUATIONS A RÉSOUDRE.	CORRECT. D'APL. ET DU $\frac{1}{4}$ DU MÉRIDIEN, aplatissement déduit.
Bréri (mont)...	$H' = 46°47'30''61$	$dH' = +5''23$	$+5''23 = 1083''0\,d\alpha + 7362''6\,dq$	$d\alpha = 0,0042267$; $dq = 0,0000886$
	$P' = -3.14.31,83$	$dZ' = -37,87$	$+37,87 = 8781,2\,d\alpha + 8514,5\,dq$	$\alpha' = 0,007466 = \frac{1}{133,9}$
Opmes (près Clermont).	$H' = 45.42.39,79$	$dH' = +8,97$	$+8,97 = 1337,7\,d\alpha + 11253,4\,dq$	$d\alpha = 0,0000818$; $dq = -0,0001738$
	$P' = -0.45.24,57$	$dZ' = -15,82$	$+15,82 = 1974,5\,d\alpha + 1950,3\,dq$	$\alpha' = 0,01142 = \frac{1}{87,56}$
Montceau (tour)	$H' = 45.35.28,50$	$dH' = +4,50$	$+4,50 = 1352,6\,d\alpha + 11684,7\,dq$	$d\alpha = 0,0001737$; $dq = 0,0001840$
	$P' = -3.1.49,59$	$dZ' = -15,75$	$+15,75 = 7878,4\,d\alpha + 7798,1\,dq$	$\alpha' = 0,004977 = \frac{1}{200,9}$
M[t] Colombier..	$H' = 45.52.55,88$	$dH' = -6,08$	$-6,08 = 1312,1\,d\alpha + 10637,2\,dq$	$d\alpha = 0,0003023$; $dq = -0,0009445$
	$P' = -3.25.17,27$	$dZ' = -18,81$	$+18,81 = 8987,1\,d\alpha + 8850,7\,dq$	$\alpha' = 0,006263 = \frac{1}{159,67}$
Genève (ancien observatoire).	$H' = 46.11.59,74$	$dH' = -0,24$	$-0,24 = 1249,9\,d\alpha + 9493,46\,dq$	$d\alpha = 0,0013621$; $dq = -0,0002047$
	$P' = -3.48.56,92$	$dL' = -16,29$ (*)	$+16,29 = 14023,0\,d\alpha + 13736,92\,dq$	$\alpha' = 0,0046021 = \frac{1}{217,3}$
Marseille.. ...	$H' = 43.17.51,60$	$dH' = -3,08$	$-3,08 = 1112,5\,d\alpha + 19941,6\,dq$	$d\alpha = 0,0049532$; $dq = -0,000431$
	$P' = -3.1.50,30$	$dZ' = -31,17$	$+31,17 = 6713,5\,d\alpha + 7137,7\,dq$	$\alpha' = 0,0081932 = \frac{1}{122,05}$

(*) Cette différence de longitude est affectée du signe —, comme si les longitudes orientales étaient positives.

Les douze équations de ce second tableau, traitées par la méthode des moindres carrés, donnent

$$d\alpha = 0,0042340; \quad dq = -0,00033826;$$

$$\alpha' = \alpha + d\alpha = 0,007474 = \frac{1}{133,8}.$$

Ainsi il est évident que la surface qui comprend toutes les stations combinées deux à deux avec celle de Paris est formée de deux nappes principales, séparées à peu près par le méridien de cet observatoire, et que ces nappes appartiennent à deux ellipsoïdes irréguliers dont les aplatissements sont tellement inégaux, que l'un, à l'occident, est presque nul, et l'autre, à l'orient, d'environ $\frac{1}{134}$. On doit donc inférer de là que la méridienne terrestre, dans notre contrée, est, par l'effet des irrégularités locales, une courbe à double courbure assez prononcée. Enfin il est incontestable que quand la direction du fil à plomb, d'où dépendent essentiellement les valeurs absolues des coordonnées géographiques d'un point de la terre, est troublée, soit par l'attraction de quelque montagne voisine, soit parce que la densité du terrain est plus petite ou plus grande que la densité générale de la croûte terrestre, on ne peut vérifier non-seulement la loi de la variation des degrés des méridiens et des parallèles dans l'hypothèse elliptique, mais en outre la relation qui existe, sans cette cause perturbatrice, entre les azimuts et les longitudes sur un sphéroïde irrégulier peu différent d'une sphère. Ainsi les anomalies qui ressortent des comparaisons dont il s'agit et celle entre Andrate et Mondovi, qui a été signalée par M. Plana, tiennent nécessairement à des variations d'une grande étendue dans la nature du sol de la France et de l'Italie, et les mesures géodésiques, comme celles du pendule à secondes, lorsqu'elles réunissent toutes les conditions requises, sont éminemment propres à attirer l'attention des géologues. (Voyez *Descript. géom. de la France,* tome II, page 627 et suiv.) (*).

(*) Les travaux géodésiques et astronomiques récemment exécutés en Russie sous la direction de M. le général Schubert, et dans d'autres contrées limitrophes, par MM. Gauss, Struve, Tenner, etc., sont aussi de nature à confirmer la loi qui lie entre elles les longueurs des degrés des méridiens dans toute la partie occidentale de l'Europe, et à jeter de nouvelles lumières sur la cause des irrégularités dont elles sont affectées. Enfin la triangulation du royaume des Deux-Siciles par les ingénieurs napolitains procure également de précieux résultats pour le perfectionnement de la géographie, et se lie à celle du reste de l'Italie, comme celle-ci se rattache à l'immense réseau qui couvre la France et la Belgique.

Recherche de la figure de la Terre par la combinaison d'un arc de méridien et d'une autre ligne de plus courte distance perpendiculaire à cet arc.

377. L'auteur de la *Mécanique céleste* propose de déterminer l'ellipsoïde osculateur en un lieu quelconque par la mesure de deux lignes de plus courte distance perpendiculaires entre elles, et dont l'une soit dirigée dans le sens du méridien (art. **378**); mais les calculs, en suivant cette voie, sont si longs et si pénibles, que j'ai dû préférer, dans la pratique, la méthode simple et rigoureuse que je viens d'exposer avec tous les développements qui sont de nature à en faire ressortir les avantages. Cependant, si l'on voulait déduire des deux lignes dont il s'agit l'excentricité de cet ellipsoïde, ne fût-ce que dans le but de multiplier les moyens de vérification, on pourrait substituer à la méthode de l'art. **188** la suivante, qui est plus exacte et plus directe.

Désignons par λ, λ' les latitudes observées aux extrémités nord et sud d'un arc A de méridien, par H la latitude d'un point intermédiaire de cet arc, et, comme à l'ordinaire, par e^2 le carré de l'excentricité de l'ellipsoïde osculateur cherché; par ρ le rayon de courbure du méridien au point H : on aura, d'après l'art. **184**,

$$(1) \qquad \frac{A}{\rho} = \lambda - \lambda' + \tfrac{3}{4} e^2 [(\lambda - \lambda') \cos 2H - \sin(\lambda - \lambda') \cos(\lambda + \lambda')],$$

en supposant l'amplitude $\lambda - \lambda'$ exprimée en parties du rayon, et bornant l'approximation aux termes de l'ordre de l'aplatissement.

D'un autre côté, appelons y, y' les deux portions de la ligne géodésique perpendiculaire à l'arc A au point dont la latitude est H, et N la normale ou le rayon de courbure de cette ligne au même point; enfin désignons par p, p' les longitudes respectives des extrémités de y, y' comptées du méridien A et exprimées également en parties du rayon, on aura (art. **196**),

$$p \cos H = \frac{y}{N} - \frac{1}{3} \frac{y^3}{N^3} \tan^2 H;$$

d'où l'on tire, à très-peu près,

$$(2) \qquad \frac{y}{N} = p \cos H + \tfrac{1}{3} p^3 \sin^2 H \cos H,$$

et pareillement

$$(3) \qquad \frac{y'}{N} = p' \cos H + \tfrac{1}{3} p'^3 \sin^2 H \cos H.$$

Écrivons brièvement ces trois équations ainsi qu'il suit :

$$(1') \qquad \frac{A}{\rho} = \varphi + e^2 q,$$

$$(2') \qquad \frac{y}{N} = \varphi',$$

$$(3') \qquad \frac{y'}{N} = \varphi'',$$

en faisant

$$\varphi = \lambda - \lambda',$$
$$q = \tfrac{3}{4}[(\lambda - \lambda')\cos 2H - \sin(\lambda - \lambda')\cos(\lambda + \lambda')],$$
$$\varphi' = p\cos H + \tfrac{1}{3}p^3 \sin^2 H \cos H,$$
etc.,

et remplaçons ρ, N par leurs valeurs connues; on aura assez exactement, en représentant par R le rayon de l'équateur,

$$(1') \qquad \frac{A(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{R} = \varphi - e^2(\varphi - q),$$

$$(2') \qquad \frac{y(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{R} = \varphi'(1 - e^2 \sin^2 H);$$

ou simplement, en faisant $\varphi - q = \mu, \quad \varphi' \sin^2 H = \mu'$,

$$(1'') \qquad \frac{A(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{R} = \varphi - e^2\mu,$$

$$(2'') \qquad \frac{y(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{R} = \varphi' - e^2\mu';$$

de là

$$(4) \qquad e^2 = \frac{A\varphi' - y\varphi}{A\mu' - y\mu}.$$

Cette valeur de e^2 étant connue, on aura le demi grand axe R par l'une des formules (1″), (2″), et par suite le rayon du pôle.

Il est évident qu'en combinant entre elles les équations (1), (3), on

a également

$$(4') \qquad e^2 = \frac{A\varphi'' - y'\varphi}{A\mu'' - y'\mu};$$

mais, puisque ces deux valeurs de e^2 peuvent ne différer l'une de l'autre que par l'effet des erreurs δp, $\delta p'$ commises respectivement sur les longitudes p, p', il faut en chercher une seule qui soit la plus avantageuse possible, c'est-à-dire traiter par la méthode des moindres carrés les deux équations de condition suivantes :

$$(5) \qquad \delta p = \frac{y\varphi - A\varphi'}{A\cos H} - \frac{e^2(y\mu - A\mu')}{A\cos H},$$

$$(6) \qquad \delta p' = \frac{y'\varphi - A\varphi''}{A\cos H} - \frac{e^2(y'\mu - A\mu'')}{A\cos H}.$$

Tel est le second procédé qui ferait connaître l'ellipsoïde osculateur en un point donné de la Terre; mais il est une dernière remarque à faire à ce sujet, la voici :

La méthode de calcul à employer pour déterminer la longueur d'un arc de perpendiculaire a été exposée au chapitre XI du livre III. Quant à l'amplitude cherchée, il est visible qu'elle est égale à l'angle que forment entre elles les normales des extrémités de la ligne géodésique calculée. Or, par les observations de latitude et de longitude, on connaîtra tant les angles que ces normales font avec le rayon du pôle de la Terre, que celui des deux méridiens extrêmes; il ne s'agira donc plus que de calculer le troisième côté d'un triangle sphérique dont on connaîtra deux côtés et l'angle compris.

Soient, par exemple, H, H' les latitudes des extrémités de l'arc perpendiculaire mesuré, et P leur différence en longitude; on aura, par la propriété du triangle sphérique, et en désignant en outre par U l'amplitude de l'arc dont il s'agit,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} U = \sin^2 \tfrac{1}{2}(H - H') + \cos H \cos H' \sin^2 \tfrac{1}{2} P;$$

ainsi, en divisant par cette amplitude la longueur de l'arc perpendiculaire mesuré, on aurait la longueur du degré moyen. Mais il est plus exact de faire usage de la valeur du premier degré perpendiculaire,

dans la recherche de l'aplatissement (art. **188**); degré qui coïncide sensiblement avec la portion correspondante de la section verticale ayant même direction.

Voici le moyen d'évaluer en général l'amplitude U d'un arc P' perpendiculaire au méridien AP (*fig.* 32), et résultant de la section faite sur le sphéroïde de révolution, par un plan passant par la normale AN.

Par les extrémités A, B de l'arc P', concevons les normales AN, BN' à la surface terrestre, l'oblique BN, et la droite bN parallèle à BN'. D'après cela, si, dans le plan ABN et par le point B, l'on mène l'horizontale BH et la perpendiculaire BR à cette horizontale, l'angle RBA sera l'amplitude de P'. Or cet angle, qu'il s'agit de connaître, est sensiblement égal à celui des deux normales AN, BN qui mesure l'amplitude de la plus courte distance AB. On s'assurera de ce fait ainsi qu'il suit.

D'abord, si par le point R', pris sur la normale BN' et sur la perpendiculaire RR' au plan NBA, l'on mène respectivement à AN et BR les parallèles R'A', R'B', l'angle $B'R'A' = BRA$ sera l'amplitude de la section $AB = P'$. Ensuite si l'on appelle ψ l'angle NBN' formé par la normale BN' et l'oblique BN, angle qu'on trouvera de 8",6 environ dans l'hypothèse de l'art. **188**, il est visible que l'angle $RBR' = \psi'$, et dont le plan est perpendiculaire à NBA, sera, à très-peu près, égal à $\psi \sin V$; V étant l'azimut de AB sur l'horizon de B, et calculé sur la Terre supposée sphérique. Ainsi, pour passer de l'amplitude calculée BR'A' à l'angle B'R'A' ou BRA, il ne s'agit que de faire usage de la formule pour réduire un angle à l'horizon (art. **96**). Soient donc $BR'A' = O$, et $BRA = O'$; on aura, à cause de $B'R'B = \psi' = \psi \sin V$, et d'après l'article cité,

$$O' - O = \left(\frac{\psi'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} O \sin 1'' - \left(\frac{\psi'}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} O \sin 1'';$$

quantité tout à fait insensible, et, dans tous les cas, bien plus petite que l'erreur qui affecte l'angle O, et qui résulte de celles des observations de latitude et de longitude. On peut donc toujours prendre pour amplitude de l'arc de section $AB = P'$, l'angle bNA des deux normales des points extrêmes.

CHAPITRE III.

CONTINUATION DE LA RECHERCHE DE LA FIGURE DE LA TERRE, D'APRÈS LES MESURES GÉODÉSIQUES ET LA THÉORIE DE LAPLACE.

378. Si l'on pouvait satisfaire aux équations de condition qu'expriment les formules relatives à la ligne la plus courte tracée sur une surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe (art. **362**), il s'ensuivrait que la figure de la Terre serait conforme à cette hypothèse; mais jusqu'à présent il n'est aucune opération géodésique, considérée en elle-même, qui ne donne une ellipticité différente. Toutefois, si la surface terrestre, abstraction faite de ses aspérités, est irrégulière, elle s'écarte peu de celle d'une sphère. Il est donc important d'examiner les propriétés d'une ligne géodésique étendue sur un tel sphéroïde.

Clairaut paraît être le premier qui se soit occupé de cette question délicate; mais l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* a donné sur ce sujet important une analyse beaucoup plus complète, et au moyen de laquelle on peut non-seulement décider, d'après des mesures géodésiques prises dans le sens du méridien et suivant des directions perpendiculaires à cette ligne, si la Terre est ou n'est pas un ellipsoïde de révolution, mais encore déterminer autant d'ellipsoïdes osculateurs qu'on a formé de perpendiculaires à la méridienne, et sur lesquels les positions géographiques des objets peu éloignés des points de contact seraient sensiblement les mêmes que sur le globe terrestre. C'est cette analyse que nous allons faire connaître, en suivant, pour arriver aux formules qui en dépendent, la voie qui nous paraîtra se rapprocher le plus de la méthode adoptée dans cet ouvrage.

Méthode pour déterminer la courbe du méridien terrestre.

379. Si la Terre est réellement un sphéroïde irrégulier, le méridien terrestre est une courbe à double courbure, qui cependant doit d'autant moins différer de la courbe produite par l'intersection du plan du méridien céleste et la surface de la Terre, que cette surface s'approche plus de celle de l'ellipsoïde (art. **160**).

Pour déterminer cette courbe, soit $u=0$ l'équation de la surface de la Terre; u étant une fonction des trois coordonnées orthogonales x, y, z, en sorte que $u=f(x, y, z)$; f dénotant le signe d'une fonction.

D'abord on sait, d'après l'art. **160**, que le méridien terrestre est la courbe qui est déterminée par le système des droites menées, par tous les points du méridien céleste, perpendiculairement à la surface du sphéroïde, et que chacune de ces droites ou normales peut être censée parallèle au plan de ce dernier méridien. Soient donc x, y, z les coordonnées du pied d'une de ces normales, et x', y', z' les coordonnées courantes; les équations de cette ligne seront

$$(x' - x) + p(z' - z) = 0,$$
$$(y' - y) + q(z' - z) = 0,$$

puisque l'équation différentielle de la surface du sphéroïde est $dz = pdx + qdy$. Maintenant si

$$z = ax + by + d$$

est l'équation du méridien céleste relatif au zénith du point x, y, z, on aura, dans la supposition que ce plan et la normale sont parallèles, la relation suivante :

$$(1) \qquad ap + bq + 1 = 0;$$

mais, $u=0$ étant l'équation du sphéroïde, on a nécessairement (art. **165**)

$$p = -\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right), \quad q = -\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right);$$

et pour lors la relation (1) prend cette forme,

$$-a\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)-b\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)+1=0,$$

ou

$$(2)\qquad \left(\frac{du}{dz}\right)-a\left(\frac{du}{dx}\right)-b\left(\frac{du}{dy}\right)=0.$$

« Pour avoir les constantes a et b, on supposera connues les coor-
» données du pied de la verticale parallèle à l'axe de rotation de la
» Terre, et celles d'un lieu donné de sa surface. En substituant suc-
» cessivement ces coordonnées dans l'équation précédente, on aura
» deux équations, au moyen desquelles on déterminera a et b. L'é-
» quation précédente, combinée avec celle de la surface $u=0$, don-
» nera la courbe du méridien terrestre qui passe par le lieu donné. »

Si la Terre était un ellipsoïde quelconque, u serait une fonction rationnelle et entière du second degré en xyz; c'est-à-dire que l'on aurait en général

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 \\ + A'x + B'y + C'z \\ + A''xy + B''xz + C''yz \\ + D \end{array}\right\} = u.$$

L'équation (2), dans laquelle $\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ sont des différentielles partielles de u, appartiendrait alors à un plan dont l'intersection avec la surface de la Terre formerait le méridien terrestre; mais, dans le cas général, ce méridien, comme nous l'avons dit, est une courbe à double courbure, et diffère de la ligne déterminée par les mesures géodésiques.

Nous n'expliquerons pas comment on peut tracer cette ligne sur la Terre, parce que l'opération qu'il s'agit de faire à ce sujet est suffisamment indiquée dans les art. 159 et suiv.; mais nous rappellerons que les lignes tracées par les opérations géodésiques ont la propriété d'être les plus courtes que l'on puisse mener sur la surface du sphéroïde : leur premier côté, dont la direction peut être supposée quelconque, est tangent à la surface de la Terre; leur second côté est le

prolongement de cette tangente, plié suivant la verticale; leur troisième côté est de même le prolongement du second côté, plié suivant la verticale, et ainsi de suite.

« Voyons maintenant quelles lumières peuvent donner sur la figure » de la Terre, les mesures géodésiques faites, soit dans le sens des mé» ridiens, soit dans le sens perpendiculaire aux méridiens. On peut » toujours concevoir un ellipsoïde, tangent à chaque point de la sur» face terrestre, et sur lequel les mesures géodésiques, les longitudes » et les latitudes, à partir du point de contingence, dans une petite » étendue, seraient les mêmes qu'à cette surface. Si la surface entière » était celle d'un ellipsoïde, l'ellipsoïde tangent serait partout le même; » mais si, comme on a lieu de le croire, la figure des méridiens n'est » pas elliptique, alors l'ellipsoïde tangent varie d'un pays à l'autre, et » ne peut être déterminé que par des mesures géodésiques faites dans » des sens différents. Il serait très-intéressant de connaître ainsi les » ellipsoïdes osculateurs d'un grand nombre de lieux sur la Terre. »

Équations de la plus courte distance sur la surface de la Terre.

380. « Soit $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = 0$ l'équation de la » surface du sphéroïde que nous supposerons différer très-peu d'une » sphère dont le rayon est l'unité, en sorte que α est un très-petit coeffi» cient dont nous négligerons le carré. u' peut toujours être considéré » comme fonction des deux seules variables x et y; car, en le suppo» sant fonction de x, y, z, on peut en éliminer z, au moyen de » l'équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, » que l'on obtient dans l'hypothèse que la Terre est une sphère. Cela posé, si l'on différentie successivement, par rapport à xyz, l'équation précédente en u, on en tirera

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x - 2\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y - 2\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = 2z;$$

substituant ces valeurs dans les équations

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0,$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddz - \left(\frac{du}{dz}\right) ddx = 0,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) ddz - \left(\frac{du}{dz}\right) ddy = 0,$$

qui sont celles de la ligne la plus courte sur la surface de la Terre (art. **165**), on aura

$$(O)\quad \begin{cases} xd^2y - yd^2x = \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right) d^2y - \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) d^2x, \\ xd^2z - zd^2x = \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right) d^2z, \\ yd^2z - zd^2y = \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) d^2z; \end{cases}$$

nous désignerons, comme à l'ordinaire, cette ligne sous le nom de *ligne géodésique*.

« Nommons r le rayon mené du centre de la Terre à sa surface » (*fig.* 33); θ l'angle que ce rayon fait avec l'axe de rotation que nous » supposerons être celui des z, et φ l'angle que le plan formé par cet » axe et par r fait avec le plan des xz; on aura

$$(A)\qquad x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta; \text{ »}$$

différentiant les deux premières par rapport à r et φ, puis formant les produits xdy, ydx, on obtiendra

$$(1)\qquad xdy - ydx = r^2\sin^2\theta d\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\theta d\varphi.$$

Différentiant la première et la troisième équation (A), en considérant seulement x, z, r et θ comme variables, et formant les produits xdz, zdx, il viendra

$$(2)\qquad xdz - zdx = -r^2\cos\varphi d\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r^2\cos\varphi d\theta.$$

Différentiant pareillement la deuxième et la troisième équation (A), en

prenant y, z, r et θ pour variables, on aura

$$(3) \quad ydz - zdy = -r^2 \sin\varphi d\theta (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r^2 \sin\varphi d\theta.$$

Enfin, multipliant les équations (2) et (3), respectivement par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, on aura, en les ajoutant,

$$(4) \quad (xdz - zdx)\cos\varphi + (ydz - zdy)\sin\varphi = -r^2 d\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -r^2 d\theta.$$

Maintenant, si l'on fait tout varier dans les équations (A), on aura

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin\theta \cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi, \\ dy &= dr\sin\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi + r\cos\theta\sin\varphi d\varphi, \\ dz &= dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Carrant toutes ces équations, ajoutant et réduisant au moyen des équations $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, on obtiendra, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

$$(5) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2.$$

« En considérant ensuite u' comme fonction de x et de y, et dési-
» gnant par h la latitude du point M′ (*fig.* 33), on peut supposer dans
» cette fonction, $r = 1$ et $h = 100^\circ - \theta$, ce qui donne, au lieu des
» équations (A),

$$(B) \quad x = \cos h \cos\varphi, \quad y = \cos h \sin\varphi; \text{ »}$$

et puisque u' est fonction de x, y, il l'est aussi de h et φ; on a donc

$$u' = f(x, y), \quad u' = f(h, \varphi);$$

différentiant ces équations, il vient

$$du' = \left(\frac{du'}{dx}\right) dx + \left(\frac{du'}{dy}\right) dy, \quad du' = \left(\frac{du'}{dh}\right) dh + \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) d\varphi;$$

donc

$$\left(\frac{du'}{dx}\right) dx + \left(\frac{du'}{dy}\right) dy = \left(\frac{du'}{dh}\right) dh + \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) d\varphi:$$

« mais on a, en vertu des équations (B),

$$x^2 + y^2 = \cos^2 h, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \varphi,$$

» d'où l'on tire, par la différentiation,

$$dh = -\frac{(xdx + ydy)}{\sin h \cos h}, \quad d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2} \cdot \cos^2 \varphi.$$

» En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle précédente » en u', et comparant séparément les coefficients de dx et de dy, on » aura

$$\left(\frac{du'}{dx}\right) = -\frac{\cos\varphi}{\sin h}\left(\frac{du'}{dh}\right) - \frac{\sin\varphi}{\cos h}\left(\frac{du'}{d\varphi}\right),$$
$$\left(\frac{du'}{dy}\right) = -\frac{\sin\varphi}{\sin h}\left(\frac{du'}{dh}\right) + \frac{\cos\varphi}{\cos h}\left(\frac{du'}{d\varphi}\right); \text{»}$$

soustrayant la seconde de la première, après avoir multiplié l'une et l'autre respectivement par ddy, ddx, on aura, en faisant attention que les relations (B) donnent $\cos\varphi = \frac{x}{\cos h}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\cos h}$,

$$\text{(C)} \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{du'}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du'}{dy}\right) ddx = &- \frac{\left(\frac{du'}{dh}\right)}{\sin h \cos h}(xddy - yddx) \\ &- \frac{\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h}(xddx + yddy). \end{aligned} \right.$$

Or, en négligeant dans les équations (O) les quantités de l'ordre α, on a

$$xddy - yddx = 0.$$

De plus, les deux équations $xddz - zddx = 0$, $yddz - zddy = 0$, étant multipliées respectivement par zx, zy et ensuite ajoutées entre elles, donnent

$$zddz = z^2 \frac{(xddx + yddy)}{x^2 + y^2}.$$

D'un autre côté, l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ fournit, en la différentiant

deux fois de suite et en regardant dx, dy, dz comme variables,

$$xddx + yddy + zddz + (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,$$

ou, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z + ds^2 = 0.$$

Substituant ici, pour zd^2z, sa valeur précédente, on aura

$$xd^2x + yd^2y + \frac{z^2(xd^2x + yd^2y)}{x^2 + y^2} + ds^2 = 0;$$

ou bien

$$(xd^2x + yd^2y)(x^2 + y^2 + z^2) = -ds^2(x^2 + y^2),$$

ou encore

$$xd^2x + yd^2y = -ds^2 \cos^2 h.$$

Partant, l'équation (C) se réduit à

$$\left(\frac{du'}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du'}{dy}\right) ddx = \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) ds^2.$$

La première des équations (O) donnera ainsi, en l'intégrant,

$$\int (xddy - yddx) = \int \alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) ds^2 = \int d.(xdy - ydx)$$
$$= (xdy - ydx) + \text{const.},$$

c'est-à-dire, à cause de l'équation précédente (1),

$$(p) \qquad r^2 d\varphi \sin^2\theta = cds + \alpha ds \int ds \left(\frac{du'}{d\varphi}\right);$$

c étant une constante arbitraire.

La seconde des équations (O) donne évidemment

$$d.(xdz - zdx) = \alpha \left(\frac{du'}{dx}\right) ddz:$$

si nous reprenons celle obtenue plus haut,

$$zddz = \frac{z^2(xddx + yddy)}{x^2 + y^2},$$

on aura sur-le-champ, en réduisant et en y substituant pour $x^2 + y^2$ et $xddx + yddy$ leurs valeurs trouvées précédemment,

$$ddz = \frac{z(xddx + yddy)}{x^2 + y^2} = - zds^2;$$

mais, à cause de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on a

$$z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{1 - \cos^2 h} = \sin h;$$

donc

$$ddz = - \sin h ds^2;$$

partant

$$d.(xdz - zdx) = - \alpha ds^2 \left(\frac{du'}{dx}\right) \sin h;$$

on a pareillement

$$d.(ydz - zdy) = - \alpha ds^2 \left(\frac{du'}{dy}\right) \sin h.$$

L'équation (4) deviendra, en vertu de ces valeurs intégrées,

$$\begin{aligned} r^2 d\theta = c' ds \sin\varphi + c'' ds \cos\varphi & \\ + \alpha ds \cos\varphi \int ds \left(\frac{du'}{dx}\right) \sin h & \\ + \alpha ds \sin\varphi \int ds \left(\frac{du'}{dy}\right) \sin h; & \end{aligned}$$

et substituant pour $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, $\left(\frac{du'}{dy}\right)$ leurs valeurs précédentes, on aura

$$(q) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 d\theta = c' ds . \sin\varphi + c'' ds . \cos\varphi & \\ - \alpha ds \cos\varphi \int ds \left[\left(\frac{du'}{dh}\right) \cos\varphi + \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \sin\varphi \tang h\right] & \\ - \alpha ds \sin\varphi \int ds \left[\left(\frac{du'}{dh}\right) \sin\varphi - \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \cos\varphi \tang h\right]. & \end{aligned} \right.$$

Recherche de l'expression de l'arc du méridien terrestre.

381. « Considérons d'abord le cas dans lequel le premier côté de
» la ligne géodésique est parallèle au plan correspondant du méridien
» céleste. Dans ce cas, $d\varphi$ est de l'ordre α, ainsi que dr; on a donc,

» en négligeant les quantités de l'ordre α^2 dans l'équation (5),
» $ds = -rd\theta$, l'arc s étant supposé croître de l'équateur aux pôles. »
h exprimant la latitude, il est facile de voir que l'on a

$$\theta = 100^g - h - \left(\frac{dr}{dh}\right),$$

ce qui donne, par la différentiation,

$$d\theta = -dh - d.\left(\frac{dr}{dh}\right).$$

D'ailleurs, à cause de

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = 0, \quad \text{on a} \quad r^2 - 1 - 2\alpha u' = 0,$$

et par conséquent $dr = \alpha \frac{du'}{r}$, ou simplement $dr = \alpha du'$, puisque $r = 1$ à très-peu près. D'un autre côté, puisque

$$r = \sqrt{2\alpha u' + 1} = (1 + 2\alpha u')^{\frac{1}{2}} = 1 + \alpha u',$$

on aura, en substituant dans $ds = -rd\theta$ pour $d\theta$ et r leurs valeurs précédentes,

$$ds = rdh\left[1 + \alpha\left(\frac{d^2u'}{dh^2}\right)\right] = (1 + \alpha u')\,dh\left[1 + \alpha\left(\frac{d^2u'}{dh^2}\right)\right]$$
$$= dh\left[1 + \alpha u' + \alpha\left(\frac{d^2u'}{dh^2}\right)\right],$$

en négligeant toutefois les quantités de l'ordre α^2.

Il suit de là que, si l'on représente par R le rayon de courbure de l'arc du méridien, à la latitude h, auquel cas $\frac{ds}{dh} = \mathrm{R}$, on aura

$$\mathrm{R} = 1 + \alpha u' + \alpha\left(\frac{d^2u'}{dh^2}\right).$$

La valeur de ds étant intégrée, il vient $s = \int \mathrm{R}dh$. Or on sait, par la méthode générale des intégrales approchées (*Calcul intégral* de M. Lacroix, 5[e] édit., n° 230), que

$$\mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y} = \mathrm{Y}'\frac{(a_1 - a)}{1} + \mathrm{Y}''\frac{(a_1 - a)^2}{1.2} + \ldots$$
$$= \mathrm{R}(a_1 - a) + \frac{d\mathrm{R}}{dh}\frac{(a_1 - a)^2}{1.2} + \ldots$$

Par conséquent, entre les limites h et h_1 qui représentent les latitudes des deux extrémités de l'arc s, on aura

$$s = \left[1 + \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{d^2u'}{dh^2}\right)\right]\varepsilon + \frac{\alpha\varepsilon^2}{1.2}\left[\left(\frac{du'_1}{dh}\right) + \left(\frac{d^3u'_1}{dh^3}\right)\right] + \ldots$$
$$= \varepsilon + \alpha\varepsilon\left[u'_1 + \left(\frac{d^2u'_1}{dh^2}\right)\right] + \frac{\alpha\varepsilon^2}{1.2}\left[\left(\frac{du'_1}{dh}\right) + \left(\frac{d^3u'_1}{dh^3}\right)\right] + \ldots;$$

ε désignant $h - h_1$, c'est-à-dire la différence en latitude des deux points extrêmes de l'arc s, et u'_1 étant ici la valeur de u' à l'origine de s.

Examen de l'écart du méridien terrestre, du plan d'un même méridien céleste.

382. « Lorsque la Terre est un solide de révolution, la ligne géo-
» désique est toujours dans le plan d'un même méridien; elle s'en
» écarte si les parallèles ne sont pas des cercles: l'observation de cet
» écart peut donc nous éclairer sur ce point important de la théorie
» de la Terre. Reprenons l'équation (p) et observons que, dans le cas
» présent, $d\varphi$ et la constante c de cette équation sont de l'ordre α, et
» que l'on peut y supposer $r = 1$, $ds = dh$ et $\theta = 100^g - h$; on aura ainsi

$$(p') \qquad d\varphi \cos^2 h = cdh + \alpha dh \int dh \left(\frac{du'}{d\varphi}\right).$$

» Maintenant, si l'on nomme P l'angle que fait le plan du méridien
» céleste avec celui des xz, d'où l'on compte l'origine de l'angle φ, on
» aura visiblement $\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tang} P$ (*fig.* 34), x', y', z' étant les coordonnées
» de ce méridien, dont on a vu ci-dessus que l'équation différentielle est

$$dz' = adx' + bdy' : »$$

en la comparant à la précédente, qui peut se mettre sous la forme

$$0 = dy' - \operatorname{tang} P dx',$$

on voit que a et b sont infinis. En effet, dans celle-ci la différentielle dz'

est censée n'avoir disparu que parce que son coefficient = o; on peut donc écrire

$$0 \times dz' = dy' - \text{tang}\, P dx',$$

ou bien

$$dz' = -\frac{\text{tang}\, P}{0} dx' + \frac{1}{0} dy';$$

on a donc

$$a = -\frac{\text{tang}\, P}{0}, \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{0}.$$

Divisant ces deux dernières équations l'une par l'autre, on obtient

$$-\frac{a}{b} = \text{tang}\, P;$$

et puisque a et b sont infinis, l'équation (2) de l'art. **379** se réduit à

$$a\left(\frac{du}{dx}\right) + b\left(\frac{du}{dy}\right) = 0, \quad \text{ou bien à } \frac{a}{b}\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right) = 0;$$

donc

$$\left(\frac{du}{dx}\right) \text{tang}\, P - \left(\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Éliminant les coefficients différentiels dont nous avons trouvé la valeur, on tirera

$$0 = x\, \text{tang}\, P - y - \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right) \text{tang}\, P + \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right).$$

On peut supposer $P = \varphi$ dans les termes multipliés par α; de plus, $\frac{y}{x} = \text{tang}\, \varphi$; on a donc, en divisant par x, l'équation précédente,

$$\text{tang}\, \varphi - \text{tang}\, P = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) - \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right) \text{tang}\, P}{\cos h \cos \varphi} = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) \cos \varphi - \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right) \sin \varphi}{\cos h \cos \varphi \cos \varphi};$$

substituant pour $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, $\left(\frac{du'}{dy}\right)$, leurs valeurs (art. **380**), on aura, après la réduction qui se présente naturellement,

$$\text{tang}\, \varphi - \text{tang}\, P = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{\cos^2 h \cos^2 \varphi} = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h \cos^2 \varphi},$$

ou bien

$$\cos h \cos \varphi (\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} P) = \frac{\alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos h \cos \varphi}; \qquad (D)$$

mais, par les formules trigonométriques connues,

$$\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} P = \frac{\sin (\varphi - P)}{\cos \varphi \cos P} = \frac{\sin (\varphi - P)}{\cos \varphi \cos \varphi};$$

à cause de $\cos P = \cos \varphi$, à très-peu près; donc l'équation (D) deviendra, réduction faite,

$$\sin (\varphi - P) = \frac{\alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h}, \quad \text{ou } \varphi - P = \frac{\alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h},$$

puisque $\varphi - P$ est un très-petit arc.

Il est facile de voir, en considérant les arcs PM, PM′ (*fig.* 34) comme des portions de circonférence, que l'on a $MM' = (\varphi - P) \cos h$; c'est la distance de l'origine de la courbe au plan du méridien céleste; et comme le premier côté de la ligne géodésique est supposé parallèle au plan de ce méridien, les différentielles de l'angle P et de la distance dont on vient de parler doivent être nulles à cette origine : on a donc à ce point

$$d.(\varphi - P) \cos h = d\varphi \cos h - (\varphi - P) \sin h \, dh = 0; \qquad (E)$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{dh} = (\varphi - P) \operatorname{tang} h;$$

et en éliminant $\varphi - P$ à l'aide de sa valeur précédente, on a

$$\frac{d\varphi}{dh} = (\varphi - P) \operatorname{tang} h = \frac{\alpha \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \operatorname{tang} h}{\cos^2 h}.$$

D'un autre côté, l'équation (p') donne

$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{c}{\cos^2 h} + \frac{\alpha \int dh \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h};$$

donc

$$\frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} h}{\cos^2 h}=\frac{c}{\cos^2 h}+\frac{\alpha\int dh\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h};$$

donc, à cause que h'_1 et h_1 se rapportent à l'origine de l'arc s,

$$c=\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} h_1;$$

et enfin

$$\frac{d\varphi}{dh}=\frac{\alpha\left(\frac{du_1}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} h_1}{\cos^2 h}+\frac{\alpha\int dh\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h}. \qquad \text{(F)}$$

Il est visible qu'à l'extrémité q de l'arc mesuré, le côté mq de la courbe fait avec le plan du méridien céleste mn, un angle nmq à très-peu près égal à $\frac{nq}{mn}$, puisque l'on peut prendre l'arc pour la tangente, dans le cas actuel; on a donc

$$\frac{nq}{mn}=\frac{d.(\varphi-\text{P})\cos h}{dh},$$

P étant supposé constant dans la différentiation; en désignant donc cet angle azimutal par ϖ, on aura, en vertu de l'équation (E),

$$\varpi=\frac{d\varphi}{dh}\cos h-(\varphi-\text{P})\sin h,$$

expression dans laquelle il faudrait remplacer $\frac{d\varphi}{dh}$ par sa valeur précédente, éliminer $\varphi-\text{P}$ et effectuer l'intégration indiquée pour avoir la valeur la plus simple de ϖ; ce qui donnerait en définitive

$$\varpi=-\frac{\alpha\varepsilon\operatorname{tang} h}{\cos h}\left[\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} h+\left(\frac{d^2u'}{d\varphi dh}\right)\right];$$

mais c'est à quoi nous allons parvenir plus promptement.

Expression de la différence en longitude des deux méridiens célestes passant par les extrémités d'un arc du méridien terrestre, et de l'angle azimutal du dernier côté de cet arc.

383. « Pour avoir la différence en longitude des deux méridiens » correspondants aux extrémités de l'arc, nous observerons que » u'_1, P_1, h_1, φ_1 étant les valeurs de u', P, h et φ à la première ex- » trémité, on a, en vertu de ce qui précède,

$$\varphi_1 - P_1 = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h_1}, \quad \varphi - P = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h}. \text{ »} \qquad (G)$$

Mais à très-peu près $\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang h_1}{\cos^2 h_1}$; $c = \alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang h_1$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus; et comme on peut faire $d\varphi = \varphi - \varphi_1$, $dh = h - h_1 = \varepsilon$, on a

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{c.\varepsilon}{\cos^2 h_1};$$

par conséquent si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (G), on aura

$$P - P_1 - (\varphi - \varphi_1) = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h_1} - \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h};$$

et si on élimine $(\varphi - \varphi_1)$, on obtiendra

$$P - P_1 = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h_1} - \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h} - \frac{\alpha\varepsilon\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang h_1}{\cos^2 h_1}$$

$$= -\frac{\alpha\varepsilon\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang h_1}{\cos^2 h_1} - \frac{\alpha}{\cos^2 h_1}\left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right) - \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\right],$$

à cause que $\cos h = \cos h_1$ à fort peu près.

Mais

$$\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right) - \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) = \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi dh}\right) dh = \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi dh}\right)\varepsilon;$$

donc

$$P - P_1 = -\frac{\alpha\varepsilon}{\cos^2 h_1}\left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} h_1 + \left(\frac{ddu_1}{d\varphi dh}\right)\right].$$

Enfin si on nomme, comme ci-dessus, ϖ l'azimut du dernier côté de l'arc du méridien, et qu'on fasse attention à la relation trouvée (art. **196**) entre cet angle et la longitude $P - P_1$, on aura

$$(P - P_1)\sin h_1 = \varpi,$$

et par conséquent

$$\varpi = -\frac{\alpha\varepsilon \operatorname{tang} h}{\cos h}\left[\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} h + \left(\frac{d^2u'}{d\varphi dh}\right)\right];$$

» les valeurs de h, $\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$ et $\frac{d^2u}{d\varphi dh}$ devant se rapporter, pour plus d'exac-
» titude, au milieu de l'arc mesuré. L'angle ϖ doit être supposé positif,
» lorsqu'il s'écarte du méridien, dans le sens des accroissements de φ.

» Ainsi l'on peut, par l'observation seule, indépendamment de la
» connaissance de la figure de la Terre, déterminer la différence en
» longitude des méridiens correspondants aux extrémités de l'arc
» mesuré; et si la valeur de l'angle ϖ est telle qu'on ne puisse pas l'at-
» tribuer aux erreurs des observations, on sera sûr que la Terre n'est
» pas un sphéroïde de révolution. »

Considérations relatives à la perpendiculaire à la méridienne; différence en latitude des deux extrémités de cet arc.

384. « Considérons maintenant le cas où le côté de la ligne géodé-
» sique est perpendiculaire au plan correspondant du méridien céleste.
» Si l'on prend ce plan pour celui des xz, le cosinus de l'angle formé
» par ce côté sur ce plan sera $\frac{\sqrt{dx + z^2}}{ds}$: » pour le démontrer, soit mm' (*fig.* 35) le premier côté de la ligne géodésique perpendiculaire au plan du méridien PE; le second côté $m'm'' = ds$ formera sur ce plan l'angle dont il vient d'être parlé; car, si l'on abaisse sur le plan P'E' parallèle à PE, une perpendiculaire $m''p$ qui sera par conséquent une horizontale, l'angle $pm'm''$ sera évidemment celui que ds fera avec

P′E′ ou PE. Cela posé, si par le point m' l'on mène la petite horizontale dx, et par le point p la verticale dz, on aura, par la propriété du triangle rectangle, $pm' = \sqrt{dx^2 + dz^2}$, et le triangle rectangle $m'pm''$ donnera, en désignant le rayon des tables par 1,

$$ds : 1 :: pm' = \sqrt{dx^2 + dz^2} : \cos pm'm'' = \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{ds};$$

mais ce cosinus est nul à l'origine m, puisque mm' est perpendiculaire au plan PE; donc $dx = 0$, $dz = 0$, et l'on voit en outre que $dy = ds$, ou que $\frac{dy}{ds} = 1$.

Il suit de là, et des équations (A), que

$$d.r \sin\theta \cos\varphi = 0, \quad d.r\cos\theta = 0;$$

différentiant ces équations en faisant tout varier, et éliminant dr entre les deux résultats, on obtiendra

$$rd\theta = r\sin\theta\cos\theta \operatorname{tang}\varphi d\varphi;$$

mais l'équation (5) ci-dessus donne, à très-peu près, $ds = rd\varphi \sin\theta$; donc, si l'on divise la précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\operatorname{tang}\varphi \cos\theta}{r}.$$

« La constante c'' de l'équation (q) est égale à la valeur de $xdz - zdx$
» à l'origine; mais nous venons de voir qu'à ce point, $dx = 0$, $dz = 0$;
» donc cette constante est nulle, et l'équation (q) donne à l'origine

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{c'}{r^2} \sin\varphi; \text{ »}$$

égalant cette valeur à la précédente, on obtient, à cause de $\operatorname{tang}\varphi = \sin\varphi$, du moins à très-peu près,

$$c' = r_{,} \cos\theta_{,} = r_{,} \sin h_{,},$$

« les quantités $r_{,}$ et $\theta_{,}$ étant relatives à l'origine. Partant, si l'on con-

» sidère qu'à cette origine, l'angle φ est ce que nous avons nommé
» précédemment $\varphi_1 - P_1$, et dont nous avons trouvé la valeur égale à
» $\dfrac{\alpha\left(\dfrac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h_1}$, on aura à ce point

$$\frac{d\theta_1}{ds} = \alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\frac{\sin h_1}{\cos^2 h_1}, »$$

en faisant toutefois $r_1 = 1$.

Voyons, d'après ces considérations, ce que devient l'équation (q); d'abord, puisque $c'' = 0$ et que φ est de l'ordre α, on a $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, et alors l'équation (q) se réduira, en rejetant les quantités de l'ordre α^2, à

$$r^2 d\theta = c'ds.\varphi - \alpha ds \int ds\left(\frac{du'_1}{dh}\right).$$

Différentiant par rapport à φ, divisant tout par ds et remettant pour c' sa valeur précédente, on aura

$$\text{(H)}\qquad \frac{dd\theta_1}{ds^2} = \frac{\cos\theta_1}{r_1}\frac{d\varphi_1}{ds} - \alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right);$$

mais l'équation (5) donnant assez exactement $ds = r_1 d\varphi_1 \sin\theta_1$, on a à l'origine

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{1}{r_1 \sin\theta_1};$$

et alors, en négligeant les termes de l'ordre α, le coefficient différentiel $\frac{dd\theta_1}{ds^2}$ devient

$$\frac{dd\theta_1}{ds^2} = \operatorname{tang} h_1.$$

L'équation $\theta = 100^g - h - \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right)$ donne $h = 100^\circ - \theta - \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right)$; si donc on développe h suivant les puissances ascendantes de s, c'est-à-dire de l'accroissement de l'arc perpendiculaire au méridien, on aura, par le théorème de Maclaurin,

$$h = h_1 + \frac{dh_1}{ds}s + \frac{d^2h_1}{1.2.ds^2}s^2 + \ldots\ldots$$
$$= h_1 - \frac{d\theta_1}{ds}s - \alpha\left(\frac{ddu'_1}{dh\,ds}\right)s - \tfrac{1}{2}\frac{dd\theta_1}{ds^2}s^2;$$

en ne conservant parmi les termes de l'ordre s^2, que ceux qui sont indépendants de α.

D'ailleurs, à cause de $ds = r_1 \sin\theta_1 d\varphi$, de $\sin\theta_1 = \cos h_1$ et de $r_1 = 1$ à peu près, on aura

$$\frac{1}{ds} = \frac{1}{d\varphi \cos h_1};$$

et partant,

$$h - h_1 = -s\frac{d\theta_1}{ds} - \tfrac{1}{2}s^2\frac{dd\theta_1}{ds^2} - \frac{\alpha s}{\cos h_1}\cdot\left(\frac{ddu'_1}{dhd\varphi}\right).$$

Mais nous avons vu que

$$\frac{d\theta_1}{ds} = \alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\frac{\tang h_1}{\cos h_1}, \quad \text{et} \quad \frac{dd\theta_1}{ds^2} = \tang h_1;$$

donc l'équation ci-dessus deviendra

$$h - h_1 = -\frac{\alpha s}{\cos h_1}\left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\tang h_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi dh}\right)\right] - \tfrac{1}{2}s^2 \tang h_1.$$

« La différence des latitudes aux deux extrémités de l'arc mesuré » fera donc connaître la fonction

$$-\frac{\alpha s}{\cos h_1}\left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\tang h_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi dh}\right)\right];$$

» il est remarquable que, pour le même arc mesuré dans le sens du » méridien, cette fonction est, par ce qui précède, égale à $\frac{\varpi}{\tang h_1}$; elle » pourra être ainsi déterminée de ces deux manières, et l'on pourra » juger si ces valeurs trouvées, soit de la différence des latitudes, soit » de l'angle azimutal ϖ, sont dues aux erreurs des observations, ou » à l'excentricité des parallèles terrestres. »

Expression de la différence en longitude des deux extrémités de l'arc terrestre perpendiculaire au méridien.

385. φ étant évidemment fonction de l'arc mesuré dans le sens perpendiculaire au méridien, et φ étant ce que devient φ_1 lorsque cet arc reçoit un accroissement s, on aura, comme ci-dessus, en ne conservant que la première puissance de s, et remarquant que

$$\sin\theta = \cos\left[h + \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right)\right] = \cos h\left[1 - \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right)\tang h\right];$$

on aura, disons-nous,

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{sd\varphi_1}{ds} = \frac{s}{r_1 \sin\theta_1} = \frac{s}{\cos h_1}\left[1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right)\operatorname{tang} h_1\right].$$

$\varphi - \varphi_1$ n'est pas la différence en longitude des deux extrémités de l'arc s; cette différence est égale à $P - P_1$; or on a, par ce qui précède (art. **383**),

$$\varphi - P = \frac{\alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h} \quad \text{et} \quad \varphi_1 - P_1 = \frac{\alpha\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)}{\cos^2 h_1};$$

donc, à cause que $h = h_1$ à peu de chose près,

$$(\varphi - P) - (\varphi_1 - P_1) = \frac{\alpha\left[\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) - \left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)\right]}{\cos^2 h_1};$$

mais $\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$ étant ce que devient $\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right)$ lorsque l'arc en question reçoit un accroissement s, on a, par le théorème connu,

$$\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) - \left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right) = s\left(\frac{d^2u'_1}{d\varphi ds}\right) + \ldots,$$

partant

$$\varphi - P - (\varphi_1 - P_1) = \frac{\alpha . s\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi ds}\right)}{\cos^2 h_1}.$$

D'un autre côté, puisque $s\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{s}{\cos h_1}$, on a $\frac{s}{ds} = \frac{s}{d\varphi_1 \cos h_1}$, et par conséquent

$$\varphi - P - (\varphi_1 - P_1) = \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right).s}{\cos^3 h_1};$$

enfin

$$(\text{L}) \quad \left\{\begin{aligned} P - P_1 &= (\varphi - \varphi_1) - \frac{\alpha\left(\frac{d^2u'_1}{d\varphi^2}\right).s}{\cos^3 h_1} \\ &= \frac{s}{\cos h_1}\left[1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right)\operatorname{tang} h_1 - \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1}\right].\end{aligned}\right.$$

« Pour plus d'exactitude, il faut ajouter à cette valeur de $P - P_1$
» le terme dépendant de s^3 et indépendant de α, que l'on obtient
» dans l'hypothèse de la Terre sphérique ; ce terme est égal à
» $-\frac{1}{3}s^3\frac{\tang^2 h_1}{\cos h_1}$ (art. **196**); ainsi l'on a, en parties du rayon,

$$P - P_1 = \frac{s}{\cos h_1}\left[1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right).\tang h_1 - \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1} - \frac{1}{3}s^2 \tang^2 h_1\right].»$$

Détermination de l'angle azimutal à l'extrémité de l'arc perpendiculaire au méridien.

386. La différence de longitude que nous venons de déterminer analytiquement est évidemment donnée par la résolution en série d'un triangle sphérique rectangle dans lequel on connaît les deux côtés de l'angle droit, et dont l'un est très-petit par rapport au rayon de la sphère (art. **196**); or, en désignant par R ce rayon, il est clair qu'à cause de

$$P - P_1 = \frac{s}{R\cos h} - \frac{1}{3}\frac{s^3}{R^3}\tang^2 h,$$

et de la valeur ci-dessus de $P - P_1$, l'on a, dans le sens perpendiculaire au méridien,

$$R = 1 + \alpha u' - \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right)\tang h - \frac{\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h};$$

on peut donc conclure de là et de l'article cité que l'angle azimutal à l'extrémité de cette perpendiculaire est

$$A = 100^g - s\tang h_1\left[1 - \alpha u'_1 + \alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right).\tang h_1 - \frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1} - \frac{1}{3}s^2\left(\frac{1}{2} + \tang^2 h_1\right)\right];$$

c'est en effet ce que Laplace a obtenu par une analyse semblable à celle qui l'a conduit à la valeur précédente de la différence de longitude.

Recherche de l'expression du rayon osculateur d'une ligne géodésique quelconque.

387. « Le rayon osculateur de la ligne géodésique formant un » angle quelconque avec le plan du méridien, est égal à

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2 + (ddy)^2 + (ddz)^2}},$$

» *ds* étant constant (*Théorie des courbes à double courbure*, par » M. Lacroix, *Calcul différentiel*, tome I, ou la *Correspondance sur* » *l'École Polytechnique*, tome III, page 36). L'équation du sphéroïde » $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u'$ donne.

$$xddx + yddy + zddz = -ds^2 + \alpha ddu';$$

» si l'on ajoute le carré de cette équation aux carrés des équations (O), » on aura, en négligeant, comme à l'ordinaire, les termes de l'ordre α^2,

$$(x^2 + y^2 + z^2).[(ddx)^2 + (ddy)^2 + (ddz)^2] = ds^4 - 2\alpha ds^2 . ddu'; »$$

or, à cause de $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u'$, l'équation précédente peut être mise sous la forme

$$\frac{1 + 2\alpha u'}{1 - 2\alpha \frac{ddu'}{ds^2}} = \frac{ds^4}{(ddx)^2 + (ddy)^2 + (ddz)^2} = R^2;$$

tirant la racine carrée, on aura

$$(1 + 2\alpha u')^{\frac{1}{2}} \left(1 - 2\alpha \frac{ddu'}{ds^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = R;$$

et enfin

$$R = 1 + \alpha u' + \alpha \frac{ddu'}{ds^2}.$$

Dans le sens du méridien on a, comme on l'a déjà observé, $ds = dh$;

ainsi

$$\alpha.\frac{ddu'}{ds^2}=\alpha.\left(\frac{ddu'}{dh^2}\right);$$

et partant, comme à l'art. **381**,

$$R=1+\alpha u'+\alpha\left(\frac{ddu'}{dh^2}\right).$$

Dans le sens perpendiculaire au méridien on a, par ce qui précède,

$$\alpha\frac{ddu'_1}{ds^2}=\frac{\alpha.\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1}-\alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right)\operatorname{tang} h_1;$$

partant, et de même qu'à l'art. précédent,

$$R=1+\alpha u'_1-\alpha\left(\frac{du'_1}{dh}\right)\operatorname{tang} h_1+\frac{\alpha\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1}.$$

Maintenant, si l'on se rappelle que $u'=f(\varphi, h)$, on aura

$$du'=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)d\varphi+\left(\frac{du'}{dh}\right)dh;$$

passant à la différentielle seconde, en faisant tout varier, il viendra

$$\begin{aligned}ddu'&=d.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)d\varphi+\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)dd\varphi+d.\left(\frac{du'}{dh}\right)dh+\left(\frac{du'}{dh}\right)ddh\\&=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)dd\varphi+\left(\frac{du'}{dh}\right)ddh+\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)d\varphi^2+\left(\frac{ddu'}{dh^2}\right)dh^2+2\left(\frac{ddu'}{d\varphi dh}\right)d\varphi dh,\end{aligned}$$

et divisant tout par ds^2, on aura

$$\frac{ddu'}{ds^2}=\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\frac{dd\varphi}{ds^2}+\left(\frac{du'}{dh}\right)\frac{ddh}{ds^2}+\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)\frac{d\varphi^2}{ds^2}+2\left(\frac{ddu'}{d\varphi dh}\right)\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{dh}{ds}+\left(\frac{ddu'}{dh^2}\right)\cdot\frac{dh}{ds}.$$

« Nommons A l'angle que le premier côté de la ligne géodésique
» forme avec le plan correspondant du méridien céleste; on aura,
» dans l'hypothèse de la Terre sphérique, ces équations différen-
» tielles

$$\frac{d\varphi_1}{ds}=\frac{\sin A}{\cos h_1},\quad \frac{dd\varphi_1}{ds^2}=\frac{2\sin A\cos A}{\cos h_1}.\operatorname{tang} h_1;$$
$$\frac{dh_1}{ds}=\cos A,\quad \frac{ddh_1}{ds^2}=-\sin^2 A.\operatorname{tang} h_1,$$

» démontrées à l'art. **195**.

» De là, la valeur précédente de $\frac{ddu'}{ds^2}$ devient

$$\frac{ddu'_1}{ds^2} = 2 \cdot \frac{\sin A \cos A}{\cos h_1}\left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\operatorname{tang} h_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi dh}\right)\right] - \sin^2 A.\operatorname{tang} h_1 \left(\frac{du'_1}{dh}\right) + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right).\frac{\sin^2 A}{\cos^2 h_1} + \left(\frac{ddu'_1}{dh^2}\right).\cos^2 A\,;$$

» le rayon osculateur R dans le sens de cette ligne géodésique, est
» donc

$$R = 1 + \alpha u'_1 + \alpha \frac{ddu'_1}{d\varphi^2} = 1 + \alpha u'_1 + 2\alpha \frac{\sin A.\cos A}{\cos h_1} \times \left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\operatorname{tang} h_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi.dh}\right)\right] - \alpha \sin^2 A.\operatorname{tang} h_1 \left(\frac{du'_1}{dh}\right) + \alpha\left(\frac{ddu'_1}{ds^2}\right)\cdot\frac{\sin^2.A}{\cos^2 h_1} + \alpha\left(\frac{ddu'_1}{dh^2}\right).\cos^2 A.$$

» Soient, pour abréger,

$$K = 1 + \alpha u'_1 - \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} h_1 \left(\frac{du'_1}{dh}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha.\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1} + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{ddu'_1}{dh^2}\right);$$

$$M = \frac{\alpha}{\cos h_1}\left[\left(\frac{du'_1}{d\varphi}\right).\operatorname{tang} h_1 + \left(\frac{ddu'_1}{d\varphi dh}\right)\right],$$

$$N = \frac{\alpha}{2}.\operatorname{tang} h_1\left(\frac{du'_1}{dh}\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\left(\frac{ddu'_1}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h_1} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{ddu'_1}{dh^2}\right);$$

» on aura

$$R = K + M.\sin 2A + N.\cos 2A.$$

» Les observations des angles azimutaux, et de la différence des
» latitudes aux extrémités des deux lignes géodésiques mesurées, l'une
» dans le sens du méridien, l'autre dans le sens perpendiculaire au
» méridien, feront connaître, par ce qui précède, les valeurs de
» M, N et K; car les observations donnent les rayons osculateurs
» dans ces deux sens. Soient R' et R'' ces rayons; on aura

$$K = \frac{R' + R''}{2}, \quad N = \frac{R' - R''}{2},$$

» et la valeur de M sera déterminée, soit par l'azimut de l'extrémité

» de l'arc mesuré dans le sens du méridien, soit par la différence en » latitude des deux extrémités de l'arc mesuré dans le sens perpen- » diculaire au méridien. On aura ainsi le rayon osculateur de la ligne » géodésique, dont le premier côté forme un angle quelconque avec » le plan du méridien. »

Si l'on nomme 2E un angle dont la tangente $= \frac{M}{N}$, on aura

$$R = K + M \sin 2A + N . \cos 2A = K + N (\text{tang } 2E \sin 2A + \cos 2A):$$

mais $\text{tang } 2E = \frac{\sin 2E}{\cos 2E}$; donc

$$R = K + \frac{N}{\cos 2E} (\sin 2E \sin 2A + \cos 2E \cos 2A)$$
$$= K + \frac{N}{\cos 2E} \cos (2A - 2E).$$

D'un autre côté, puisque $\text{tang } 2E = \frac{M}{N}$ par hypothèse, on a

$$\frac{\sin 2E}{\cos 2E} = \frac{M}{N}, \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos^2 2E}{\cos^2 2E} = \frac{M^2}{N^2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\cos^2 2E} = \frac{M^2 + N^2}{N^2},$$

et ensuite

$$\cos 2E = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}};$$

ainsi donc

$$R = K + \cos (2A - 2E) \sqrt{M^2 + N^2}. \qquad (m)$$

Le plus grand rayon osculateur r' répond à $A = E$, puisque l'on a

$$r' = K + \sqrt{M^2 + N^2}.$$

Le plus petit rayon osculateur r répond $A = 100^g + E$, puisque l'on a

$$r = K - \sqrt{M^2 + N^2};$$

par conséquent

$$\frac{r' - r}{2} = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad \frac{r' + r}{2} = K.$$

Ces valeurs étant introduites dans l'équation (m) précédente, on aura

$$R = \frac{r+r'}{2} + \frac{r'-r}{2} \cos 2(A-E);$$

et puisque

$$\cos 2(A-E) = \cos^2(A-E) - \sin^2(A-E) = 2\cos^2(A-E) - 1,$$

il s'ensuit que

$$R = r + (r'-r)\cos^2(A-E),$$

$A - E$ étant l'angle que la ligne géodésique correspondante à R forme avec celle qui correspond à r'.

Détermination du rayon de l'ellipsoïde osculateur.

388. « Nous avons déjà observé qu'à chaque point de la surface de » la Terre, on peut concevoir un ellipsoïde osculateur sur lequel les » degrés, dans tout les sens, sont sensiblement les mêmes dans une » petite étendue autour du point d'osculation. »

Cherchons alors l'expression du rayon de cet ellipsoïde dont l'équation est généralement de la forme

$$x^2 + my^2 + nz^2 = 1,$$

en prenant pour unité l'un de ses trois axes, savoir, celui qui répond à $y = 0$, $z = 0$. D'abord, si l'on ajoute de part et d'autre $x^2 + y^2$, on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + (1-m)y^2 + (1-n)z^2,$$

et si l'on substitue dans le second membre, pour y et z, leurs valeurs en fonction de θ et φ (art. 380), il viendra

$$r^2 = 1 + (1-m)r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (1-n)r^2\cos^2\theta;$$

d'ou l'on tire a tres-peu pres

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}(1-m)\sin^2\theta\sin^2\varphi + \tfrac{1}{2}(1-n)\cos^2\theta,$$

puisque l'ellipsoïde différant très-peu de la sphère, $1-m$ et $1-n$ sont de l'ordre de l'aplatissement α. Ensuite θ pouvant, dans ce cas, être remplacé par $100^G - h$, on a, à l'aide d'une transformation qui n'offre aucune difficulté,

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}(1-m)\sin^2\varphi - \sin^2 h\left[\tfrac{1}{4}(1-m) - \tfrac{1}{2}(1-n) - \tfrac{1}{4}(1-m)\cos 2\varphi\right].$$

Soit maintenant

$$\tfrac{1}{4}(1-m) = -\alpha\mu, \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{4}(1-m) - \tfrac{1}{2}(1-n) = \alpha,$$

on aura

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(n-1)}{1+\mu}, \qquad \mu = \frac{1-m}{2(1-n)-(1-m)},$$

et la valeur précédente de r, en rapportant d'ailleurs les longitudes à un méridien autre que celui d'où l'on compte l'angle φ, pourra définitivement prendre cette forme

$$r = 1 + \alpha\mu\cos 2(\varphi + \epsilon) - \alpha\sin^2 h\,[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)]:$$

telle est l'expression du rayon de l'ellipsoïde osculateur qu'il fallait trouver, laquelle contient le terme $+\alpha\mu\cos 2(\varphi+\epsilon)$, que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* a, ce nous semble, omis par distraction.

Faisons

$$u' = +\mu\cos 2(\varphi + \epsilon) - \sin^2 h\,[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)],$$

on aura successivement

$$\left(\frac{du'}{dh}\right) = -\sin 2h\,[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)],$$
$$\left(\frac{ddu'}{dh^2}\right) = -2\cos 2h\,[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)],$$
$$\left(\frac{dddu'}{dh^3}\right) = 4\sin 2h\,[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)];$$

et par conséquent

$$u' + \left(\frac{d^2u'}{dh^2}\right) = -[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)](\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2h) + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon),$$
$$\left(\frac{du'}{dh}\right) + \left(\frac{d^3u'}{dh^3}\right) = 3\sin 2h\,[1 + \mu\cos 2(\varphi + \epsilon)];$$

donc l'expression de l'arc mesuré dans le sens du méridien sera (art. **381**)

$$\varepsilon - \frac{\alpha\varepsilon}{2}[1 + \mu \cos 2(\varphi + 6)].(1 + 3\cos 2h - 3\varepsilon.\sin 2h) + \alpha\varepsilon\mu \cos 2(\varphi+6).$$

« Si l'arc mesuré est considérable, et si l'on a observé, comme en » France, la latitude de quelques points intermédiaires entre les ex- » trêmes, on aura, par ces mesures, et la grandeur du rayon pris pour » unité, et la valeur de $\alpha[1 + \mu \cos 2(\varphi + 6)]$. » On a de plus, en différentiant la valeur de u', d'abord par rapport à φ, ensuite par rapport à h,

$$(n) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) &= -2\mu \cos^2 h \sin 2(\varphi + 6), \\ \left(\frac{ddu'}{d\varphi dh}\right) &= +2\mu \sin 2h \sin 2(\varphi + 6); \end{aligned} \right.$$

ainsi la dernière valeur de ϖ (art. **382**) deviendra, toutes réductions faites,

$$\varpi = -2\alpha\varepsilon\mu \operatorname{tang} h \sin h \sin 2(\varphi + 6).$$

L'observation des angles azimutaux aux deux extrémités de l'arc fera donc connaître $\alpha\mu.\sin 2(\varphi + 6)$; et si l'on différentie la première équation (n), on aura

$$\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right) = -4\mu \cos^2.h \cos 2(\varphi + 6),$$

et par conséquent

$$\frac{\alpha\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h} = -4\alpha\mu \cos 2(\varphi + 6);$$

or, le rayon osculateur, dans le sens de la perpendiculaire à la méridienne, étant

$$R = 1 + \alpha u' - \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right) \operatorname{tang} h + \frac{\alpha\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h},$$

on aura, en éliminant les coefficients différentiels, et pour le degré dans le sens perpendiculaire au méridien,

$$R = 1^\circ + 1^\circ.\alpha \sin^2 h[1 + \mu \cos 2(\varphi + 6)] - 3^\circ.\alpha\mu \cos 2(\varphi + 6),$$

résultat qui diffère de celui de la *Mécanique céleste,* à cause de l'omission citée plus haut, et que nous avons cru devoir réparer, à l'instar de M. Bowditch de Boston, savant traducteur de cet immortel ouvrage.

« La mesure de ce degré donnera donc la valeur de $\alpha\mu \cos 2(\varphi + 6)$;
» ainsi l'ellipsoïde osculateur sera déterminé par ces diverses mesures :
» il serait nécessaire, pour un aussi grand arc, d'avoir égard au
» carré de ε dans l'expression de l'angle ϖ, surtout si, comme on l'a
» observé en France, l'angle azimutal ne varie pas proportionnelle-
» ment à l'arc mesuré, etc. »

Maintenant, pour déterminer l'ellipsoïde osculateur en partant des mesures de la Terre, il conviendrait, comme à l'art. **177**, de comparer à la figure elliptique les degrés mesurés des méridiens, et l'on verrait que cette comparaison donne, pour la figure des méridiens, des ellipses différentes qui s'éloignent trop des observations pour pouvoir être admises; d'où l'on doit conclure que la Terre n'a point la forme régulière que l'on serait d'abord tenté de lui attribuer. Cependant, avant de renoncer entièrement à la figure elliptique, il importe de déterminer celle dans laquelle le plus grand écart des degrés mesurés est plus petit que dans toute autre figure de même espèce, et l'on peut employer à cet effet la méthode des moindres carrés (art. **375**).

Formules pour corriger la mesure d'une perpendiculaire à la méridienne, et la différence en longitude de ses points extrêmes.

389. La méthode par laquelle on corrige de la manière la plus avantageuse la longueur d'une perpendiculaire à la méridienne ou d'un arc de parallèle dont les extrémités sont liées à deux bases, est en tout semblable à celle que nous avons exposée à l'art. **207**, relativement à la mesure d'un arc de méridien.

En effet, par la mesure de ces deux bases, on connaîtra leur discordance γ; si donc, dans l'expression générale de l'erreur s, qui est

$$s = \sum \left[\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} + \cot Z^{(n)} . dZ^{(n)} \right],$$

ou, en développant,

$$s = Px + Qy + P^{(1)}x^{(1)} + Q^{(1)}y^{(1)} + \text{etc.},$$

on substitue les corrections indiquées à l'article cité, savoir,

$$x=(l-\tfrac{1}{2}m)\frac{\gamma}{F}, \qquad y=(m-\tfrac{1}{2}l)\frac{\gamma}{F},$$
$$x^{(1)}=(l^{(1)}-\tfrac{1}{2}m^{(1)})\frac{\gamma}{F}, \quad y^{(1)}=(m^{(1)}-\tfrac{1}{2}l^{(1)})\frac{\gamma}{F},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

la correction résultant de la mesure de la seconde base sera

$$\delta s=\sum\left[l(P-\tfrac{1}{2}Q)+m(Q-\tfrac{1}{2}P)\right]\frac{\gamma}{F},$$

Σ étant toujours le signe d'une somme.

Telle est la quantité qu'il faudra ôter de la longueur B, calculée rigoureusement à l'aide de la première base, pour avoir sa longueur corrigée, en supposant la mesure effective de la seconde base plus petite que la longueur déduite.

Les mêmes substitutions des valeurs de xy, $x^{(1)}y^{(1)}$, . . ., étant faites dans l'expression générale de l'erreur $dZ^{(n)}$ du dernier azimut $Z^{(n)}$, qui est

$$\begin{aligned} dZ^{(n)} = x - x^{(1)} + x^{(2)} - x^{(3)} + \ldots \pm x^{(n-1)} \\ + y - y^{(1)} + y^{(2)} - y^{(3)} + \ldots \pm y^{(n-1)} \end{aligned}$$

(le signe supérieur ayant lieu si n est pair, et le signe inférieur si n est impair), la correction de cet azimut sera

$$\delta Z^{(n)}=-\tfrac{1}{2}[l-l^{(1)}+l^{(2)}-\ldots+m-m^{(1)}+m^{(2)}-\ldots]\frac{\gamma}{F};$$

et alors l'erreur qui pourra encore affecter $Z^{(n)}$, ainsi corrigé, sera renfermée dans de plus étroites limites.

Il s'agit maintenant de corriger la différence de longitude des points extrêmes de l'arc : or, si cet arc AA'A''. . . (*fig.* 37) est perpendiculaire au méridien Ax, que φ soit l'angle formé par ce méridien et par celui du point extrême $A^{(n)}$, et que V soit le plus petit des angles que ce dernier méridien fait avec l'arc $AA^{(n)}$, on aura

$$\sin\varphi=\frac{\cos V}{\sin h},$$

h étant la latitude du point A; puis appelant $\delta\varphi$ et δV les erreurs des angles φ et V dues à la discordance des bases, il viendra par la différentiation,

$$\delta\varphi = -\frac{\sin V}{\sin h \cos\varphi}\,\delta V.$$

Or il est évident que la correction $\delta V = -\delta Z^{(n)}$; donc celle de la différence de longitude φ sera connue.

L'illustre auteur de cette analyse fait remarquer qu'il y a de l'avantage à observer les trois angles de chaque triangle et à les corriger selon la méthode usitée. Il prescrit en outre de ne rejeter aucune des observations géodésiques qu'on admettrait si elles étaient isolées, dans le cas où quelques-unes s'éloigneraient un peu des autres, afin de pouvoir leur appliquer avec succès les formules de probabilité.

390. On a vu, à l'art. **387**, que le rayon osculateur de la ligne géodésique au point A de départ se déduit de l'arc mesuré, et qu'en désignant par $1+\alpha u'$ le rayon mené du centre de gravité de la Terre à sa surface, le rayon osculateur dans le sens de l'arc AA'A"... perpendiculaire au méridien de A, est

$$R = 1 + \alpha u' - \alpha\left(\frac{du'}{dh}\right)\operatorname{tang} h + \frac{\alpha\left(\frac{ddu'}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 h};$$

de plus, si l'on nomme s la longueur de l'arc mesuré $AA^{(n)}$, on aura, à fort peu près (art. **387**),

$$R = \frac{s}{\varphi\cos h}\left(1 - \tfrac{1}{3}s^2\operatorname{tang}^2 h\right);$$

ce qui donne, en différentiant et s'arrêtant aux quantités du second ordre, pour la correction du rayon de courbure,

$$\delta R = \frac{\delta s}{\varphi\cos h} - \frac{s\delta\varphi}{\varphi^2\cos h},$$

expression dans laquelle δs et $\delta\varphi$ sont connues par ce qui précède.

Remarques sur la détermination des longitudes par les observations azimutales.

391. Lorsque l'on considère le globe terrestre comme un sphéroïde irrégulier peu différent d'une sphère, on est conduit, par la théorie précédente de Laplace, à cette conséquence remarquable, que l'azimut et la longitude au sommet d'une ligne de plus courte distance perpendiculaire au méridien de son origine, et peu étendue d'ailleurs, peuvent être calculés comme sur une sphère dont le rayon serait égal à celui de courbure de cette ligne (art. 386). Cette vérité ressort aussi des formules de la trigonométrie sphéroïdique démontrées (art. 367). En effet, si H est la latitude du pied de la perpendiculaire y dont il s'agit, V l'azimut de cette ligne géodésique sur l'horizon de son sommet, et φ la différence en longitude de ces mêmes points, on aura

$$(1) \qquad \varphi \sin H = 180^\circ - V + \frac{1}{6}\frac{y^3 \operatorname{tang} H}{N^2 \sin 1''},$$

N étant la normale au point H, et telle que $N = \dfrac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$.

Cette relation (1) fait voir combien la longitude φ est peu dépendante de l'excentricité; il suffit donc de connaître approximativement e^2 et y pour évaluer en secondes de degré le terme du troisième ordre $\frac{1}{6}\frac{y^3 \operatorname{tang} H}{N^3 \sin 1''}$; mais il faut auparavant déterminer la longueur y à l'aide de ces deux formules

$$\operatorname{tang} Y = \operatorname{tang} P \cos H, \qquad y = \frac{\pi}{180} N . Y,$$

dans lesquelles P exprime la longitude géodésique correspondante à φ et déduite de la chaîne des triangles qui unit les extrémités de la perpendiculaire y, et où $\pi = 3,141593$ est le rapport de la circonférence au diamètre.

De ce que la relation (1) n'est directement applicable qu'à une petite amplitude, il s'ensuit qu'une longitude de plusieurs degrés devra être évaluée par parties. On observera alors autant d'azimuts et de latitudes qu'il y aura de ces parties à déterminer. Mais voici, selon nous, l'inconvénient attaché à cette méthode, souvent recommandée par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*.

L'angle azimutal V dérive nécessairement de deux autres angles, l'un observé immédiatement, mesurant l'inclinaison du dernier côté du réseau de triangles sur le méridien, et qui est probablement affecté d'une petite erreur; l'autre déterminé par le calcul du développement de la ligne la plus courte, et représentant l'angle que cette ligne fait avec le dernier côté dont il est question. Ce second angle se trouvant indubitablement affecté de la résultante des erreurs commises dans la mesure des angles des triangles, il est à craindre que si cette résultante n'est pas nulle ou tout au moins très-petite par l'effet des compensations, elle n'altère sensiblement la véritable valeur de l'azimut V et ne se reporte sur la longitude cherchée en s'accroissant proportionnellement à la cosécante de la latitude H, comme cela est probablement arrivé dans les comparaisons multipliées que Delambre a faites de ses azimuts observés avec ceux qu'il a conclus, comparaisons qui dévoileraient de grandes irrégularités dans la figure des parallèles terrestres, s'il était permis de faire abstraction des erreurs commises dans les observations angulaires. Il est donc très-important, pour le succès de la méthode actuelle, que la chaîne des triangles soit peu étendue et la meilleure possible, et que les azimuts aux sommets de ces triangles soient observés par les moyens les plus directs et les plus sûrs; enfin il convient d'assigner par les formules de probabilité précédentes les limites probables de l'erreur du dernier azimut d'une chaîne de triangles, conclu de celui de départ, et de resserrer ces limites en assujettisant cette chaîne à la mesure de deux bases.

392. Puisque, dans la pratique de la Géodésie, l'on est dans l'usage de calculer rigoureusement de proche en proche les positions géographiques des points trigonométriques, dans une certaine hypothèse d'aplatissement, il n'est pas absolument nécessaire d'évaluer la ligne la plus courte abaissée de l'extrémité d'un réseau dirigé de l'ouest à l'est sur le méridien de l'autre extrémité, pour déduire de l'angle azimutal la différence en longitude correspondante. En effet, si l'angle V, sur l'ellipsoïde de révolution, était déterminé géodésiquement, comme on vient de le dire, puis corrigé de la discordance des bases sur lesquelles le réseau s'appuie (art. 389) et qu'il se trouvât précisément égal au résultat de l'observation, l'angle φ correspondant à y n'aurait

besoin d'aucune correction, il représenterait l'amplitude cherchée; mais si l'azimut observé à l'extrémité H' de la perpendiculaire différait de l'azimut calculé d'une quantité δV, cette quantité serait la correction à faire à l'azimut V, et la correction $\delta\varphi$ à appliquer à la longitude φ, déterminée géodésiquement pour avoir l'amplitude astronomique, serait donnée par cette formule

$$\delta\varphi = \frac{-\delta V}{\sin H}, \quad \text{ou plus exactement}, \quad \delta\varphi = -\frac{\sin V}{\cos\varphi}\cdot\frac{\delta V}{\sin H};$$

prenant alors pour valeur de H cette résultante de la relation

$$\cot H = \cot H' \cos\varphi,$$

ou de cette série

$$H = H' + \tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi \frac{\sin 2H'}{\sin 1''},$$

si φ est petit, H' désignant la latitude du point où a été faite l'observation azimutale, et H la latitude du pied de la perpendiculaire supposée abaissée de ce point sur le méridien principal, on remarquera : 1° qu'à l'est de la méridienne, δV sera positif si l'azimut observé, compté du sud à l'ouest, est plus petit que l'azimut calculé géodésiquement; et qu'il sera négatif dans le cas contraire; 2° qu'à l'ouest de la méridienne, δV sera positif ou négatif, selon que l'azimut observé sera plus grand ou plus petit que l'azimut conclu.

Il est probable qu'on diminuerait l'influence des erreurs des angles des triangles sur l'azimut V conclu de celui de départ, en faisant servir à sa détermination les angles des sommets nord de la chaîne, et ensuite les angles des sommets sud, c'est-à-dire en prenant pour valeur de V la moyenne des deux résultats qui auraient été obtenus de la sorte. On peut voir dans le second volume de la *Nouvelle description géométrique de la France*, page 619, l'application que nous avons faite de cette méthode indirecte, mais sans beaucoup de succès, quoique les données employées dans nos calculs fussent de nature à inspirer une entière confiance.

Il est possible, ce nous semble, d'expliquer jusqu'à un certain point pourquoi, en faisant même abstraction des erreurs des observations

angulaires, la méthode des azimuts pourrait être en discordance avec celle des feux. Remarquons d'abord que le méridien céleste et le méridien apparent, en un point quelconque de la surface de la Terre, sont en général deux plans différents. En effet, le premier est un plan passant par l'axe du monde et par un lieu de la Terre, et le second contient la verticale de ce lieu et le pôle du monde : si donc cette verticale ne passe pas par l'axe de la Terre, le méridien apparent ne coïncide pas avec le méridien céleste. Déterminer la différence des méridiens de deux points, c'est trouver l'angle que forment entre eux leurs méridiens apparents. Par la méthode des feux, cet angle, qu'on obtient directement, est indépendant de l'effet de toute cause perturbatrice qui agirait intermédiairement sur la direction du fil à plomb; mais les attractions locales doivent au contraire exercer leur influence sur les résultats auxquels on parvient par la méthode des azimuts, puisque quelques-uns des angles des triangles qui unissent les points dont il s'agit se trouvent soumis à cette influence, et qu'ils entrent nécessairement dans la composition de l'angle azimutal employé à la recherche de la différence de longitude.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DE LA FIGURE DE LA TERRE PAR LES OBSERVATIONS DU PENDULE.

Théorie du pendule simple oscillant dans le vide.

393. Si l'on attache un corps, une sphère de métal, par exemple, à l'extrémité inférieure d'un fil ou d'une verge mobile autour d'un point fixe placé à l'autre extrémité, et qu'on l'écarte un peu de sa situation verticale, il fera, étant ensuite abandonné à l'action de la pesanteur, de petites oscillations qui seront à très-peu pres *isochrones* ou de même durée, malgré la différence d'amplitude des arcs décrits. Les oscillations, c'est-à-dire les allées et les venues alternatives du pendule, se nomment aussi *vibrations* : elles se perpétueraient sans la résistance que l'air oppose au mouvement du corps oscillant, et sans celle que le pendule éprouve au *point de suspension*. On nomme ainsi le point autour duquel le mouvement a lieu.

La durée des oscillations dépend de la grandeur et de la figure du corps suspendu, de la masse et de la longueur de la verge, ainsi que de la densité du milieu dans lequel se fait l'expérience. Il ne sera question, pour le moment, que du *pendule simple* oscillant dans le vide : c'est celui dont la masse de la verge est supposée nulle relativement à celle du corps considéré comme un point infiniment dense. Nous ferons voir ensuite comment on détermine la longueur de ce pendule idéal, dont les oscillations se feraient dans le même temps que celles du *pendule composé*, et qui aurait par conséquent pour longueur la distance du point de suspension au centre d'oscillation, c'est-à-dire au lieu où l'on conçoit réunie toute la masse du corps en mouvement.

On sait, par ce qui précède, que les mesures géodésiques, combinées avec les observations célestes, font connaître l'ellipticité de la Terre. Nous nous proposons maintenant de faire voir qu'elle se déduit aussi avec beaucoup d'exactitude des longueurs observées du pendule à secondes; car, d'après la loi de la pesanteur, l'accroissement de ce pendule, en allant de l'équateur au pôle, est proportionnel au carré du sinus de la latitude, et sa valeur dépend de celle de l'ellipticité du sphéroïde terrestre.

Richer remarqua le premier cet accroissement de la longueur du pendule, dans le voyage qu'il fit en Amérique, en 1672; il trouva que son horloge, réglée à Paris sur le temps moyen, retardait chaque jour, à Cayenne, d'une quantité sensible. Environ soixante ans après lui, Bouguer fit des expériences du même genre au Petit-Goave dans l'île Saint-Domingue, à Quito sur le mont Pichincha, et dans d'autres lieux de la Terre; et il s'assura par ce moyen que l'intensité de la pesanteur, l'un des phénomènes les plus singuliers du système du monde, décroît en outre dans le sens de la verticale, en s'éloignant du niveau des mers.

394. Pour examiner de la manière la plus simple les circonstances du mouvement du pendule, dont les excursions sont censées faites dans un plan vertical, nous partirons de ces principes connus, savoir :

1°. Que lorsqu'un corps descend, par la seule action de la pesanteur, le long d'une courbe, il a en chaque point la même vitesse que s'il était tombé librement depuis le niveau du point de départ jusqu'à celui d'arrivée, quelle que soit la courbe décrite;

2°. Que l'équation du mouvement d'un point matériel assujetti à parcourir une courbe est $\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi$, ou $\frac{dv}{dt} = \varphi$; φ étant la force continue estimée dans le sens de la tangente à cette courbe, s l'arc décrit au bout du temps t, et $v = \frac{ds}{dt}$ la vitesse acquise (*Mécanique* de Poisson, 2e édition, n° **119**).

Cela posé, soient g la force accélératrice de la pesanteur qui anime le point matériel M (*fig.* 38) suspendu à l'extrémité du fil CM, supposé sans pesanteur et inextensible; C le point de suspension; $AP = x$ l'abscisse verticale, et $PM = y$ l'ordonnée du centre d'oscillation; $AC = a$

la longueur du pendule; $AD = b$ la flèche de l'arc BAB'; B le point de départ du mobile; s l'arc AM dans lequel il se meut; enfin v la vitesse qu'il a acquise au point M après le temps écoulé t.

La vitesse v étant due à la hauteur DP, on a, à cause de $DP = b - x$,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(b-x)}.$$

Mais l'arc s décroissant à mesure que le temps t augmente, on doit écrire

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}}.$$

Il faut exprimer ds en fonction de dx, afin de pouvoir intégrer cette équation : ce qui est facile; car, le carré de l'élément de l'arc s ayant pour expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \text{d'où} \quad ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et l'équation de la trajectoire AMB étant

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

on trouve, par la différentiation, que

$$ds = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}};$$

et de là

$$dt = \frac{-adx}{\sqrt{2g(bx - x^2)(2a - x)}}.$$

Multipliant et divisant respectivement par $2a$ les facteurs sous le radical, puis indiquant l'intégration, on a

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \int \left(\frac{-dx}{\sqrt{bx - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}} \right).$$

Le développement du facteur $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}} = \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du

binome conduisant à une série convergente, l'expression de t se change en celle-ci :

$$t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2}+\ldots\right);$$

et pour lors l'intégration est réduite à celle des termes de la forme $\frac{-x^m dx}{\sqrt{bx-x^2}}$: on l'effectuera donc au moyen de la formule connue

$$\int\frac{-x^m dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{bx-x^2}+\tfrac{1}{2}b.\frac{2m-1}{m}\int\frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{bx-x^2}};$$

mais comme on doit ici intégrer entre les limites $x=0$, $x=b$, afin d'obtenir le temps de la demi-oscillation, son premier terme devient nul par l'une de ces suppositions. Si donc on fait successivement $m=1$, $m=2$, $m=3,\ldots$, on aura

$$\int\frac{-xdx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{b}{2}\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{b}{2}.\mathrm{A},$$

$$\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{3b}{4}\int\frac{-xdx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{3b^2}{2.4}.\mathrm{A},$$

$$\int\frac{-x^3dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{5b}{6}\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\frac{3.5.b^3}{2.4.6}.\mathrm{A};$$

ainsi de suite.

D'un autre côté, à cause de

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-x^2}}=\int\frac{-2dx}{\sqrt{b^2-(2x-b)^2}}=\text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right),$$

on obtient, en substituant ces valeurs,

$$t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{b^2}{2^2.a^2}+.\ .\right]\text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right).$$

A la limite $x=b$, on a $t=0$; mais à celle $x=0$, il vient

$$\text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right)=\pi,\quad\text{ou}\quad 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi,\ldots,$$

π étant la demi-circonférence pour le rayon $=1$. Donc, en désignant

par T la valeur de t résultant de l'intégrale définie, on a

$$(1)\quad T = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cdot\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{b^2}{2^2.a^2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{b^3}{2^3.a^3} + \ldots\right];$$

c'est le temps que le mobile met à descendre du point B de départ au point A le plus bas, où la vitesse, en vertu du premier principe énoncé précédemment, est $\sqrt{2gb}$. Arrivé à ce point, le mobile ne pouvant ni s'arrêter, ni rétrograder, puisqu'il n'y rencontre aucun obstacle, continuera à se mouvoir dans le même sens, et fera la demi-oscillation ascendante parfaitement égale à la première; ce qui est manifeste, car, lorsque $v = 0$, on a $x = b$. Après cela il descendra, par le seul effet de la pesanteur, pour faire une seconde oscillation, et ainsi de suite; en sorte que la durée de chaque oscillation sera $= 2T$ (*).

La flèche b de l'arc 2θ décrit par le pendule étant le sinus verse de l'amplitude de cet arc, on a $b = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$; mais l'amplitude θ étant très-petite, on a, à fort peu près, $2\sin^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta$; de là

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\cdot\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{16} + \ldots\right),$$

ou, désignant maintenant par t la durée d'une demi-oscillation dans un arc infiniment petit, on aura

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad \text{et} \quad T = t\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{16} + \ldots\right);$$

puisqu'en supposant b assez petit pour pouvoir négliger les termes de la série précédente, où cette quantité entre comme facteur, on a, pour l'oscillation entière,

$$(2)\qquad 2t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

(*) La valeur de T donnée par l'équation (1) se déduit d'une formule plus générale, obtenue par Laplace (*Mécanique céleste*, tome I, n° 11). Cet illustre géomètre y considère le cas des oscillations coniques (*voyez* aussi à ce sujet la *Mécanique* de Francœur); mais, dans les expériences du pendule, on dispose l'appareil de manière que les oscillations soient circulaires.

Il s'ensuit que, *quelle que soit l'amplitude de l'arc* BAB′, *pourvu cependant qu'elle soit très-petite, le temps de l'oscillation entière sera le même*.

Il résulte encore de cette hypothèse que, pour un autre pendule a', oscillant dans un autre lieu où la gravité est g', on a

$$(3) \qquad 2t' = \pi\sqrt{\frac{a'}{g'}}.$$

Donc, lorsque les temps des oscillations respectives de deux pendules sont *synchrones* ou égaux,

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\frac{a'}{g'}}, \quad \text{ou} \quad a : a' :: g : g';$$

c'est-à-dire que *les longueurs de deux pendules battant les secondes, par exemple, sont entre elles comme les forces accélératrices de la pesanteur.*

Si l'on supposait, au contraire, un pendule invariable, ou les longueurs des pendules égales, on aurait

$$\frac{2t}{2t'} = \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}};$$

ainsi, *les temps seraient réciproques aux racines carrées des forces accélératrices.*

Dans le même lieu, on a $g = g'$, et alors les équations (2) et (3) donnent, pour deux pendules de différentes longueurs,

$$\frac{2t}{2t'} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}};$$

c'est-à-dire que *les durées des oscillations sont entre elles comme les racines carrées des longueurs des pendules.*

De l'équation (1) l'on tire, en désignant $2t$ par τ, et en supposant b extrêmement petit,

$$g = \frac{\pi^2 a}{\tau^2}:$$

telle est la valeur de la pesanteur g, qui, comme l'on sait, représente le double de l'espace qu'un corps tombant dans le vide parcourrait dans la première seconde de sa chute. Elle se détermine avec la plus grande exactitude par les observations du pendule, comme nous le ferons voir par la suite. Nous remarquerons seulement, pour le moment, que si un pendule simple d'une longueur a faisait N oscillations dans T secondes, on aurait d'abord $\tau = \frac{T}{N}$, et ensuite

$$g = \frac{\pi^2 a N^2}{T^2}; \quad \text{de même} \quad g' = \frac{\pi^2 a' N'^2}{T'^2},$$

π exprimant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$. Lorsque $a = a'$ et $T = T'$, on a

$$\frac{g}{g'} = \frac{N^2}{N'^2};$$

donc *les carrés des nombres d'oscillations, faites en même temps par deux pendules de même longueur, sont comme les forces accélératrices.*

Lorsque deux pendules de différentes longueurs oscillent dans un même lieu et dans le même temps, on a $g = g'$, $T = T'$; partant

$$a' = \frac{aN^2}{N'^2}:$$

or, en supposant que a' soit la longueur du pendule simple qui bat les secondes, et que a diffère très-peu de a', on a, en faisant $N = N' + n$,

$$a' = a + \frac{2an}{N'} + \frac{an^2}{N'^2}.$$

Les deux derniers termes de cette expression sont donc la correction à faire au pendule observé, pour le réduire au pendule à secondes.

On conçoit maintenant que les observations du pendule doivent faire connaître la figure de la Terre, puisqu'il existe une relation entre la pesanteur et la longueur du pendule qui bat les secondes, et que l'intensité de la pesanteur dépend de la grandeur du rayon terrestre.

Le tome second de la *Mécanique céleste* contient, sur cette matière, des développements importants que ne comporte pas cet ouvrage.

Mouvement du pendule dans un milieu résistant.

395. Puisqu'un corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du volume du fluide qu'il déplace, il est clair que le pendule qui oscille dans l'air fait moins de vibrations que s'il était mis en mouvement dans le vide, toutes choses égales d'ailleurs. Si donc un pendule battait successivement la seconde dans différents milieux, sa longueur augmenterait à mesure que la densité des milieux diminuerait, par la raison que cette diminution de densité produirait une augmentation dans la pesanteur du pendule. Un autre fait digne de remarque, c'est que, *quelle que soit la résistance du milieu, les oscillations du pendule se font toujours dans le même temps* : cette résistance diminue seulement l'amplitude de l'oscillation et finit par l'anéantir. Bouguer est le premier qui ait énoncé ce théorème, dans son excellent ouvrage sur la *Figure de la Terre*, page 341. Borda s'était proposé d'en donner une démonstration; mais, son Mémoire sur la *Théorie du pendule* n'ayant pas été publié, Poisson a repris le même sujet, et l'a traité de manière à ne laisser rien à désirer. Voici sa démonstration, à quelques observations et développements de calculs près.

Soit g_1 (*fig.* 39) la gravité relative au milieu où se font les oscillations, et, comme précédemment, $AP=x$, $AM=s$, $AB=K$, $CM=CA=a$: prenons pour unité la masse du pendule réunie à son centre d'oscillation; $g_1 \frac{dx}{ds}$ sera la gravité décomposée suivant la tangente à la courbe.

Supposons la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse, comme on le fait le plus généralement, et représentons-la par $m\frac{ds^2}{dt^2}$, m étant un coefficient constant donné par l'expérience, et qui dépend de la densité du milieu et de la figure du corps oscillant. L'équation du mouvement du centre d'oscillation sera, pendant la pre-

mière demi-oscillation,

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g_1\frac{dx}{ds} + m\frac{ds^2}{dt};$$

en observant que la composante $g_1\frac{dx}{ds}$ de la gravité tend à diminuer l'arc s tandis que la résistance du milieu tend à l'augmenter, puisqu'elle s'exerce toujours en sens contraire du mouvement, qui se fait ici de M vers A. On a en outre

$$x = a\left(1 - \cos\frac{s}{a}\right);$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{ds} = \sin\frac{s}{a} = \frac{s}{a} - \frac{1}{2.3}\frac{s^3}{a^3} + \ldots$$

En négligeant d'abord les puissances de s et de $\frac{ds}{dt}$ supérieures à la première, l'équation (1) devient

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}.s;$$

et intégrant par la méthode du n° 305 (*Calcul intégral élémentaire* de M. Lacroix, 5e édition), on a

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{C - \frac{g_1}{a}s^2}, \quad \text{et} \quad t = \int\frac{-ds}{\sqrt{C - \frac{g_1}{a}s^2}} + C',$$

en mettant le signe — devant le radical, parce que, t augmentant, s diminue. Les constantes arbitraires se déterminent par la condition qu'on ait en même temps $t = 0$, $s = K$, $\frac{ds}{dt} = 0$; K étant l'amplitude de la première demi-oscillation supposée très-petite, et $\frac{ds}{dt} = 0$ la vitesse au point de départ. On trouvera d'abord

$$\frac{ds}{dt} = 0 = \sqrt{C - \frac{g_1}{a}K^2}, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{g_1}{a}K^2;$$

et par conséquent

$$t = \int\frac{-ds}{\sqrt{\left(\frac{g_1}{a}\right)}.\sqrt{K^2 - s^2}} + C'.$$

D'ailleurs, à cause de

$$\int\frac{-ds}{\sqrt{K^2-s^2}}=\int\frac{-\frac{ds}{K}}{\sqrt{1-\frac{s^2}{K^2}}}=\text{arc}\left(\cos=\frac{s}{K}\right),$$

il vient

$$t=\frac{1}{\sqrt{\frac{g_1}{a}}}.\,\text{arc}\left(\cos=\frac{s}{K}\right)+C'.$$

On détermine ensuite la constante C', en faisant dans cette dernière équation $t=0$, $s=K$, et alors on a $C'=0$; donc

$$t=\frac{1}{\sqrt{\frac{g_1}{a}}}\left[\text{arc}\left(\cos=\frac{s}{K}\right)\right];$$

donc enfin

$$s=K\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}.$$

Pour avoir une valeur plus exacte de s, soit

$$s=K\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}+s'\,;$$

en substituant cette valeur dans l'équation (1), puis négligeant les puissances de K supérieures à la seconde, ainsi que les produits Ks', $K\frac{ds'}{dt}$, on aura, pour déterminer la correction s', l'équation

$$\begin{aligned}\frac{d^2s'}{dt^2}&=-\frac{g_1}{a}s'+K^2\frac{g_1}{a}.\,m\left(\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right)^2\\&=-\frac{g_1}{a}s'+K^2\frac{g_1}{a}.\,m\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right).\end{aligned}$$

Cette équation, qu'il s'agit d'intégrer, ayant la forme de celle-ci :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A^2y=R,$$

de laquelle on tire

$$y=p\cos.Ax+q\sin.Ax+\frac{\sin.Ax\int Rdx\cos.Ax-\cos.Ax\int Rdx\sin.Ax}{A}$$

52..

(*Calcul intégr. élém.* de M. Lacroix, n° 316), on trouvera, avec un peu d'attention, et en faisant

$$x = t, \quad y = s', \quad A = \sqrt{\frac{g_1}{a}}, \quad R = K^2 \frac{g_1}{a} . m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos . 2t \sqrt{\frac{g_1}{a}}\right),$$
$$u = t\sqrt{\frac{g_1}{a}},$$

que l'intégrale cherchée est

$$s' = p \cos u + q \sin u + \frac{K^2 m}{2} (1 + \tfrac{1}{3} \cos . 2u).$$

Les constantes p et q se déterminent de manière qu'on ait à la fois $t = 0$, $s' = 0$, $\frac{ds'}{dt} = 0$; or, dans ce cas, on a $u = 0$, et l'équation précédente donne

$$p = -\frac{K^2 m}{2} . \frac{4}{3};$$

ensuite, si on la différentie par rapport à s' et u, pour obtenir le rapport $\frac{ds'}{du}$, ou $\frac{ds'}{dt} = 0$, on trouvera, après avoir fait $u = 0$, que la constante q est nulle. On a donc

$$s' = \frac{K^2 m}{2}\left(1 - \tfrac{4}{3} \cos . t\sqrt{\frac{g_1}{a}} + \tfrac{1}{3} \cos . 2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right);$$

et enfin

$$s = K \cos . t\sqrt{\frac{g_1}{a}} + \frac{K^2 m}{2}\left(1 - \tfrac{4}{3} \cos . t\sqrt{\frac{g_1}{a}} + \tfrac{1}{3} \cos . 2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right).$$

Ainsi, en supposant K assez petit pour qu'on en puisse négliger la troisième puissance, cette formule représentera la valeur de s pendant toute la durée de la première demi-oscillation.

Si l'on désigne par T le temps de cette demi-oscillation, on aura, pour le déterminer, l'équation $s = 0$, ou

$$\cos . T\sqrt{\frac{g_1}{a}} + \frac{Km}{2}\left(1 - \tfrac{4}{3} \cos . T\sqrt{\frac{g_1}{a}} + \tfrac{1}{3} \cos . 2T\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right) = 0;$$

en négligeant le terme multiplié par K, on tirerait de cette équation,

$T\sqrt{\frac{g_1}{a}} = \frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence pour le rayon $= 1$; faisant donc $T\sqrt{\frac{g_1}{3}} = \frac{\pi}{2} + t'$, et négligeant les puissances de t' supérieures à la première, on aura

$$\cos . T\sqrt{\frac{g_1}{a}} = \cos\frac{\pi}{2} - t'\sin\frac{\pi}{2} = - t',$$

$$\cos . 2T\sqrt{\frac{g_1}{a}} = \cos\pi - t'\sin\pi = - 1 ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et négligeant le produit $t'K$, on obtiendra $t' = \frac{Km}{3}$; partant

$$T\sqrt{\frac{g_1}{a}} = \frac{\pi}{2} + \frac{Km}{3}, \quad \text{ou} \quad T = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{Km}{3}\right)\sqrt{\frac{a}{g_1}};$$

ainsi le temps de la première demi-oscillation est augmenté par l'effet de la résistance du milieu.

Pour avoir la vitesse au point le plus bas, différentions la valeur trouvée pour s, et substituons dans $\frac{ds}{dt}$ la valeur de T; nous aurons, en appelant V cette vitesse et en rejetant les puissances de K supérieures à la seconde, $V = - K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sqrt{\frac{g_1}{a}}$; ou bien, en faisant abstraction du signe qui indique seulement le sens du mouvement,

$$V = K\left(1 - \frac{2mK}{3}\right)\sqrt{\frac{g_1}{a}};$$

il suit de là que la vitesse acquise au point le plus bas est diminuée par la résistance du milieu.

Déterminons maintenant le temps de la seconde demi-oscillation. A est alors le point de départ où la vitesse est égale à celle acquise pendant la première demi-oscillation.

Faisant ici $AP' = x$, $AM' = s$, $CM' = CA = a$, l'équation du mouvement pendant la seconde demi-oscillation sera

$$\frac{d^2s}{dt^2} = - g_1\frac{dx}{ds} - m\frac{ds^2}{dt^2},$$

parce que, dans cette circonstance, la composante $g_1 \frac{dx}{ds}$ de la pesanteur et la résistance du milieu sont deux forces tendantes à diminuer l'arc s, compté du point A le plus bas, qui est maintenant le point de départ. En faisant deux approximations successives, comme dans le calcul précédent, on a d'abord

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}s;$$

et en intégrant,

$$s = \mathrm{K}\left(1 - \frac{2m\mathrm{K}}{3}\right).\sin.\, t\sqrt{\frac{g_1}{a}};$$

les deux constantes arbitraires étant déterminées par la condition qu'au point de départ A on ait

$$t = 0, \quad s = 0, \quad \frac{ds}{dt} = \mathrm{V} = \mathrm{K}\left(1 - \frac{2m\mathrm{K}}{3}\right)\sqrt{\frac{g_1}{a}}.$$

Ensuite, en posant $s = \mathrm{K}\left(1 - \frac{2m\mathrm{K}}{3}\right)\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}} + s'$, on trouve

$$s' = -\frac{m\mathrm{K}^2}{2}\left(1 - \tfrac{2}{3}\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}} - \tfrac{1}{3}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right);$$

donc, en ne conservant que les première et seconde puissances de K,

$$s = \mathrm{K}\left(1 - \frac{2m\mathrm{K}}{3}\right)\sin.t\sqrt{\frac{g_1}{a}} - \frac{m\mathrm{K}^2}{2}\left(1 - \tfrac{2}{3}\cos.t\sqrt{\frac{g_1}{a}} - \tfrac{1}{3}\cos.2t\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right).$$

Telle est la formule qui représente par approximation la valeur de s pendant la durée de la seconde demi-oscillation.

Le mobile s'élevant jusqu'à ce qu'on ait $\frac{ds}{dt} = 0$, si l'on désigne par T′ le temps de la seconde demi-oscillation, on aura, pour le déterminer, l'équation $\frac{ds}{dt} = 0$, ou

$$\left(1 - \frac{2m\mathrm{K}}{3}\right)\cos.\mathrm{T}'\sqrt{\frac{g_1}{a}} - \frac{m\mathrm{K}}{3}\left(\sin.\mathrm{T}'\sqrt{\frac{g_1}{a}} + \sin.2\mathrm{T}'\sqrt{\frac{g_1}{a}}\right) = 0.$$

Faisant $T'\sqrt{\frac{g_1}{a}} = \frac{\pi}{2} + t'$, et omettant les puissances de t' supérieures à la première, ainsi que le produit $t'K$, il vient $t' = -\frac{mK}{3}$, et de là

$$T'\sqrt{\frac{g_1}{a}} = \frac{\pi}{2} - \frac{mK}{3}, \quad \text{ou} \quad T' = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{mK}{3}\right)\sqrt{\frac{a}{g_1}}.$$

Donc le temps de la demi-oscillation ascendante est diminué, par l'effet de la résistance du milieu, de la même quantité que celui de l'oscillation descendante est augmenté. D'où il résulte ce théorème, que *le temps de l'oscillation entière est le même que si le mouvement avait lieu dans le vide.*

Pour déterminer l'amplitude K' de la seconde demi-oscillation, il faudra faire $t = T'$ dans la valeur de s relative à cette demi-oscillation; alors, en ne conservant que les deux premières puissances de K, on trouvera

$$K' = K - \frac{4mK^2}{3}.$$

De même, si K'', K''', etc., représentent les amplitudes de la troisième, quatrième, etc. demi-oscillation, on aura

$$K'' = K', \quad K''' = K'' - \frac{4mK''^2}{3}, \quad K^{\text{iv}} = K''', \text{ etc.};$$

ce qui fait voir que ces amplitudes diminuent successivement et avec d'autant plus de rapidité, que le coefficient m de la résistance est plus grand.

Bouguer a remarqué le premier que les amplitudes des arcs décrits par un pendule oscillant dans l'air décroissent à très-peu près en progression géométrique, quand le nombre des oscillations croît en progression arithmétique. Cette propriété se déduit aisément de la théorie précédente, car on a d'abord

$$\begin{aligned}
K' &= K\left(1 - \frac{4mK}{3}\right),\\
K'' &= K',\\
K''' &= K''\left(1 - \frac{4mK'}{3}\right) = K\left(1 - \frac{4mK}{3}\right)\left(1 - \frac{4mK'}{3}\right),\\
K^{\text{iv}} &= K''',\\
K^{\text{v}} &= K^{\text{iv}}\left(1 - \frac{4mK'''}{3}\right) = K\left(1 - \frac{4mK}{3}\right)\left(1 - \frac{4mK'}{3}\right)\left(1 - \frac{4mK'''}{3}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais lorsque le pendule est composé d'un fil extrêmement fin et que la boule qui y est suspendue est très-pesante, le terme $\frac{4mK}{3}$, dû à la résistance de l'air, est très-petit, et les amplitudes décroissent avec beaucoup de lenteur; on peut donc supposer, dans les valeurs précédentes, que ce terme est constant pendant un court intervalle de temps. Alors, si l'on désigne par q le facteur $1 - \frac{4mK}{3}$, on aura sensiblement

$$\begin{array}{ll} K' = qK, & K'' = K', \\ K''' = q^2K, & K^{\text{iv}} = K''', \\ K^{\text{v}} = q^3K, & K^{\text{vi}} = K^{\text{v}}, \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

ce qui vient à l'appui de la remarque ci-dessus.

Poisson considère en outre le cas où la fonction qui exprime la résistance renfermerait un terme proportionnel à la simple vitesse et représenté par $n\frac{ds}{dt}$. « Il est, dit ce savant géomètre, facile de s'assurer » que le temps de l'oscillation entière resterait encore le même que » dans le vide, pourvu toutefois que la résistance du milieu fût une » force très-petite par rapport au poids de la lentille, et que l'on négligeât, dans le calcul, le carré de n et le produit de n et de m. En » effet, l'équation du mouvement serait alors

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g_1\frac{dx}{ds} - n\frac{ds}{dt} \pm m\frac{ds^2}{dt^2},$$

» en prenant le signe + pour la première demi-oscillation, et le signe » — pour la seconde, et en observant que le terme $-n\frac{ds}{dt}$ change » de signe de lui-même, à cause du facteur $\frac{ds}{dt}$, en passant d'une demi- » oscillation à l'autre. Or, si l'on fait $s = s_1 e^{-\frac{nt}{2}}$, que l'on mette à la » place de $\frac{dx}{ds}$ sa valeur approchée $\frac{s}{a}$, et qu'après les substitutions faites » on supprime les termes multipliés par n^2 ou par nm, l'équation pré- » cédente deviendra

$$e^{-\frac{nt}{2}}\frac{d^2s_1}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}s_1 e^{-\frac{nt}{2}} \pm me^{-nt}\frac{ds_1^2}{dt^2}.$$

» Divisant tous les termes par $e^{-\frac{nt}{2}}$, et remplaçant le facteur $me^{-\frac{nt}{2}}$
» par m, ce qui est permis, puisque le temps t ne saurait devenir très-
» grand pendant la durée d'une seule demi-oscillation, on aura

$$\frac{d^2s_1}{dt^2} = -\frac{g_1}{a}s_1 \pm m\frac{ds_1^2}{dt^2},$$

» équation d'où l'on tirera sans peine les mêmes conséquences que
» ci-dessus, relativement à la durée de chacune des deux demi-oscil-
» lations.

» Quelle que soit la loi de la résistance, la supposition que cette
» résistance est une force très-petite relativement au poids de la len-
» tille est conforme à ce qui a lieu dans la pratique, où la densité du
» milieu est très-petite, et où l'on a soin de prendre, pour former la
» lentille, une matière très-dense; mais on doit observer que cette
» supposition n'est plus nécessaire quand la résistance est proportion-
» nelle au carré de la vitesse; en sorte qu'alors cette résistance peut
» être une force comparable au poids de la lentille. Il suffit, dans ce
» cas, que l'amplitude de l'oscillation soit très-petite, pour que le
» temps de cette oscillation ne soit point altéré par la résistance; car,
» dans le calcul que nous venons de faire, l'approximation n'a point
» eu lieu par rapport au coefficient m, mais bien par rapport aux puis-
» sances de K. »

Comme il importe, dans la pratique, de connaître la valeur de g_1, soient M la masse du corps oscillant, g sa pesanteur dans le vide, p_1 son poids dans le milieu où se fait l'expérience, p son poids dans le vide; on aura

$$p = g\text{M}, \quad p_1 = g_1\text{M}; \quad \text{donc} \quad g_1 = \frac{p_1 g}{p};$$

c'est cette dernière valeur qu'il faudrait substituer dans toutes les formules précédentes.

396. Jusqu'à présent, le fil à l'extrémité duquel est suspendue la masse oscillante a été supposé inextensible; et, en effet, cette hypothese peut être admise dans la pratique sans qu'il en résulte aucune

erreur sensible, surtout lorsque le pendule n'est mis en mouvement que quelque temps après avoir été suspendu. Cependant, comme, dans les expériences délicates, on ne doit faire abstraction d'aucune des circonstances physiques qui sont de nature à influer sur les résultats ou les conséquences qu'on en veut déduire, Poisson, après avoir considéré le cas où le pendule oscille dans un milieu résistant, a examiné celui de l'extensibilité et de l'élasticité du fil, et son élégante analyse l'a conduit au résultat même que Borda a énoncé dans son Mémoire sur les expériences du pendule, savoir : que la correction de la grandeur des arcs décrits par son pendule serait à peine la centième partie de la correction des amplitudes; d'où il suit qu'il suffit d'avoir égard à cette dernière. (*Base du Système métrique*, tome III, page 354, et xv[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 345.)

Correction des amplitudes décrites par un pendule composé.

397. Nous avons démontré, à l'art. **394**, que si $2T$ est la durée d'une oscillation observée, 2θ l'amplitude correspondante, et que $2t$ soit la durée d'une oscillation infiniment petite, on a

$$T = t\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{16}\right).$$

Soient N' le nombre d'oscillations faites par le pendule dans l'arc 2θ pendant un temps quelconque T', et N le nombre d'oscillations infiniment petites qu'il aurait faites dans le même temps; la durée d'une de ces oscillations sera dans le premier cas $\frac{T'}{N'} = T$, et dans le second cas $\frac{T'}{N} = t$; en sorte que la formule précédente se changera en celle-ci

$$N = N'\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{16}\right).$$

Si la durée totale de l'expérience était très-courte, on pourrait, dans cette formule, mettre, au lieu de l'amplitude θ, l'arc moyen $\frac{\theta + \theta_n}{2}$, c'est-à-dire la demi-somme des amplitudes de l'arc décrit au com-

mencement et à la fin des observations; mais il est beaucoup plus exact de faire usage d'une formule que Borda a donnée à cet effet, et dont voici la démonstration.

2θ étant l'arc dans lequel le pendule oscille à l'origine du mouvement, θ sera l'angle qu'il décrit de part et d'autre de la verticale, abstraction faite du très-petit terme dépendant de la résistance de l'air (art. 395). Pendant le temps qu'il emploie à décrire cet arc entier, il ferait un peu plus d'une oscillation infiniment petite; il en ferait $1 + \frac{\sin^2\theta}{16}$ (art. 394). Si donc le pendule continue d'osciller dans l'air, l'arc θ diminuera continuellement et deviendra $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$, et les nombres correspondants d'oscillations infiniment petites seront

$$1+\frac{\sin^2\theta_1}{16},\quad 1+\frac{\sin^2\theta_2}{16},\quad 1+\frac{\sin^2\theta_3}{16},\ldots,\quad 1+\frac{\sin^2\theta_n}{16};$$

ainsi, après un nombre $N' = n$ d'oscillations finies écoulées depuis l'époque où l'écart du pendule était θ, le nombre des oscillations infiniment petites correspondantes sera représenté par

$$n+\frac{\sin^2\theta_1}{16}+\frac{\sin^2\theta_2}{16}+\ldots+\frac{\sin^2\theta_n}{16}.$$

Il faut, pour sommer cette série, connaître la loi de décroissement des arcs $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$. Or on sait, par la théorie et l'expérience, que ces arcs décroissent sensiblement en progression par quotients, quand le nombre d'oscillations croît en progressions par différences; et comme ils sont fort petits, même à l'origine du mouvement, on a, à très-peu près (art. 395),

$$\sin\theta_n = q^n \sin\theta,$$

q étant un coefficient constant pour le même pendule.

Cela posé, si l'on appelle S la somme des termes de la série précédente, non compris le premier, on aura, sans erreur sensible,

$$S = \frac{q^2\sin^2\theta}{16}(1+q^2+q^4+\ldots+q^{2n-2});$$

et par conséquent, d'après la propriété des progressions géométriques,

$$S = \frac{q^2}{16}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\right)\sin^2\theta,$$

ou bien, en exprimant S en fonction du premier terme $\sin^2\theta$, du dernier $\sin^2\theta_n$ et du nombre n des termes,

$$S = \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta_n}{16\left[\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}.$$

Il résulte de la très-grande densité de la boule métallique ou de la lentille, que le pendule oscille fort longtemps, et que par conséquent les amplitudes θ et θ_n, pendant la durée d'une expérience, diffèrent peu l'une de l'autre. Or, on a en général, dans le système des logarithmes ordinaires,

$$\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{\log\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}\right)}{n}};$$

et en série

$$\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{k}{n}\log\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n} + \frac{k^2}{1.2n^2}\log^2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n} + \text{etc.},$$

k étant le module 2,30258... : ainsi, à fort peu près,

$$\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{k}{n}\log\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n};$$

et par suite

$$S = \frac{n(\sin^2\theta - \sin^2\theta_n)}{16k\log\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}}.$$

La somme N des oscillations infiniment petites, correspondantes à n ou N′ oscillations finies du pendule observé, sera donc

$$N = n\left[1 + \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta_n}{16k\log\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}}\right],$$

et deviendra évidemment

$$N = n\left[1 + \frac{\sin(\theta+\theta_n)\sin(\theta-\theta_n)}{16k\log\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_n}}\right] = N'\left[1 + \frac{\sin(\theta+\theta_n)\sin(\theta-\theta_n)}{32k\log\frac{\sin\theta}{\sin\theta_n}}\right]:$$

telle est la formule qu'il fallait démontrer.

Propriété du centre d'oscillation.

398. Il reste encore un point important à examiner pour compléter la théorie du pendule composé oscillant dans l'air; c'est de savoir si la position du centre d'oscillation est effectivement indépendante de la résistance du milieu, ainsi qu'on l'a implicitement supposé à l'art. 395, lorsqu'on a eu en vue la détermination de ce centre.

Pour résoudre cette question de Mécanique, il faut remarquer que la vitesse d'un corps qui se meut dans un fluide quelconque étant sans cesse diminuée par la résistance de ce fluide, cette résistance exerce nécessairement son action dans le sens directement opposé au mouvement du corps, et peut être considérée comme la résultante de toutes les résistances partielles dues aux molécules fluides situées dans la direction du mouvement des points de la surface choquée. Ainsi, toutes les molécules du corps sont bien animées de la force accélératrice de la pesanteur; mais sa surface antérieure est la seule qui reçoive le choc du milieu. Or, en vertu de la liaison du système, ces forces appliquées ne produisent pas tout leur effet; et, d'après le principe de d'Alembert, si l'on calcule les forces qui ont lieu réellement, il doit y avoir équilibre entre celles-ci, prises en sens contraire, et les forces appliquées. De plus, à cause du point fixe de suspension, les conditions d'équilibre se réduisent à une seule, savoir, que la somme des moments des forces en équilibre, pris par rapport à ce point, soit égale à zéro.

Cela posé, la force appliquée à une molécule dm quelconque du corps est $g_1 dm$, et son moment est $pg_1 dm$; p étant la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la verticale passant par cette molécule, et g_1 la gravité relative au milieu dans lequel le corps oscille. La force appliquée à un élément $d\varpi$ de la surface choquée, et agissant dans le sens du mouvement de cet élément, sera représentée par $\mathrm{N}r^2 \frac{d\theta^2}{dt} d\varpi$, et son moment le sera par $\mathrm{N}r^3 \frac{d\theta^2}{dt^2} d\varpi$; r étant la distance au point fixe, et la résistance du milieu étant supposée proportionnelle au carré de la vitesse de l'élément de la surface. En effet, la vitesse angulaire du corps

est $\frac{d\theta}{dt}$, et la vitesse absolue de l'élément $d\varpi$ est $r\frac{d\theta}{dt}$. Maintenant, puisque les moments provenant de la résistance du milieu sont, pendant la durée de la demi-oscillation descendante, de signe contraire à ceux de la pesanteur, et que tous ces moments sont de même signe pendant la durée de la demi-oscillation ascendante, la somme des moments des forces appliquées sera en général

$$\int pg_{1}dm \mp \int \mathrm{N}r^{3}\frac{d\theta^{2}}{dt^{2}}d\varpi,$$

la première intégrale étant prise dans l'étendue du corps, et la seconde intégrale dans l'étendue de la surface choquée seulement. D'ailleurs la somme des moments des forces qui ont effectivement lieu, et qui agissent dans le sens des tangentes aux cercles verticaux qu'elles font décrire, est

$$\int r^{2}\frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}dm,$$

l'intégrale étant prise dans toute l'étendue du corps. On a donc, pour l'équation d'équilibre entre les forces appliquées et ces dernières prises en sens contraire,

$$\int pg_{1}dm \mp \int \mathrm{N}r^{3}\frac{d\theta^{2}}{dt^{2}}d\varpi - \int r^{2}\frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}dm = 0;$$

en prenant le signe supérieur lorsque le corps descend, et le signe inférieur lorsqu'il monte.

Mais, par la théorie du centre de gravité, on a

$$\int pg_{1}dm = g_{1}\int pdm = g_{1}\mathrm{PM},$$

P étant la valeur de p relative à ce centre, et M la masse du corps; donc, à cause de $\mathrm{P} = \mathrm{R}\sin\theta$, l'équation précédente devient

$$(1) \qquad \mathrm{R}g_{1}\mathrm{M}\sin\theta \mp \frac{d\theta^{2}}{dt^{2}}\mathrm{N}_{1} - \frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}\int r^{2}dm = 0,$$

en désignant d'ailleurs, pour abréger, par N_{1} l'intégrale $\int \mathrm{N}r^{3}d\varpi = \mathrm{N}\int r^{3}d\varpi$.

Quant au moment d'inertie $\int r^2dm$, il est égal à $M(R^2+k^2)$. (*Voyez* la *Mécanique* de M. Francœur, ou celle de Poisson, nº 394.)

Il résulte de là que l'équation du mouvement d'un pendule simple d'une longueur λ, qui oscillerait dans le même lieu et en vertu de la même force accélératrice g_1, serait

$$\lambda g_1 M' \sin\theta \mp \frac{d\theta^2}{dt^2}.n - \frac{d^2\theta}{dt^2}.\lambda^2 M' = 0;$$

(k étant $=0$, puisque dans ce pendule le centre de gravité et celui d'oscillation se confondent). Ainsi, pour faire coïncider ces deux mouvements, il suffit d'établir les deux équations de condition suivantes :

$$\frac{\lambda g_1 M'}{\lambda^2 M'} = \frac{R g_1 M}{\int r^2 dm}, \quad \frac{N_1}{\int r^2 dm} = \frac{N}{\lambda^2 M'}.$$

La première équation $\frac{1}{\lambda} = \frac{RM}{\int r^2dm}$, ou $\lambda = \frac{R^2+k^2}{R}$, déterminant la longueur du pendule simple dont les oscillations seraient synchrones à celles du pendule composé M, il s'ensuit que cette longueur, c'est-à-dire la distance du centre d'oscillation au point de suspension, est indépendante de la résistance du milieu. Quant à la seconde équation $\frac{N_1}{M(R^2+k^2)} = \frac{n}{\lambda^2 M'}$, elle fournit la valeur de n en fonction de N_1; et comme la masse M' du pendule simple reste indéterminée, on a, en la faisant égale à M,

$$\frac{n}{\lambda} = \frac{N_1}{R}, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{N_1\lambda}{R}.$$

Pour une même oscillation, la valeur de n sera constante; mais d'une oscillation à la suivante cette valeur changera, si les deux portions de surface choquées alternativement ne sont pas semblables; ce qui résulte évidemment de ce que N_1 est une intégrale étendue à toute la partie de surface exposée au choc du fluide.

Si, pour plus de généralité, nous eussions supposé la résistance une fonction de la vitesse, représentée par $Nv^{6} + N'v^{6'} + \ldots$, N, N' étant des coefficients constants, et 6, $6'$,... des exposants positifs quelconques, cette nouvelle hypothèse n'aurait modifié en rien les conséquences précédentes, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre.

On trouve dans les *OEuvres* de Jean Bernoulli, tome IV, page 382, une solution analytique de cette question; mais Clairaut est le premier qui, au moyen du principe de la conservation des forces vives, ait découvert les propriétés ci-dessus (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1738).

Exposé des expériences et des réductions à faire pour déterminer la longueur du pendule à secondes.

399. Après avoir donné tout ce qu'il importe le plus de connaître sur la théorie du pendule, il convient d'expliquer la manière de déterminer par expérience la longueur de cet instrument, lorsqu'on veut l'assujettir à faire ses oscillations dans l'unité de temps, et en déduire la loi de la variation de la pesanteur en différents points de la surface du globe terrestre.

Le pendule d'expérience dont Bouguer fit usage en Amérique était un petit poids de cuivre, formé de deux cônes tronqués opposés base à base et suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil de pitte très-mince, de 1 mètre environ de longueur (*): ce fil était saisi par une pince à son extrémité supérieure, mais de manière cependant qu'il y conservait toute sa souplesse. Maupertuis et les autres académiciens français qui mesurèrent les premiers un arc de méridien au cercle polaire, firent aussi de semblables expériences à Pello; mais ils se servirent de petits globes de différents métaux, traversés chacun par une verge de cuivre, qu'ils adaptaient ensuite à leur horloge. Vers la fin du siècle dernier, les expériences du pendule furent répétées à Paris avec une précision jusqu'alors inconnue, et par des procédés en partie nouveaux, imaginés par Borda, l'un des membres de la Commission des poids et mesures. L'appareil de ce savant géomètre est des plus ingénieux et des plus simples : il consiste en une boule de platine du

(*) La pitte, ou espèce d'aloës, est une plante très-commune en Amérique, et dont les fibres ont beaucoup de force et de flexibilite. Bouguer s'était assuré, en formant des hygromètres avec ces fibres, qu'elles se ressentent très-peu de l'humidité de l'air, et par conséquent qu'elles conservent assez exactement leur longueur, quel que soit l'état de l'atmosphère.

poids de 520 grammes environ, qu'on fait osciller à l'extrémité inférieure d'un fil métallique de 4 mètres de longueur, attaché à une suspension à couteau posant sur des plans d'une matière très-dure. Quel que soit l'appareil qu'on emploie à cet effet, la longueur du pendule est, comme nous l'avons déjà dit, la distance du point de suspension au centre d'oscillation, centre qu'il ne faut pas confondre avec le centre de gravité du système.

Afin de pouvoir bien comprendre toutes les réductions que nécessitent les expériences du pendule composé, faites avec l'appareil de Borda, nous observerons que cet appareil se compose de trois parties distinctes, qui sont le couteau, le fil et la boule. Le couteau, dont le tranchant pose sur un plan parfaitement horizontal, est traversé en son milieu par une petite verge au bas de laquelle on attache, au moyen d'une vis de pression, l'extrémité supérieure du fil. La boule est mise en contact avec la partie concave d'une petite calotte de cuivre ayant même rayon que cette boule, et ces deux pièces adhèrent l'une à l'autre, tant par la pression de l'atmosphère que par un léger enduit de suif. De cette manière, on a la faculté de suspendre la boule successivement par différents points de sa surface. Enfin, la calotte et la boule tiennent à l'extrémité inférieure du fil fixé au bouton de la calotte au moyen d'une vis de pression (*voyez* le tome III de la *Base du Système métrique décimal*).

Le fil métallique doit être d'égale épaisseur dans toute sa longueur, parfaitement homogène et aussi mince que possible, afin qu'en présentant moins de surface à l'air, il puisse osciller plus librement. Borda avait adopté un fil de fer; mais M. Biot préfère un fil de cuivre, qui n'est pas, comme l'autre, susceptible d'être soumis à l'action du magnétisme terrestre, et qui ne fait pas craindre par conséquent qu'une nouvelle force s'ajoute à la gravité qu'on veut observer.

400. Avant de mettre définitivement le pendule en mouvement, lorsqu'il est suspendu à une muraille très-solide, on fait en sorte que les oscillations du couteau pris séparément aient la même durée que celle de l'appareil entier. Le petit poids attaché à l'extrémité supérieure de la verge du couteau, et qu'on peut faire glisser à volonté, en procure le moyen. Alors, le couteau ayant son centre de gra-

vité extrêmement près de l'axe de rotation, il est permis d'en faire abstraction.

Après avoir placé une horloge derrière le pendule mis en mouvement, et renfermé le tout dans une cage vitrée, pour le mettre à l'abri des mouvements de l'air, on compare les oscillations du pendule à celles de l'horloge, dont on détermine rigoureusement la marche par les retours diurnes de plusieurs étoiles au même vertical : c'est à quoi l'on parvient, avec la plus grande facilité, en rendant parfaitement immobile une lunette dirigée sur une arête verticale de quelque édifice, et observant pendant plusieurs jours consécutifs les occultations des étoiles qui passent dans le champ de cette lunette.

Pour éviter l'ennui de compter les oscillations une à une, et les erreurs que ce moyen pourrait occasionner, on procède ainsi qu'il suit.

Lorsque le pendule et l'horloge sont en repos, on fixe sur la lentille de celle-ci un petit cercle de papier blanc, pour servir de signal. Le centre de ce cercle et le fil du pendule déterminent la position d'un plan vertical dans lequel on place, à une distance de 8 à 10 mètres de l'appareil, une lunette terrestre, qu'on rend ensuite immobile quand le centre du signal est exactement derrière le fil du pendule. On place aussi quelquefois entre la lunette et le pendule un petit écran à fond noir, de manière que le bord vertical couvre la moitié de l'épaisseur du fil du pendule; cet écran est destiné à éclipser le signal au moment où il passe à la verticale. Cela fait, on met le pendule et l'horloge en mouvement; alors, si les oscillations sont synchrones, et que le fil et le signal passent en même temps à la verticale, ils ne se sépareront jamais, en supposant qu'ils marchent dans le même sens; mais, comme ils ont toujours des vitesses différentes, ils ne tarderont pas à se séparer. Par exemple, le pendule, allant plus vite que l'horloge, dépassera le signal de plus en plus, et finira par terminer son oscillation au moment où le signal passera à la verticale ou se cachera derrière l'écran, et, dans ce cas, il aura gagné une demi-oscillation sur l'horloge; puis il arrivera, après un intervalle presque égal, que le fil du pendule et le signal de la lentille passeront en même temps à la verticale, mais en allant dans des directions opposées : pour lors le pendule aura gagné sur l'horloge une oscillation entière. Le mouvement continuant, le pen-

dule finira par gagner encore une oscillation, à l'instant où il passera à la verticale, ou s'éclipsera derrière l'écran en même temps que le signal, mais, cette fois, en marchant dans le même sens que lui. La disparition simultanée du fil et du signal derrière l'écran, se nomme *coïncidence* ou *concours*. Ainsi, selon que le pendule va plus vite ou plus lentement que l'horloge, il gagne ou perd deux oscillations sur elle, dans l'intervalle de deux coïncidences consécutives.

401. Soit N le nombre des oscillations faites par l'horloge entre deux coïncidences, ou le nombre de secondes écoulées; $N \pm 2$ sera le nombre des oscillations du pendule dans le même temps, en supposant que l'horloge et le pendule soient à peu près d'accord, comme dans les courts appareils; et, si l'on désigne par T la révolution diurne, on saura combien le pendule d'expérience fera d'oscillations dans un jour, en faisant cette proportion

$$N : N \pm 2 :: T : T' = \frac{T(N \pm 2)}{N} = T \pm \frac{2T}{N}:$$

le terme $\pm \frac{2T}{N}$ sera d'autant plus petit que N sera plus grand. Il est vrai qu'en rendant cet intervalle plus considérable, l'époque de la coïncidence est plus difficile à saisir : toutefois cet inconvénient est racheté par l'avantage que procure la petitesse de la correction $\pm \frac{2T}{N}$.

Dans l'appareil même dont Borda a fait usage, la durée de l'oscillation du pendule était de 2^s, et la lentille de l'horloge faisait par conséquent, dans l'intervalle de deux coïncidences, deux fois le nombre d'oscillations du pendule, plus deux. Ainsi, au lieu de la proportion précédente, on a celle-ci :

$$N : \frac{N-2}{2} :: T : T' = \frac{T}{2} - \frac{T}{N}.$$

Lorsqu'on a obtenu plusieurs valeurs de T', par le moyen de plusieurs coïncidences, leur somme, divisée par leur nombre, est le résultat moyen auquel on s'arrête définitivement pour en conclure la longueur du pendule simple qui battrait les secondes dans le lieu des observations.

402. Comme il importe de tenir compte de l'amplitude de l'arc décrit par le pendule aux diverses époques de l'expérience, afin de pouvoir réduire les oscillations du pendule composé au cas de l'infiniment petit, on place devant le pendule une petite échelle horizontale divisée en parties égales, et dont on mesure la distance à l'axe de suspension. Les écarts du pendule de part et d'autre de la verticale peuvent alors se mesurer assez exactement, et faire connaître l'amplitude de l'arc à un instant donné.

Cela posé, nommons N' le nombre d'oscillations faites par le pendule dans un certain temps, et N le nombre d'oscillations infiniment petites qu'il aurait faites dans le même temps; appelons en outre θ et θ' les amplitudes décrites au commencement et à la fin des observations; on aura (art. **397**)

$$N = N'\left[1 + \frac{\sin(\theta + \theta_n)\sin(\theta - \theta_n)}{32k\log.\frac{\sin\theta}{\sin\theta_n}}\right];$$

k étant le module 2,30258509.

403. Une des opérations les plus délicates est de mesurer la longueur du pendule d'expérience, et de la réduire à ce qu'elle était aux époques des coïncidences. On conçoit d'abord que l'on a dû observer à ces époques la hauteur du baromètre, et noter la température de l'appareil, au moyen de thermomètres placés dans l'intérieur de la cage où se trouve cet appareil : on conçoit, en outre, qu'il faut être pourvu d'une mesure parfaitement étalonnée sur le mètre, afin de pouvoir déterminer la longueur absolue du pendule. Cette mesure, qui accompagne l'appareil de Borda, est une règle de platine à peu près pareille à celles dont nous avons donné la description (art. **143**).

Après avoir mis le pendule en repos, on place au-dessous de la boule un petit plan d'acier bien horizontal, et on l'élève doucement jusqu'à ce qu'il touche la boule sans la soulever. Cela fait, on le fixe invariablement, et on ôte le pendule pour y substituer la règle dont on vient de parler. A l'extrémité inférieure de cette règle, est une languette mobile ou une échelle divisée en parties égales, que l'on fait descendre jusqu'à ce qu'elle soit en contact avec le plateau d'acier; de cette manière on a, en parties de la règle, la longueur totale du pendule com-

posé, prise depuis le plan de suspension jusqu'au bas de la boule. On a soin, pendant cette opération, d'observer la température; enfin on évalue la longueur du fil, celle de la verge comprise entre l'axe de suspension et le point où est attaché le fil, ainsi que le diamètre de la boule, et l'on pèse exactement cette boule et la calotte à laquelle elle adhère.

Quant au poids du fil, comme il est fort petit, on le déduit de celui d'une plus grande dimension; car, en supposant que le fil soit d'une homogénéité parfaite et de forme cylindrique, son poids est proportionnel à sa longueur.

404. Toutes ces mesures étant prises, il s'agit d'avoir la longueur du pendule, comptée depuis le plan de suspension jusqu'au centre d'oscillation du système. Nommons M′, M″, M‴ les masses de la boule, de la calotte et du fil, et désignons par ρ', ρ'', ρ''', l', l'', l''' les distances de l'axe de suspension aux centres de gravité et d'oscillation de ces trois parties de l'appareil; enfin appelons l_1 la longueur du pendule simple synchrone au pendule composé; on aura (*Mécanique* de M. Francœur, 5ᵉ édit., nº **264**)

$$l_1 = \frac{M'\rho' l' + M''\rho'' l'' + M'''\rho''' l'''}{M'\rho' + M''\rho'' + M'''\rho'''};$$

ou bien, si l'on multiplie les deux termes de cette fraction par la pesanteur g_1 (art. **395**), et qu'on nomme P′, P″, P‴ les poids de la boule, de la calotte et du fil, il viendra

$$l_1 = \frac{P'\rho' l' + P''\rho'' l'' + P'''\rho''' l'''}{P'\rho' + P''\rho'' + P'''\rho'''} = l' - \frac{\frac{P''\rho''}{P'\rho'}(l' - l'') + \frac{P'''\rho'''}{P'\rho'}(l' - l''')}{1 + \frac{P''\rho''}{P'\rho'} + \frac{P'''\rho'''}{P'\rho'}} = l' - Q;$$

le second terme de cette valeur est donc la correction due au poids de la calotte et du fil.

On sait, par la théorie du centre d'oscillation, que si R est le rayon de la boule, D la distance du centre de gravité de la calotte au centre de la boule, et λ la longueur du fil, on a

$$l' = \rho' + \tfrac{2}{5}\frac{R^2}{\rho'}, \quad l'' = \rho' - D, \quad l''' = \rho''' + \frac{\lambda^2}{12\rho'''}.$$

En effet, le fil, étant extrêmement fin, peut être considéré comme une ligne pesante, et le centre de gravité de la calotte, se trouvant à très-peu près sur la surface de la sphère, coïncide sensiblement avec le centre d'oscillation de cette petite pièce. En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtiendrait sous une autre forme la réduction au pendule simple; mais il vaut mieux laisser cette équation telle que nous l'avons donnée.

405. Représentons maintenant par b la distance du plan de suspension au commencement du fil, par Λ celle du même plan au bas de la boule, donnée par la règle; et considérons ϖ, f, φ comme les dilatations du platine, de la règle qui a servi à mesurer le pendule, et du fil métallique, pour l'unité de longueur. On aura d'abord à très-peu près, en conservant d'ailleurs la notation ci-dessus,

longueur du fil, ou $\lambda = \Lambda - 2\mathrm{R} - b$.

Supposons ensuite que cette longueur, observée à la température moyenne x des coïncidences du pendule et de l'horloge, l'ait été à une température x' plus haute lors du contact du plan d'acier avec la boule: alors, à cette seconde époque, la longueur dont il s'agit ayant été trouvée trop longue de la quantité $\lambda f(x'-x)$, il faut la diminuer de cette même quantité pour la ramener à l'état où elle se trouvait lors des coïncidences. Mais, comme l'observe M. Biot, la très-petite différence qui existe entre λ et Λ permet de faire cette correction sur la longueur même Λ. De plus, comme la règle est supposée représenter des parties du mètre à la température de la glace fondante, et qu'elle a été mise en expérience à la température x'', elle a donné une longueur Λ trop courte de la quantité $\Lambda\varphi x''$; on a donc, en faisant ces deux corrections de dilatation,

distance du plan de suspension au bas de la boule, } ou $\Lambda' = \Lambda - \Lambda f(x'-x) + \Delta\varphi x''$.

D'un autre côté, le rayon de la boule, à la température zéro, étant R, a dû se trouver augmenté de $\mathrm{R}\varpi x$ à la température moyenne des coïncidences; ainsi, la distance du plan de suspension au centre

de la boule, ou

$$\rho' = \Lambda' - R(1 + \varpi x);$$

on a d'ailleurs

$$\rho'' = \rho' - D, \quad \rho''' = \tfrac{1}{2}(\rho' + b - R), \quad \lambda = \rho' - b - R;$$

ces valeurs étant substituées dans celle de Q, trouvée précédemment, il vient

$$\text{longueur du pendule dans l'air } L = \Lambda' - R(1 + \varpi x) + \frac{2R^2}{5\rho'} - Q.$$

406. Si l'on désigne par p_1 et p le poids du pendule dans l'air et dans le vide, et dans la même circonstance par g_1 et g la gravité, on aura $\frac{g_1}{g} = \frac{p_1}{p}$. Le rapport de p à p_1 dépendant de la densité actuelle de l'air, il faut donc, pour le déterminer, avoir égard aux hauteurs du baromètre et du thermomètre. Si, par exemple, v exprime, à la température de x degrés centésimaux, le volume d'air déplacé par le pendule, et que Δ soit la pesanteur spécifique de l'air, au terme de la glace fondante et à $0^m,76$ de hauteur barométrique, on aura (art. **248**), pour la pesanteur spécifique Δ_1 à la température moyenne x, et sous la pression h de l'atmosphère,

$$\Delta_1 = \frac{\Delta . h}{0^m,76\,(1 + 0,00375x)\left(1 + \frac{x}{5550}\right)} = \frac{\Delta . h}{0^m,76\,(1 + mx)(1 + nx)};$$

et, par suite, le poids de l'air déplacé, ou $\Pi = \Delta_1 v$; donc le poids du pendule dans le vide est

$$p = p_1 + \Pi.$$

Maintenant, si l'on fait attention que, l_1 et l étant la longueur du pendule dans l'air et celle du pendule dans le vide, qui ferait ses oscillations dans le même temps, on a

$$l_1 = \frac{g_1 l}{g} = \frac{p_1 l}{p};$$

et que $p_1 = p - \Pi = p - \Delta_1 v$, on aura

$$l = \frac{l_1 p}{p - \Delta_1 v} = l_1 \left(1 - \frac{\Delta_1 v}{p}\right)^{-1} = l_1 \left[1 + \frac{v.\Delta.h}{0^m,76 p (1+mx)(1+nx)}\right].$$

Mais $\frac{v.\Delta}{p} = \frac{1}{15910}$; c'est le rapport du poids de l'air, pris pour unité, à celui du platine, le thermomètre étant à zéro, et le baromètre marquant $0^m,76$; donc la longueur du pendule dans le vide, ou

$$(1) \qquad l = l_1 + \frac{hl_1}{0^m,76(1+mx)(1+nx).15910}.$$

Dans cette dernière formule de réduction, la masse du pendule est supposée être toute de platine, quoique le fil et la calotte soient réellement de matières différentes; mais il n'en résulte évidemment aucune erreur sensible. De plus, la perte de poids que le pendule éprouve dans l'air n'est pas la même pendant son mouvement oscillatoire que lorsqu'il est en repos. En effet, M. Bessel a fait remarquer, longtemps après Dubuat (*Académie des Sciences de Berlin*, année 1828), que cette perte est plus grande dans le premier cas, et l'expérience lui a prouvé que le rapport des densités de l'air et du corps oscillant doit être multiplié par un facteur f plus grand que l'unité; par exemple, pour le pendule de Borda, $f = \frac{3}{2}$. C'est aussi à quoi sont arrivés MM. Poisson et Plana, en soumettant à l'analyse les mouvements d'un pendule et de l'air environnant, l'un dans les *Mémoires de l'Institut* (tome XI), l'autre dans ceux de l'Académie des Sciences de Turin (25 novembre 1834). On a donc plus exactement pour la réduction au vide

$$(2) \qquad l = l_1 + \frac{hl_1}{0^m,76(1+mx)(1+nx)}.\frac{3}{2}.\frac{1}{15910}.$$

Pour un pendule d'une autre matière que le platine, le facteur f représenté ici par $\frac{3}{2}$ aurait une valeur différente. (*Voyez* un Mémoire de M. Baily, inséré dans les *Transactions philosophiques* de 1832.)

407. Il reste encore deux corrections à opérer : la première sert à faire connaître la longueur du pendule à secondes, dans le lieu même des observations. Or, si N désigne les oscillations dans un jour solaire

moyen, et que le pendule, dont la longueur est supposée l, en fasse N′, en sorte que $N = N' + n$; on aura, en appelant L la longueur du pendule à secondes,

$$L = l + \frac{2ln}{N'} + \frac{ln^2}{N'^2}.$$

La dernière réduction est celle au niveau de la mer; elle résulte de ce que le pendule à secondes est un peu plus long au bas des hautes montagnes qu'à leur sommet. En effet, l'intensité de la pesanteur augmentant à mesure qu'on s'approche du centre de la Terre, les oscillations d'un même pendule deviennent de plus en plus rapides; il faut donc allonger le pendule à secondes pour retarder ses oscillations. D'après cela, soit z la hauteur du lieu de l'expérience au-dessus de la mer, la pesanteur au pied de la verticale sera, comme l'on sait, égale à $g\frac{(a+z)^2}{a^2} = g\left(1 + \frac{2z}{a}\right)$, a désignant le rayon de la Terre; par conséquent, L′ étant la longueur cherchée, on aura

$$L' = L\left(1 + \frac{2z}{a}\right) = L + \frac{2Lz}{a}.$$

En procédant de la sorte, on peut comparer entre elles les longueurs du pendule à secondes, observées en différents lieux, soit pour en déduire la loi de leurs variations, soit pour en conclure l'aplatissement du globe terrestre; et il est aisé de voir que l'on obtiendra une très-grande précision dans la recherche de cette loi si, au lieu de mesurer chaque fois la longueur absolue du pendule, ce qui ne laisse pas d'être fort difficile, on fait partout usage du même appareil et des mêmes procédés, parce qu'il suffit alors de tenir compte de la variation qu'a éprouvée la longueur primitive du pendule prise pour unité dans un certain lieu, et pour un état donné de l'atmosphère.

408. Il semblait qu'après les travaux de Borda, et ceux des autres géomètres qui ont écrit sur la théorie du pendule composé, il ne restât plus rien à dire à ce sujet; mais Laplace a remarqué que l'appareil de Borda, considéré jusqu'à présent comme formant une masse dont toutes les parties sont liées entre elles d'une manière invariable, est

cependant composé de trois parties distinctes, qui peuvent osciller les unes autour des autres. Il résulte toutefois de sa savante analyse (*Connaissance des Temps* de 1820) : « que la mobilité respective des trois » parties de l'appareil et la flexibilité du fil n'ont aucune influence sen- » sible sur la durée des retours du centre de la boule à la verticale, et » qu'ainsi l'on peut calculer cette durée comme si le fil était inflexible » et fixément attaché aux deux autres parties de l'appareil ; surtout si, » pour mettre le pendule en mouvement, on l'écarte un peu de la ver- » ticale, de manière que le centre de la boule, le fil et le point de sus- » pension soient sur une même droite ; enfin, si l'on rend le plus » égales qu'il est possible les durées des oscillations de l'appareil en- » tier et du couteau pris isolément. »

Cet illustre géomètre a en outre examiné un point très-délicat ; c'était de savoir s'il est nécessaire d'avoir égard à la forme du tranchant du couteau. Il est parvenu à ce résultat singulier, que la longueur du pendule, comptée du plan sur lequel le couteau s'appuie, doit être diminuée du rayon du cylindre qui forme le tranchant. Cette correction est surtout sensible sur la longueur du pendule à secondes, déterminée par des oscillations d'un court appareil, tel que celui qui est destiné pour les voyages, puisque le tranchant du couteau, vu à la loupe, présente la forme d'un demi-cylindre dont le rayon surpasse un centième de millimètre.

Poisson arrive par une analyse très-directe à ce résultat trouvé par Laplace, et s'exprime ainsi :

« Soient t le temps, g la gravité, dm un élément quelconque de la » masse du pendule, x et y les coordonnées de cet élément, prises à » partir de l'axe du cylindre qui forme l'arête du couteau, et comp- » tées dans un plan perpendiculaire à cet axe ; supposons la première » horizontale et la seconde verticale. Soient en outre r le rayon du » cylindre et u la distance variable de sa ligne de contact avec le plan » fixe, à un point choisi arbitrairement sur ce plan, de manière que » les coordonnées de l'élément dm, rapportées à ce point fixe comme » origine, deviennent $x+u$ et $y-r$. Pour l'équilibre des quantités » de mouvement, perdues à chaque instant par tous les éléments ma- » tériels du pendule, il faudra que la somme des moments de ces » forces, pris par rapport à ligne de contact du couteau, soit égale à

» zéro; ce qui donne l'équation

$$\int\left[(y-r)\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2u}{dt^2}\right)-x\frac{d^2y}{dt^2}\right]dm+\int gxdm=0,$$

» dans laquelle les intégrales doivent s'étendre à la masse entière; et
» réciproquement, cette équation suffira pour cet équilibre, si l'on
» suppose, avec M. Laplace, que le couteau n'a pas la liberté de glisser
» sur le plan fixe.

» Désignons maintenant par M la masse entière du pendule; par ρ
» la distance de son centre de gravité à l'axe du cylindre qui forme
» l'arête du couteau; par θ l'angle variable compris entre la perpen-
» diculaire abaissée de ce centre sur cet axe, et le plan vertical mené
» par le même axe; enfin, par Mk^2 le moment d'inertie du pendule,
» rapporté à un axe mené par son centre de gravité, parallèlement à
» l'axe du couteau, et par conséquent par $Mk^2+M\rho^2$ le moment
» d'inertie rapporté à l'axe du couteau; on aura, comme dans la théo-
» rie ordinaire du pendule composé,

$$\int\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)dm=M(k^2+\rho^2)\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad \int gxdm=Mg\rho\sin\theta.$$

» On aura aussi

$$\int\frac{d^2x}{dt^2}dm=M\rho\frac{d^2\sin\theta}{dt^2},\quad \int(y-r)\frac{d^2u}{dx^2}dm=M(\rho\cos\theta-r)\frac{d^2u}{dt^2},$$

» et l'équation précédente deviendra, en y supprimant le facteur M,

$$(k^2+\rho^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}-r\rho\frac{d^2\sin\theta}{dt^2}+(\rho\cos\theta-r)\frac{d^2u}{dt^2}+g\rho\sin\theta=0.$$

» Or, dans l'hypothèse de M. Laplace, où le couteau ne fait que
» rouler sur le plan fixe, il est aisé de voir que la variable u est égale
» à une constante arbitraire, diminuée de l'arc $r\theta$, d'où il résulte
» $d^2u=-rd^2\theta$; par conséquent, si l'on considère le cas des petites
» oscillations, et que l'on néglige le carré de r et les puissances de θ su-
» périeures à la première, notre équation se réduira, en divisant tous

55..

» les termes par $g\rho$, à

$$\frac{k^2+\rho^2-2r\rho}{g\rho}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+\theta=0.$$

» L'équation du mouvement du pendule simple, qui a pour lon-
» gueur l, est

$$\frac{l}{g}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+\theta=0;$$

» pour que ce mouvement coïncide avec celui du pendule composé,
» il faut donc qu'on ait

$$(1)\qquad l=\rho+\frac{k^2}{\rho}-2r.$$

» Désignons par λ la distance du centre de gravité de ce pendule
» à la ligne de contact du couteau avec le plan fixe; nous aurons
» $\rho=\lambda-r$; négligeant toujours le carré de r, et observant que, dans
» les expériences du pendule, la quantité k^2 est très-petite, la valeur
» de l deviendra à très-peu près

$$(2)\qquad l=\lambda+\frac{k^2}{\lambda}-r;$$

» d'où il résulte que, pour tenir compte de l'épaisseur du couteau,
» il faut d'abord calculer la valeur de l, en faisant abstraction de cette
» épaisseur, et en retrancher ensuite la grandeur du rayon r. »

Il est remarquable que cette conséquence, qui mérite d'être prise en considération dans l'appareil de Borda, se déduit aussi des résultats analytiques auxquels Euler est parvenu lui-même, dans un Mémoire sur le mouvement d'un pendule composé oscillant autour d'un axe cylindrique appuyé sur un plan horizontal. (*Voyez* le tome VI des *Nova Acta Petropolitanæ*, page 145.)

409. On a exécuté de nos jours en Angleterre un nouvel appareil pour déterminer la longueur du pendule à secondes. Il est fondé sur cette propriété du pendule, découverte par Huygens, savoir : que les axes de suspension et d'oscillation sont réciproques l'un à l'autre; c'est-à-dire que si l'on fait osciller un pendule composé, et qu'ensuite

on prenne pour point de suspension le centre d'oscillation, les nouvelles oscillations seront de même durée que les premières, et la distance des deux points de suspension sera la longueur du pendule simple correspondant à cette durée. Comme il est nécessaire pour cette expérience, dont Prony a eu le premier l'idée, d'adapter un second couteau très-près du centre d'oscillation du pendule dans la première suspension, Laplace a examiné l'influence que doivent avoir sur les résultats des observations les arêtes de ces deux couteaux, et Poisson a remarqué qu'on arrivait aux conséquences mêmes de cet illustre géomètre, ainsi qu'il suit :

La longueur du pendule simple synchrone au pendule composé est, par ce qui précède,

$$l = \rho + \frac{k^2}{\rho} - 2r.$$

Supposons qu'elle soit relative à la première suspension. Si l'on désigne par r' le rayon de l'arête cylindrique du second couteau, autour duquel on fasse ensuite osciller le pendule, la quantité k^2 ne changera pas; mais la distance du centre de gravité à l'axe du second couteau, au lieu d'être ρ comme ci-dessus, deviendra ρ', et la longueur du pendule simple sera

$$l' = \rho' + \frac{k^2}{\rho'} - 2r'.$$

Si l'on parvient à établir le synchronisme, on aura $l = l'$, ou

$$\rho + \frac{k^2}{\rho} - 2r = \rho' + \frac{k^2}{\rho'} - 2r';$$

et si les deux rayons r, r' sont égaux, cette équation deviendra

$$(\rho' - \rho)\left(1 - \frac{k^2}{\rho\rho'}\right) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\rho = \rho', \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{\rho\rho'} = 1.$$

La première solution est relative au cas où le centre de gravité di-

vise en deux parties égales la plus courte distance des deux axes *synchrones;* la seconde solution ayant lieu lorsque $\rho = \frac{k^2}{\rho'}$, et donnant

$$l = \rho + \rho' - 2r,$$

il s'ensuit que, si le centre de gravité est dans le plan de ces deux axes et situé entre eux, leur distance mutuelle sera $\rho + \rho'$, et la longueur du pendule simple, faisant ses oscillations dans le même temps que le *pendule réciproque* observé, sera la plus courte distance entre les surfaces des arêtes qui terminent les deux couteaux de suspension : c'est donc par rapport à ces surfaces qu'a lieu le théorème d'Huygens, sur la réciprocité des axes de suspension et d'oscillation.

410. En nommant r le rayon de ce demi-cylindre, et, comme précédemment, D la distance du centre de gravité de la calotte qui recouvre la boule, au centre de cette boule dont le rayon est R, λ la longueur du fil, b la distance de l'extrémité supérieure du fil à l'axe du cylindre formant le tranchant du couteau; appelant de plus λ' la distance de l'extrémité inférieure du fil au centre de la boule, p le rapport de la masse de la calotte à la somme M des masses de la boule et de la calotte, i celui de la masse du fil à la même masse M; enfin E la distance du centre de gravité de la masse M au point de sa suspension par le fil; on aura, selon Laplace,

$$E = \lambda' - pD,$$

distance du plan de suspension au centre de la boule

$$F = \lambda + b + \lambda',$$

et longueur du pendule simple, faisant ses oscillations dans le même temps que l'appareil,

$$l = F - r - pD + \frac{\frac{2}{5}.(1-p)R^2 + pD^2}{F - r - pD} - \frac{i}{6}.(2F - r - \lambda - 3pD - \tfrac{2}{5}R).$$

Borda suppose $D = R = \lambda'$; et, dans les termes multipliés par i, la diffé-

rence qui peut exister entre ces trois quantités est insensible; alors $\lambda = F - b - R$. Laplace, prenant avec lui pour unité la deux cent-millième partie d'une grande règle qui lui servait de module (art. 405), observe que dans son appareil on a, en supposant $r = 0$,

$$b = 1968,\quad F = 203015,17,\quad R = 937,\quad p = 0,0038015,\quad i = 0,0013861;$$

et il trouve en conséquence, par la formule précédente,

$$l = 202965,855;$$

ce qui ne diffère que d'une quantité insensible de la valeur 202965,82 que Borda a obtenue par sa formule, ainsi qu'on le verra dans l'article suivant.

Calcul numérique d'une expérience du pendule faite avec l'appareil de Borda.

411. Quoique nous venions d'expliquer en détail et d'une manière générale toutes les réductions à faire à la longueur observée du pendule, pour en déduire celle du pendule à secondes, nous pensons qu'un exemple numérique répandra encore plus de clarté sur cette opération délicate. Nous allons en conséquence rapporter la première expérience faite par Borda lui-même à l'Observatoire de Paris, et décrite au tome III de la *Base du Système métrique décimal,* pages 349 et suivantes.

Nous avons déjà dit que le pendule d'expérience avait 4 mètres de longueur; ainsi il ne faisait qu'une oscillation en deux secondes. Il résultait de là cet avantage, que, cette longueur étant quadruple de celle du pendule simple, l'erreur qu'on pouvait commettre sur la mesure avait quatre fois moins d'influence sur les résultats.

Le pendule, mis en oscillation à $7^h 45^m 32^s$ du matin, paraissait se cacher derrière l'écran un peu avant le centre du signal marqué par l'intersection de deux droites qui faisaient des angles de 45° avec l'horizon, quand la lentille de l'horloge était en repos, et, à $7^h 46^m 8^s$, le centre de ce signal devançait un peu le pendule. On a estimé que le premier concours avait eu lieu à $7^h 45^m 56^s$; mais ordinairement on

prend pour époque du véritable concours le milieu des temps du commencement et de la fin d'une coïncidence. En procédant de la sorte, et observant à chaque concours l'arc décrit par le pendule de part et d'autre de la verticale, on a eu

NOMBRES des concours.	HEURES des concours.	INTERVALLES entre les concours.	ARCS décrits.
1er...............	7h 45m 56s		64′
		73m 14s	
2e...............	8.59.10		32
		73.30	
3e...............	10.12.40		19
		73.49	
4e...............	11.26.29		11 ½
		72.34	
5e...............	12.39. 3		7

Deux thermomètres décimaux, placés dans la cage qui renfermait le pendule et l'horloge, l'un à la hauteur de la boule, l'autre auprès de la suspension, étaient observés après chaque concours. Les températures se sont trouvées ainsi qu'il suit :

	Thermomètre inférieur.	Thermomètre supérieur.
1er concours	15g,2	16g,5,
2e	15 ,4	16 ,0,
3e	15 ,4	16 ,9,
4e	15 ,4	16 ,8,
5e	15 ,6	17 ,0.

Borda attribue l'excès de la température dans la partie élevée de la cage, à ce que les parties chaudes de l'air renfermé dans cette cage s'élevaient toujours vers la surface supérieure.

La distance, depuis le point de suspension jusqu'au plan mis au-dessous de la boule, a été mesurée avec une règle de platine; l'extrémité de la languette portant sur le plan, son vernier marquait 3952,3 parties [chaque partie étant un 200 millième de la distance comprise depuis le zéro du vernier jusqu'à la partie supérieure de la règle (art. **405**)], et par conséquent la longueur mesurée $\Lambda = 203952,3$ parties.

Le thermomètre métallique marquait au même instant 181,5 parties, et le baromètre était à $28^{po}2^{lig},8$.

On a trouvé ensuite,

Longueur de la verge du couteau à laquelle le fil est soutenu, comptée du point de suspension.	$b =$	1968	parties.
Rayon de la boule.	$R =$	937	
Poids de la boule	$P' =$	9911	grains.
Poids de la calotte.	$P'' =$	37,82	
Poids du fil	$P''' =$	13,79.	

Enfin, la marche de l'horloge à laquelle on a comparé le pendule a été déterminée par six observations de passages d'étoiles, faites deux jours de suite. Cette horloge s'est trouvée avancer de $13^s,4$ par jour sur les fixes.

Pour conclure de cette expérience la longueur du pendule qui bat les secondes, il faut d'abord calculer le nombre d'oscillations qu'aurait accompli le pendule dans un jour solaire moyen, en lui supposant toujours le même mouvement que pendant l'expérience. Or l'intervalle entre le premier et le deuxième concours ayant été de $4394^s = N$, et la lentille de l'horloge ayant fait deux fois le nombre d'oscillations du pendule plus deux (art. **400**), ce pendule a nécessairement fait $\frac{4394-2}{2} = 2196$.

D'un autre côté, comme l'horloge avançait de $13^s,4$ sur les fixes, elle faisait 86413,4 oscillations dans un jour sidéral. Mais le jour moyen, exprimé en heures sidérales, est de $24^h3^m56^s,6$ (art. **14**); ajoutant donc $3^m56^s,6$ ou $236^s,6$ à 86413,4, on aura, pour le nombre des oscillations faites par l'horloge dans un jour moyen, $T = 86650$.

Maintenant, employant la formule $T' = \frac{T}{2} - \frac{T}{N}$ démontrée à l'article **401**, et dans laquelle T et N ont les valeurs précédentes, on trouvera, pour le nombre d'oscillations du pendule dans un jour solaire moyen, $T' = 43305,28$.

Par un calcul pareil, le nombre d'oscillations du pendule, conclu du second intervalle, est de. 43305,35
du troisième intervalle, de 43305,44
du quatrième intervalle, de. 43305,14

C'est d'après cette méthode de calcul, et en ayant égard à la formule de correction des amplitudes donnée à l'art. **402**, qu'on a formé le tableau suivant :

INTERVALLE entre les concours.	NOMBRE D'OSCILLATIONS en un jour, conclu de l'expérience.	CORRECTIONS pour l'amplitude des arcs.	NOMBRES corrigés.
73^{m}14^s	43305,28	0,51	43305,79
73.30	43305,35	0,14	43305,49
73.49	43305,44	0,05	43305,49
72.34	43305,14	0,02	43305,16
		Terme moyen....	43305,48

Détermination de la longueur du pendule à secondes.

Distance depuis le point de suspension jusqu'au-dessous de la boule	$\Lambda =$	203952,3 parties.
Ajoutant $\frac{3}{10}$ de partie pour l'allongement que prenait la règle étant suspendue à la place du pendule		0,3
on a		203952,6
La température moyenne de la cage était de		16^{g}12
mais, lors de la mesure du pendule, les thermomètres marquaient.		16,30
Excès.		0,18
Pour 1^g, le fil s'allongeait de 2,33 parties, et proportionnellement pour 0^g,18, on a. . .		0,43
à ôter de		203952,60
reste pour la longueur réduite à la température moyenne.	$\Lambda' =$	203952,17
Otant le rayon de la boule.		937,00
on a, distance au centre de la boule	$\rho' =$	203015,17

Mais la distance de ce centre à celui d'oscillation, ou . . . . $\frac{2}{5}\frac{R^2}{\rho'} =$ + 1,73

donc la longueur du pendule. . . . . $l' =$ 203016,90

Faisant la correction due à la pesanteur du fil et à celle de la calotte, par la formule de l'art. **404**, on a. . . . . $-Q =$ − 51,08

de là, longueur du pendule dans l'air . . . . $l_1 =$ 202965,82

Il s'agit de réduire ensuite cette longueur à être celle du pendule à secondes de temps moyen, non par la première formule de l'art. **407**, parce que n est trop grand, mais d'après ce principe, que les longueurs des pendules sont en raison inverse des carrés des nombres d'oscillations qu'ils font dans le même temps. On aura donc cette proportion :

$$(86400^s)^2 : (43305^s,48)^2 :: 202965,82 : l_{(2)},$$

d'où

$$l_{(2)} = 50989,55 \text{ parties};$$

c'est la longueur du pendule à secondes de temps moyen oscillant dans l'air.

Pour réduire cette longueur à ce qu'elle serait si le pendule oscillait dans le vide, Borda a pris le rapport de 1 à 17044 pour celui des pesanteurs spécifiques de l'air et de la boule de platine, le thermomètre de Réaumur étant à $16^o \frac{3}{4} = 21$ degrés centigrades, et le baromètre à 28 pouces ; mais pendant l'expérience du pendule, le baromètre marquait $28^{po} 2^{lig},8$ et le thermomètre décimal 16^g. Il suit de là, qu'en faisant dans la formule (1) de l'art. **406** les changements convenables, d'après ces données, la réduction au vide est, selon Borda, de. . . . . 3,10 parties.

Ajoutant à cette réduction . . . . $l_{(2)} =$ 50989,55

on a, longueur du pendule à secondes dans le vide. . . . . $l_{(3)} =$ 50992,65

Cette longueur a besoin de subir encore une correction pour la rapporter à un terme fixe de température, et pouvoir, par conséquent, connaître la longueur absolue du pendule à secondes. Borda a ob-

56..

servé qu'à la température de la glace fondante, le thermomètre métallique de la règle employée pour mesurer le pendule marquait 151 parties, et que cette règle s'allongeait d'un 216000e pour une partie de plus du même thermomètre. Or, pendant l'expérience du pendule, le thermomètre marquait 181,5 parties; il y a donc un excès de température correspondant à 30,5 parties, et par conséquent l'allongement de la règle, à partir du terme de la glace fondante, est de

$$\frac{30,5}{216000} \times 50992,6 = 7,15 \text{ parties},$$

quantité dont le pendule a paru trop court pendant l'expérience; donc, longueur du pendule entièrement corrigée,

$$L = 50992,65 + 7,15 = 50999,80 \text{ parties}.$$

La moyenne de vingt résultats s'est trouvée de 50999,60 parties, et les écarts autour de cette moyenne ne vont pas à 0,5 partie; d'où l'on peut présumer que la véritable longueur du pendule à secondes diffère extrêmement peu de 50999,60 parties de la règle prise à la température de la glace fondante, chaque partie étant, comme nous l'avons déjà dit, égale à 0,0002 de cette règle. Toutefois il faudrait diminuer cette longueur du rayon de l'arête cylindrique du couteau de suspension (art. **409**), et la réduire au niveau de la mer par la seconde formule de l'art. **407**, afin de la rendre comparable à d'autres mesures de pendules, observées en différents lieux et réduites au même niveau.

Mais, la longueur précédente étant purement relative, il faut enfin connaître son rapport avec la toise du Pérou ou avec le mètre. Par exemple, Borda a trouvé que le rapport de la règle ci-dessus à celle n° 1, employée à la mesure des bases de l'arc terrestre, est tel que les 50999,60 parties de la première, qui expriment la longueur du pendule à secondes, sont égales à 50998,83 parties de la règle n° 1; d'où il est facile de conclure que la longueur du pendule = 0,2549919 de cette seconde règle, supposée à la température de la glace fondante. Ce savant géomètre s'est assuré en outre que la toise du Pérou, prise à la température de 13° Réaumur, est à la longueur de la règle n° 1

soumise à la température de la glace fondante :: 100015,15 : 200000. Partant,

longueur du pendule à secondes de temps moyen

$$= \frac{200000}{100015,15} \times 0,2549919 = 440,5593 \text{ lignes}$$
$$= 0^{m},993827\ ,$$

résultat qui serait tant soit peu modifié par l'application de la remarque de M. Bessel dont il est parlé à la fin de l'art. **406**.

412. Les expériences que le capitaine Kater fit à Londres pour déterminer la longueur du pendule à secondes l'ont été avec l'appareil à double suspension, dont nous avons parlé à l'art. **409**. Cet appareil consistait principalement en une règle de cuivre, à laquelle on avait adapté, vers une des extrémités et au-dessus du premier couteau, un gros poids de forme cylindrique; en un second poids rectangulaire beaucoup plus petit, placé à quelque distance au-dessous du second couteau; enfin, en un troisième petit poids curseur, destiné à établir le synchronisme dans les deux situations du pendule. Le détail de ces belles expériences se trouve inséré dans les *Transactions philosophiques* de 1818.

413. Selon les expériences de Borda, faites en présence d'autres savants, la longueur du pendule simple, réduite au niveau de la mer, est, à Paris,

$$a = 0^{m},993855\ ,$$

en prenant pour unité de temps la seconde sexagésimale ou la 86400e partie du jour moyen.

Pour connaître ensuite l'intensité g de la pesanteur, ou de la gravité apparente dans le lieu même de l'expérience, mais dans le vide, on emploiera la formule

$$1'' = \pi \sqrt{\frac{a}{g}};$$

ainsi, à Paris, le double de l'espace qu'un corps abandonné à la seule action de la pesanteur parcourrait dans la 1re seconde de sa chute, est

$$g = 9^{m},80896, \quad \text{de là} \quad \log g = 9,9916228;$$

valeur très-peu différente de celles qu'ont obtenues plus tard MM. Biot, Mathieu, et d'autres savants.

Maintenant que nous connaissons l'intensité de la pesanteur dans le lieu même des expériences du pendule, c'est-à-dire la force en vertu de laquelle les corps sont précipités vers le centre de la Terre, nous pouvons évaluer numériquement la force centrifuge qui diminue cette tendance des corps pesants, en remarquant que la pesanteur est, partout ailleurs qu'aux pôles, moindre que si la Terre ne tournait pas sur son axe, et qu'à l'équateur, ces deux forces étant directement opposées l'une à l'autre, la pesanteur $p = 9^m,78019$ qu'on y observe est l'excès de la gravité G ou de l'attraction de la Terre sur la force centrifuge F. Or celle-ci, à l'extrémité du rayon équatorial R, a pour mesure le carré de la vitesse de ce point divisé par ce rayon : si donc T est le temps de la rotation terrestre, on a $F = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$, et par suite

$$p = G - F = G - \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

enfin

$$G = 9^m,78019 + 0^m,03391 = 9^m,81410,$$

à cause de $R = 6377100^m$, et de $T = 86164^s$, temps moyen (art. **14**). Le rapport de la force centrifuge à la gravité, à l'équateur, est donc

$$\frac{4\pi^2 R}{GT^2} = \frac{1}{289,41}.$$

Cette force centrifuge, qui agit en tous les points de la surface de la Terre, perpendiculairement à l'axe de rotation, diminue l'attraction d'une quantité moindre qu'à l'équateur. Pour évaluer approximativement cette quantité à la latitude H, en ne tenant pas compte de l'ellipticité de la Terre, il faut y décomposer la force f suivant le rayon terrestre correspondant à cette latitude : or, en appelant ρ le rayon du parallèle que l'on considère, et faisant en outre abstraction de la variation de la pesanteur à la surface de la Terre, on a

$$f = \frac{4\pi^2 \rho}{T^2} = \frac{4\pi^2 R \cos H}{T^2},$$

et la composante de cette force centrifuge est alors

$$f \cos H = \frac{G}{289} \cos^2 H;$$

c'est elle qui représente à très-peu près, dans le même lieu, la diminution de la pesanteur, et l'on voit qu'elle décroît sensiblement comme le carré du cosinus de la latitude. Mais, la Terre étant un sphéroïde aplati aux pôles, l'attraction qu'elle exerce sur les corps placés à sa surface et à différentes distances du centre diminue en allant du pôle à l'équateur; et puisque, suivant la théorie de l'attraction des sphéroïdes, cette diminution, qui doit s'ajouter à la force centrifuge, est aussi proportionnelle au carré du cosinus de la latitude (art. **415**), il s'ensuit que le coefficient $\frac{1}{289}$ devient à très-peu près $\frac{1}{200}$. Telle est la quantité dont s'accroît le poids d'un corps transporté de l'équateur au pôle.

Application de la théorie précédente aux observations du pendule invariable, faites en divers lieux, pour les rendre comparables entre elles.

414. Nous venons d'expliquer très en détail tout ce qui a rapport à la théorie et aux expériences du pendule construit d'après les principes de Borda; mais cet instrument, tel que nous l'avons décrit, n'étant pas le plus commode pour les voyages de long cours, on préfère employer à cet effet un pendule *invariable*. Celui-ci est formé d'une tige cylindrique de cuivre jaune, coulée avec la lentille, et à l'extrémité de laquelle est fixé un couteau d'acier. Ce couteau, lors des expériences, repose sur deux agates incrustées dans une pièce d'acier que porte un trépied de fer très-solide. On dispose ces agates horizontalement au moyen d'un niveau à bulle d'air. Comme il est nécessaire de lire les amplitudes décrites par le pendule, la lentille est garnie à son extrémité inférieure d'une petite pointe d'environ 8 millimètres, fondue en même temps que l'instrument, et au-dessous de laquelle on place, à peu près à 3 millimètres de distance, l'échelle des amplitudes dont les parties, étant celles d'un arc de cercle, s'évaluent en degrés. Par exemple, les deux pendules invariables dont M. le capitaine Du-

perrey fit usage en 1822 aux îles Malouines, étaient d'une longueur telle, que la distance du plan de suspension à l'échelle des amplitudes égalait $1^m,075$: ainsi 2 millimètres et demi de cette échelle répondaient à un angle de 7′59″,685.

Après avoir placé près du pendule, sur un trépied de fer, une horloge dont le balancier peut n'être pas à compensation, on rend les oscillations de ce balancier synchrones à celles du pendule; et, pour mesurer la durée des oscillations de ce dernier, on se sert d'un chronomètre dont la marche soit exactement connue et déterminée par des observations de distances zénithales du Soleil, faites le matin et le soir pendant la durée des expériences, ou mieux encore, comme nous l'avons déjà dit (art. 400), par des passages d'étoiles observés plusieurs jours de suite, aux fils d'une lunette solidement établie dans un azimut quelconque.

Il est très-important de bien fixer l'heure à laquelle l'horloge ou le *compteur* commence à indiquer les oscillations du pendule, et celle où ces oscillations terminent une expérience. Or, à l'instant où un observateur prend l'heure sur le chronomètre, un autre observateur note l'heure, la minute et la seconde marquées par le compteur, et estime même la fraction de seconde en suivant les excursions du pendule. C'est en faisant de pareilles comparaisons de minute en minute, et un grand nombre de fois, que l'on obtient par un milieu l'heure précise du compteur correspondante à celle du chronomètre, et par conséquent le nombre d'oscillations du pendule dans l'intervalle de deux expériences.

S'il arrivait que, pendant le cours d'une expérience, le pendule et le balancier ne fussent pas parfaitement d'accord, on accélérerait ou l'on retarderait un peu la marche de celui-ci, sans néanmoins lui faire perdre une oscillation. On pourra même augmenter la durée de l'expérience, qui ne peut guère se prolonger au delà de cinq à six heures, en augmentant l'amplitude des arcs à l'époque où elle devient si petite, qu'il est très-difficile de bien juger la fraction d'oscillation dans les comparaisons du pendule au chronomètre. Pour cela il suffira, comme M. Arago l'a proposé, de pousser légèrement le pendule dans le sens même de son mouvement, à l'instant où il est dans la verticale, de laquelle il s'écarte alors plus qu'il n'aurait fait sans cette nouvelle impulsion, et

sans avoir à craindre que la durée de son retour à cette ligne en soit altérée (art. **395**). Si par cette opération le pendule n'était plus d'accord avec le compteur, on l'y remettrait de manière qu'il ne perdît rien de son oscillation.

Quand on a ainsi déterminé les oscillations du pendule dans un intervalle de temps donné, et qu'on a eu soin, à chaque expérience, d'observer tout à la fois l'état du baromètre et des thermomètres et les amplitudes, on applique à ces oscillations les corrections et réductions suivantes.

Correction d'amplitude.

La correction d'amplitude s'effectue à l'aide d'une formule que nous avons donnée (art. **397**). Appliquons-la à l'une des expériences faites le 24 avril 1822 à l'Observatoire royal de Paris. La première de ce jour a donné au commencement $\theta = 3^\circ\ 0'\ 31''$,

$$\text{à la fin } \theta_n = 1.36.30;$$

et pendant l'intervalle de ces deux comparaisons, le pendule a fait un nombre d'oscillations $n = 3763^{osc},890$; on aura donc

$$\theta + \theta_n = 4^\circ\ 37'\ 1'',$$
$$\theta - \theta_n = 1.24.1,$$

et, calculant la correction avec les logarithmes à sept décimales, il viendra

$\log n$	$= 3,5756369$	$\log \sin \theta$	$= 8,7200038$
$\text{l. } \sin(\theta + \theta_n)$	$= 8,9057619$	$\text{c. } \log \sin \theta_n$	$= 1,5518036$
$\text{l. } \sin(\theta - \theta_n)$	$= 8,3880483$	Som. K	$= 0,2718074$
log numér.	$= 0,8694471$	log K	$= 9,4342613$
c. log dénom.	$= 8,6983730$	$\text{l. } 32\mu$	$= 1,8673657$
log correct.	$= 9,5678201$	log dénom.	$= 1,3016270,$

donc correction d'amplitude $= 0,36968$.

Correction relative à la dilatation du pendule.

Si l'on désigne par a la longueur du pendule lors de la température x, par a_0 cette longueur à la température de la glace fondante, par N les oscillations infiniment petites obtenues à la température x, enfin par N_0 les oscillations que le pendule aurait faites dans le même temps, à la température zéro, on aura (art. 394),

$$\frac{a_0}{a} = \frac{N^2}{N_0^2}, \quad \text{d'où} \quad N_0 = N\sqrt{\frac{a}{a_0}}.$$

Mais, en désignant par δ la dilatation du pendule pour un degré centigrade, il est évident que

$$a = a_0(1 + \delta x);$$

partant

$$N_0 = N\sqrt{1 + \delta x} = N(1 + \tfrac{1}{2}\delta x - \tfrac{1}{8}\delta^2 x^2 \ldots),$$

série tellement convergente, que l'on peut écrire simplement

$$N_0 = N + \tfrac{1}{2}\delta x N.$$

Au surplus, il n'est pas indispensable de ramener à la température zéro le nombre d'oscillations observé; si l'on voulait, par exemple, le rapporter à une autre température normale t, on mettrait $x - t$ à la place de x dans la formule précédente.

Par exemple, soient $\delta = 0{,}0000178$, température moyenne $x = 15^G{,}03$ pendant l'expérience, $N = 90330{,}47$ les oscillations infiniment petites dans un jour solaire moyen, et $t = 15^G$ la température normale; on aura

$$x - t = 0{,}03, \quad \tfrac{1}{2}\delta = 0{,}0000089,$$

et

$$\begin{aligned} \log \tfrac{1}{2}\delta &= 4{,}9493900 \\ \text{l.}\,(x - t) &= 8{,}4771212 \\ \log N &= 4{,}9558342 \\ \hline &\ 8{,}3823454 = 0{,}0241, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la correction de dilatation calculée pour 15° centigrades de température est $+ 0^{osc},024$.

Réduction au vide.

Il s'agit maintenant de savoir combien le pendule invariable qui fait un nombre connu d'oscillations infiniment petites dans l'air, en un temps donné, en ferait dans le même temps s'il se trouvait dans le vide: or on a dans ce cas

$$\frac{N_0^2}{N''^2} = \frac{p_0}{p''},$$

N'' et N_0 étant respectivement les nombres d'oscillations dans l'air et dans le vide, et p'', p_0 le poids du pendule dans les mêmes circonstances (art. 394). De plus, si v désigne le volume du pendule, D sa pesanteur spécifique, et que Δ_0, Δ_x représentent les pesanteurs spécifiques de l'air aux températures zéro et x, on a (art. 406),

$$\frac{p_0}{p''} = \frac{p'' + v\Delta_x}{p''};$$

de là

$$N_0 = N'' \sqrt{\frac{p'' + v\Delta_x}{p''}};$$

réduisant en série et s'arrêtant au second terme du développement, ce qui est toujours suffisant, il vient

$$N_0 = N'' + \tfrac{1}{2}\frac{v\Delta_x . N''}{p''};$$

mais, à cause de

$$\Delta_x = \frac{\Delta_0 . h}{0^m,76\,(1 + mx)(1 + m'x)}, \quad \text{et} \quad p'' = v\,(D - \Delta_0),$$

h étant la hauteur du baromètre et x la température observée (art. 248), on a

$$\text{réduct. au vide} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta_0 . h . N''}{0^m,76\,(D - \Delta_0)(1 + 0,00375x)\,(1 + \frac{1}{5555}x)}.$$

On jugera que les termes négligés sont extrêmement petits, en re-

marquant que, lorsque $\Delta = 1$, on avait $D = 6381$ pour le pendule employé aux îles Malouines.

Lors des expériences citées, la hauteur moyenne du baromètre, réduite à la température zéro, était de $751^{mm},40 = \frac{h}{1+m'x} = \frac{h}{1+\frac{1}{5550}x} = h_0$, et la hauteur moyenne du thermomètre centig. $+15^G,03 = x$; de plus, le nombre des oscillations du pendule en 24^h de temps moyen dans l'air était $N'' = 90330^{osc},470$; on a donc

$$\begin{array}{rcl} \log \frac{1}{2} & = & 9,6989700 \\ \log N'' & = & 4,9558342 \\ \log \frac{h_0}{0,76} & = & 9,9950576 \\ \text{c.} \log (6381) & = & 6,1951113 \\ \text{c.} \log (1+mx) & = & 9,9761871 \\ \hline \text{l. réduction} & = & 0,8211602, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log 751^{mm},40 & = & 2,8758712 \\ \text{c.} \log 760\ \ ,00 & = & 7,1191864 \\ \hline & & 9,9950576 \end{array}$$

$$1 + mx = 1 + 0,00375x = 1,0563625$$

réduction au vide $= +\ 6,625$.

Toutefois cette réduction est un peu trop petite, puisque, d'après ce qui a été dit à l'art. **406**, il faudrait la multiplier par un facteur f dont la valeur, faute d'expérience directe, peut être supposée de $\frac{3}{2}$.

Réduction au niveau de la mer.

Si l'intensité de la pesanteur dans le lieu du pendule est exprimée par g'' et au niveau de la mer par g'''; si en outre N'', N''' sont les nombres des oscillations infiniment petites faites respectivement dans le même temps T en ces deux lieux, on aura (art. **394**)

$$T = N''\pi\sqrt{\frac{a}{g''}}, \quad T = N'''\pi\sqrt{\frac{a}{g'''}},$$

et par suite

$$N''' = N''\sqrt{\frac{g'''}{g''}}.$$

Mais l'on sait d'ailleurs que, z étant la hauteur du lieu des expériences au-dessus de la mer, et R le rayon de la Terre, on a

$$\frac{g'''}{g''} = \frac{(R+z)^2}{R^2};$$

partant,

$$N''' = N''\left(1 + \frac{z}{R}\cdots\right),$$

et enfin,

$$\text{réduction au niveau de la mer} = \frac{N''z}{R}.$$

Ainsi N''' seront les oscillations que le même pendule descendu à ce niveau aurait faites dans le même temps.

A Paris, la hauteur du lieu des expériences était $z = 72^{m}$, et l'on a eu par sept comparaisons $N'' = 90330,47$. On sait d'ailleurs que $R = 6366200^{m}$; ainsi

$$\begin{aligned} \log N'' &= 4,9558342 \\ \log z &= 1,8573325 \\ \text{c. } \log R &= \underline{3,1961197} \\ & 0,0092864 = 1,0216; \end{aligned}$$

la réduction au niveau de la mer est donc $= 1,022$. Observons cependant que le capitaine Kater remplace cette formule de réduction par une autre où il a fait entrer en considération l'attraction de la couche terrestre comprise entre la station et le niveau de la mer (*Transac. philosoph.*, 1818). Poisson, qui s'est proposé le même but, a trouvé que quand, à la hauteur z de la station, la longueur du pendule à secondes est l', cette longueur au niveau de la mer a pour expression

$$l = l'\left(1 + \frac{5z}{4R}\right),$$

R désignant le rayon de la Terre (*Traité de Mécanique*, tome I, page 496). C'est donc par ce même facteur $1 + \frac{5z}{4R}$ qu'il faudrait, en toute rigueur, multiplier la pesanteur g', qui a lieu en terre ferme, pour la réduire au niveau des mers.

Ces formules de correction et de réduction, relatives au pendule invariable, sont donc tout à fait conformes à celles qui s'appliquent au pendule composé de Borda. Elles sont indispensables pour ramener aux mêmes circonstances physiques des observations faites en diffé-

rents lieux de la Terre; et ce sont celles que M. Mathieu a employées pour soumettre au calcul les expériences de M. le capitaine Duperrey. (*Connaissance des Temps* pour 1826.)

Lorsque l'on connaît de cette manière les nombres d'oscillations infiniment petites que deux pendules font en 24 heures de temps moyen dans deux lieux différents, et que la longueur absolue de l'un est connue, on a celle de l'autre ainsi qu'il suit.

D'abord, si a et a' sont ces longueurs dans deux lieux dont les gravités soient respectivement g et g', on a (art. 394),

$$\frac{a}{a'} = \frac{g}{g'};$$

ensuite, si n, n' sont les nombres d'oscillations infiniment petites, faites par un pendule invariable, dans les mêmes lieux et dans le même temps, on a, par la même théorie,

$$\frac{g}{g'} = \frac{n^2}{n'^2},$$

par conséquent

$$\text{(A)} \qquad \frac{a'}{a} = \frac{n'^2}{n^2};$$

c'est-à-dire que les longueurs du pendule simple synchrone au pendule invariable transporté dans deux lieux quelconques, sont proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations infiniment petites faites dans le même temps par ce pendule invariable. Si l'on prend pour unité l'une des longueurs, celle de Paris, par exemple, ou a', l'autre longueur sera évidemment

$$a = \frac{n^2}{n'^2}.$$

Parmi le grand nombre d'expériences d'un pendule invariable faites en 1822 à l'Observatoire royal de Paris, dont la latitude la plus récente $= 48° 50' 13''$, et à la hauteur de 72^m au-dessus du niveau de la mer, celles du 24 avril, que nous avons citées, ont donné, par sept comparaisons,

oscillations observées en $5^h 45^m 30^s$ du chronom.	21675,296
correction d'amplitude provenant de sept comparaisons.	+ 0,546
oscillations infiniment petites { en $5^h 45^m 30^s$ du chronom.	21675,842
oscillations infiniment petites { en 24 heures du chronom.	90342,148
retard du chronomètre dans un jour moyen 11″,17, et en oscillations.	− 11,678
oscillations du pendule en 24^h temps moyen, dans l'air	90330,470
réduction à la température de 15° centigr.	+ 0,024
au vide.	+ 6,625
au niveau de la mer. . . .	+ 1,022
Résultat partiel. .	90338,141
Résultat moy., déduit de trois résultats partiels, ou n' =	90336,845
Pour les îles Malouines, M. Mathieu a obtenu, par le même procédé. . . . . n =	90349,198

Ainsi

$$a = \frac{n^2}{n'^2} = \frac{(90349,198)^2}{(90336,845)^2} = 1,00027350;$$

c'est-à-dire que la longueur du pendule à secondes à Paris, étant prise pour unité, celle aux îles Malouines est 1,00027350.

Lorsque les observations du pendule ont été faites à des latitudes peu différentes, on cherche à reconnaître si elles s'accordent avec un aplatissement adopté, en calculant l'accélération qu'un pendule invariable acquiert lorsqu'il est transporté à une plus haute latitude.

Soient N les oscillations infiniment petites du pendule à la latitude H, pendant un jour solaire moyen, et N + u ses oscillations à la latitude H′, pendant le même temps : on aura

$$l = 1 + \mu \sin^2 \text{H}, \quad l' = 1 + \mu \sin^2 \text{H}';$$

et, à cause de la relation (A) précédente,

$$\frac{l'}{l} = \frac{(\text{N}+u)^2}{\text{N}^2} = \frac{1+\mu \sin^2\text{H}'}{1+\mu \sin^2 \text{H}}.$$

Développant cette équation, et tirant la valeur de u, qui doit être assez

petite pour qu'on en puisse négliger le carré, on aura définitivement

$$u = \frac{N\mu}{2} \sin(H'+H)\sin(H'-H)(1-\mu\sin^2 H).$$

C'est par cette formule que M. Mathieu a trouvé que le pendule invariable cité plus haut, et qui faisait à Paris 90336,845 oscillations en 24 heures solaires moyennes, aurait dû avoir aux îles Malouines une accélération de 11,173 au lieu de 12,353 données par les expériences, en admettant l'aplatissement $\frac{1}{305}$ et faisant par conséquent $\mu = 0,005371$. Cette différence entre le calcul et les observations est si petite, qu'on est porté à regarder les expériences des Malouines comme très-d'accord avec cet aplatissement; mais à l'Ile-de-France l'accélération est de 13 à 14 secondes de plus qu'elle ne devrait être.

On doit principalement aux voyages de MM. les capitaines Sabine, Duperrey et Freycinet un grand nombre d'observations très-précises de ce genre, faites sur plusieurs points des deux hémisphères, et desquelles résulte un aplatissement de $\frac{1}{290}$. Plusieurs d'entre eux, comme certaines déterminations de latitude, présentent dans leurs résultats comparés des irrégularités qui troublent sensiblement la loi ordinaire du décroissement de la pesanteur et accusent d'assez fortes perturbations locales [*]. Mais il est vraiment étonnant de voir l'astronome, s'appuyant sur les sublimes théories de la *Mécanique céleste*, déduire des petites inégalités du mouvement de la Lune, découvertes par Laplace, la valeur de l'aplatissement général de la Terre, avec une précision que le géomètre, aidé de tous les secours de la Géodésie et de la Physique, n'est pas toujours sûr d'atteindre.

---

[*] M. le capitaine Sabine paraît avoir remarqué que l'accélération du pendule a généralement lieu sur les terrains volcaniques, et le retard sur les terrains sablonneux et argileux. (*Voyez* dans le Bulletin de la Société de Géographie, n° 50, page 247, une *Notice sur les expériences du pendule invariable, faites de* 1822 *à* 1825, par L.-I. Duperrey, capitaine de frégate, etc., et dans le *Bulletin mathématique* de M. Férussac, page 32, tome VII, un Mémoire intéressant de M. Saigey, comprenant la discussion de toutes les expériences de ce genre connues jusqu'à présent.

Recherche de l'aplatissement de la Terre par les mesures du pendule.

415. C'est par des expériences précises, et semblables aux précédentes, que plusieurs savants ont déterminé les longueurs du pendule à secondes, en différents lieux de la Terre. Voici, en considérant seulement les observations faites dans le XVIIIe siècle, les rapports de ces longueurs, tels qu'on les trouve dans la *Mécanique céleste*, tome II, n° 42, la longueur du pendule observée à Paris, par Bouguer, étant prise pour unité.

LIEUX des observations.	LATITUDES en grades.	LONGUEURS DU PENDULE à secondes centésim. de temps moyen.	NOMS des observateurs.
Équateur	0^g 00	0,99669	Bouguer.
Porto-Bello	10,61	0,99689	Bouguer.
Pondichéry	13,25	0,99710	Le Gentil.
Jamaïque	20,00	0,99745	Campell.
Petit-Goave	20,50	0,99728	Bouguer.
Cap de Bonne-Espérance	37,69	0,99877	La Caille.
Toulouse	48,44	0,99950	Darquier.
Vienne, en Autriche	53,57	0,99987	Liesganig.
Paris	54,26	1,00000	Bouguer.
Gotha	56,63	1,00006	Zach.
Londres	57,22	1,00018	
Arengsberg	64,72	1,00074	Grisschow.
Pétersbourg	66,60	1,00101	Mallet.
Laponie	74,22	1,00137	Académiciens.
Ponoi	74,53	1,00148	Mallet.

Toutes ces mesures, qui sont réduites au vide et à la même température, peuvent être considérées comme ayant été prises au niveau des mers; les neuf premières ont été trouvées par la méthode même que Bouguer a employée au Pérou. Toutes les autres ont été conclues de la comparaison des oscillations d'un pendule invariable. Quand bien même il y aurait quelque incertitude sur toutes, l'uniformité de

la méthode, comme le fait observer l'auteur de la *Mécanique céleste*, doit donner, avec assez de précision, la loi de leurs variations, l'un des principaux objets à connaître.

Afin de déterminer l'ellipse la plus probable, qui, d'après l'ensemble de toutes ces mesures, représente la génératrice du sphéroïde terrestre, nous ferons usage de la méthode des moindres carrés, déjà employée à l'art. 373, et nous partirons de ce principe, savoir : que *la longueur du pendule croît depuis l'équateur jusqu'au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude;* c'est en effet ce que l'on démontre par la théorie de l'attraction, lorsqu'on suppose la Terre un ellipsoïde de révolution, et sa densité croissant de sa surface vers le centre.

Cela posé, si l'on désigne par z la longueur du pendule à l'équateur et par y sa variation jusqu'au pôle, sa longueur, à la latitude H, sera généralement représentée par $z + y \sin^2 \mathrm{H}$; si, de plus, $x^{(1)}$, $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$ expriment les erreurs des observations, c'est-à-dire les différences entre les longueurs observées et celles qui résultent de l'expression analytique $z + y \sin^2 \mathrm{H}$; enfin si l'on met, dans cette expression, par $\sin^2 \mathrm{H}$ les valeurs relatives aux différents lieux désignés dans le tableau précédent, on aura les équations de condition suivantes :

$$
\begin{aligned}
0{,}99669 - z - y.0{,}000000 &= x^{(1)},\\
0{,}99689 - z - y.0{,}027519 &= x^{(2)},\\
0{,}99710 - z - y.0{,}042696 &= x^{(3)},\\
0{,}99745 - z - y.0{,}095491 &= x^{(4)},\\
0{,}99728 - z - y.0{,}100158 &- x^{(5)},\\
0{,}99877 - z - y.0{,}311419 &= x^{(6)},\\
0{,}99950 - z - y.0{,}475505 &= x^{(7)},\\
0{,}99987 - z - y.0{,}555960 &= x^{(8)},\\
1{,}00000 - z - y.0{,}566716 &= x^{(9)},\\
1{,}00006 - z - y.0{,}603392 &= x^{(10)},\\
1{,}00018 - z - y.0{,}612441 &= x^{(11)},\\
1{,}00074 - z - y.0{,}723067 &= x^{(12)},\\
1{,}00101 - z - y.0{,}749092 &= x^{(13)},\\
1{,}00137 - z - y.0{,}844785 &= x^{(14)},\\
1{,}00148 - z - y.0{,}848295 &= x^{(15)}.
\end{aligned}
$$

L'équation du *minimum*, par rapport à z, s'obtiendra sur-le-champ en égalant à zéro la somme de toutes ces équations; ainsi l'on aura

$$(1) \qquad 14{,}988390 - z.15 - y.6{,}556536 = 0.$$

Multipliant ensuite chacune de ces mêmes équations par le coefficient de y qu'elle renferme, il viendra

$$\begin{aligned}
&0{,}02743342 - z.0{,}027519 - y.0{,}0007573,\\
&0{,}04257218 - z.0{,}042696 - y.0{,}0018229,\\
&0{,}09524750 - z.0{,}095491 - y.0{,}0091185,\\
&0{,}09988557 - z.0{,}100158 - y.0{,}0100316,\\
&0{,}31103595 - z.0{,}311419 - y.0{,}0969824,\\
&0{,}47526725 - z.0{,}475505 - y.0{,}2261050,\\
&0{,}55588772 - z.0{,}555960 - y.0{,}3090915,\\
&0{,}56671600 - z.0{,}566716 - y.0{,}3211670,\\
&0{,}60342820 - z.0{,}603392 - y.0{,}3640819,\\
&0{,}61255124 - z.0{,}612441 - y.0{,}3750840,\\
&0{,}72360207 - z.0{,}723067 - y.0{,}5228259,\\
&0{,}74984858 - z.0{,}749092 - y.0{,}5611388,\\
&0{,}84594236 - z.0{,}844785 - y.0{,}7136617,\\
&0{,}84955048 - z.0{,}848295 - y.0{,}7196044.
\end{aligned}$$

Et additionnant tous ces produits, on aura, pour l'équation du *minimum* par rapport à y,

$$(2) \qquad 6{,}55896852 - z.6{,}556536 - y.4{,}2314731 = 0.$$

Combinant celle-ci avec la précédente (1), pour avoir les valeurs de y et z, on trouvera

$$y = 0{,}00549745, \quad z = 0{,}99682305.$$

Il est démontré au n° 34 de la *Mécanique céleste,* tome II, que l'aplatissement de la Terre est les $\frac{5}{2}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur, moins l'excès y de la longueur du pendule au pôle

sur sa longueur z à l'équateur, divisé par cette dernière longueur (*). Or, le rapport dont il s'agit étant $\frac{1}{289}$, il s'ensuit que l'aplatissement α cherché est, en prenant le demi petit axe de la Terre pour unité,

$$\alpha = 0,00865 - \frac{y}{z} = 0,003135 = \frac{1}{318,96}.$$

Concluons de là que, si l est la longueur du pendule à la latitude H et que $q = \frac{1}{289}$, on a généralement

$$(3) \qquad l = z\left[1 + \left(\tfrac{5}{2}q - \alpha\right)\sin^2 \mathrm{H}\right];$$

ou bien, désignant par λ la longueur du pendule à la latitude de 45°, on s'assure facilement, en faisant $2\omega = \frac{5}{2}q - \alpha$, que l'on a à très-peu près

$$(4) \qquad l = \lambda\,(1 - \omega\cos 2\mathrm{H}).$$

M. Mathieu, qui est parvenu au résultat numérique précédent (*Connaissance des Temps* de 1816), a fait en outre usage d'une méthode que Laplace a donnée (*Mécanique céleste,* tome II, pages 128 et suivantes), pour déterminer la figure elliptique dans laquelle le plus grand écart des pendules mesurés est moindre que dans toute autre figure de même espèce. Par la méthode des moindres carrés, on trouve, en mettant dans les quinze équations de condition ci-dessus, pour y et z leurs valeurs précédentes, ce système d'erreurs,

Équateur.	$x^{(1)}$	$= -\ 0^{\mathrm{m}}000098$,
Porto-Bello.	$x^{(2)}$	$= -\ 0{,}000063$,
Pondichéry	$x^{(3)}$	$= +\ 0{,}000031$,
Jamaïque	$x^{(4)}$	$= +\ 0{,}000076$,
Petit-Goave	$x^{(5)}$	$= -\ 0{,}000069$,
Cap de Bonne-Espérance. . . .	$x^{(6)}$	$= +\ 0{,}000174$,
Toulouse.	$x^{(7)}$	$= +\ 0{,}000047$,

(*) Voyez autrement la *Théorie analytique du Système du Monde,* par M. de Pontécoulant, tome II, page 428.

Vienne	$x^{(8)}$	$= -$ 0m000007,
Paris.	$x^{(9)}$	$= +$ 0,000046,
Gotha	$x^{(10)}$	$= -$ 0,000060,
Londres	$x^{(11)}$	$= -$ 0,000008,
Arengsberg	$x^{(12)}$	$= -$ 0,000043,
Pétersbourg	$x^{(13)}$	$= +$ 0,000053,
Laponie	$x^{(14)}$	$= -$ 0,000073,
Ponoi	$x^{(15)}$	$= -$ 0,000004.

Tous ces écarts entre la théorie et les mesures du pendule décimal sont, ainsi que le fait observer M. Mathieu, renfermés dans les limites des erreurs des observations. L'expression numérique la plus probable de la longueur du pendule à secondes centésimales sera alors

$$(e) \qquad 0{,}996823 + 0{,}00549745 \sin^2 H.$$

Si on multipliait cette expression par la longueur absolue du pendule à l'équateur, divisée par le premier terme 0,996823, on aurait sa longueur absolue dans tout autre lieu dont la latitude $= H$; mais les expériences que Borda a faites à l'Observatoire de Paris, et qui ont été confirmées par celles de plusieurs membres du Bureau des Longitudes, étant plus exactes qu'aucune de celles rapportées dans le tableau précédent, il convient de les employer de préférence. Si donc γ désigne la longueur du pendule à la latitude ψ, et l sa longueur à une autre latitude H, et que, pour abréger, l'on représente par $A + B \sin^2 H$ l'expression (e) précédente, on aura

$$\gamma = A + B \sin^2 \psi, \quad l = A + B \sin^2 H,$$

et par conséquent

$$l = \frac{A + B \sin^2 H}{A + B \sin^2 \psi} . \gamma.$$

Mais, suivant Borda, $\gamma = 0^m{,}741904$ à la latitude $\psi = 48^\circ 50' 14''$; ainsi, en passant aux nombres, la longueur absolue du pendule décimal dans un lieu quelconque, et réduite au niveau des mers, c'est-à-dire du pendule simple faisant 100000 oscillations dans un jour solaire

moyen, sera

$$l = 0^{m},7395925 + 0^{m},004078830 \sin^2 H,$$

ou bien

$$l = 0^{m},9907522 + 0^{m},0055148 \sin^2 H,$$

en prenant la seconde sexagésimale pour la mesure du temps (art. **411**); ou encore, en prenant pour unité la longueur du pendule à l'équateur,

$$l = 1 + 0,0055662 \sin^2 H.$$

Dans un très-beau Mémoire sur la figure de la Terre (*Connaissance des Temps* de 1821), Laplace montre comment on rend parfaitement comparables entre elles les longueurs observées du pendule, et fait connaître quelques faits géologiques très-remarquables.

416. M. Mathieu a discuté avec beaucoup de soin les expériences du pendule faites, au commencement de ce siècle, par les navigateurs espagnols, en différents points du globe; les conséquences qu'il tire, tant de celles-ci que des expériences précédentes, sont :

1°. Que l'aplatissement $\frac{1}{311,6}$ qu'il trouve pour l'hémisphère austral est très-voisin de celui qu'on attribue généralement à l'hémisphère boréal;

2°. Que si la différence assez petite qui existe entre les divers aplatissements, déduits des observations du pendule, semble indiquer une inégalité entre les deux hémisphères terrestres, du moins est-il vrai que ces deux hémisphères ne diffèrent pas sensiblement l'un de l'autre. Voici quelques résultats extraits du Mémoire de cet astronome distingué, et sur lesquels cette remarque est fondée.

NOMS des lieux.	LATITUDES.	HAUTEUR au-dessus du niveau de la mer.	LONGUEUR du pendule décimal mesurée.	LONG. DU PENDULE décimal au niveau de la mer	NOMS des observateurs.
			m.		
Formentera	38°39′56″	200m	0,74120612	0,7412527	Biot, Arago, Chaix.
Figeac.....	44.36.45	220	0,74157308	0,7416243	Biot, Mathieu.
Bordeaux...	44.50.25	0	0,74161515	0,7416151	Biot, Mathieu.
Clermont..	45.46.48	406	0,74162111	0,7417157	Biot, Mathieu.
Paris......	48.50.14	80	0,74191167	0,7419303	Biot, Bouvard, Mathieu.
Dunkerque.	51. 2. 8	0	0,74208649	0,7420865	Biot, Mathieu.

Lorsqu'on applique à ces dernières expériences la méthode des moindres carrés, on trouve que l'ellipse qui y satisfait le mieux a pour aplatissement $\frac{1}{298.2}$, ce qui s'écarte un peu du résultat précédent, et de l'aplatissement $\frac{1}{305}$ déduit de la théorie des inégalités de la Lune. Celui-ci paraît le plus probable de tous, parce qu'il est indépendant des irrégularités de la surface de la Terre, irrégularités, dit Laplace, qui disparaissent à la distance de la Lune, mais qui commencent à se faire sentir dans la mesure du pendule, et deviennent très-sensibles dans la mesure des degrés.

Quant à l'expression générale de la longueur absolue du pendule décimal, donnée par l'ensemble de ces expériences, elle est

$$0^{m},7397021343 + 0^{m},0039180769 \sin^2 H.$$

Les résultats que M. Mathieu a déduits des expériences faites dans les circonstances les plus propres à nous éclairer sur la véritable figure de la Terre, ou sur la variation de la pesanteur à sa surface, sont renfermés dans le tableau suivant :

HÉMISPHÈRE.	NOMBRE des expériences	APLATISSEMENT.	LONGUEUR ABSOLUE du pendule décimal.
Boréal.......	9	$\frac{1}{323,2}$	$0^{m}739574 + 0^{m}0041097 \sin^2 H$
Austral......	7	$\frac{1}{311,6}$	$0,739623 + 0,0040239 \sin^2 H$
Boréal-austral.	16	$\frac{1}{323,3}$	$0,739574 + 0,0041100 \sin^2 H$
Boréal.......	15	$\frac{1}{318,96}$	$0,739575 + 0,0040787 \sin^2 H$
Moyenne par toutes les expériences....			$0,739586 + 0,0040806 \sin^2 H$
Par les 24 de l'hémisphère boréal....			$0,739575 + 0,0040942 \sin^2 H$

Beaucoup d'autres observations de ce genre, recueillies depuis celles-ci par de savants voyageurs, ont été discutées avec un soin tout particulier par M. Baily, dans les *Transactions philosophiques* de 1832; et les expériences délicates et précises qu'il a faites pour en déduire le facteur relatif à la réduction au vide, selon que tel ou tel pendule a été mis en mouvement, sont de nature à inspirer la plus grande confiance

dans les résultats qu'il a obtenus. Il y a donc lieu de croire que l'aplatissement de la Terre, conclu de l'ensemble des mesures du pendule les plus récentes, est à très-peu près de $\frac{1}{288}$; or, en l'adoptant, comme quelques auteurs, quoiqu'il soit plus fort que celui qui résulte des mesures géodésiques et de la théorie des inégalités de la Lune, on a, d'après l'art. **415**,

$$\omega = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{289} - \frac{1}{288} = 0{,}002588,$$

et la formule (4) devient

$$(4') \qquad l = \lambda\,(1 - 0{,}002588 \cos 2\mathrm{H});$$

en sorte qu'en partant du résultat auquel on est parvenu à Paris (art. **413**), cette formule, en y faisant $l = 0^{\mathrm{m}},993855$ et $\mathrm{H} = 48°50'14''$, donne

$$\lambda = 0^{\mathrm{m}},993512.$$

Cela posé, si l'on nomme ϖ la pesanteur à la latitude de 45° et p la pesanteur sur un parallèle dont la latitude soit H, et qu'on ait égard à la relation $\varpi = \pi^2\lambda$ (art. **394**), on aura

$$\varpi = 9^{\mathrm{m}},80557,$$

et généralement

$$p = \varpi\,(1 - 0{,}002588 \cos 2\mathrm{H});$$

ainsi, à l'équateur, $p = 9^{\mathrm{m}},78019$, comme nous l'avons supposé précédemment.

Le pendule, dans l'état de repos, donne exactement la direction de la pesanteur; cependant il s'écarte un peu de la ligne verticale dans le voisinage des hautes montagnes, par l'effet de leur attraction, ainsi que Bouguer l'a observé près du Chimborazo. Ce célèbre géomètre a donné aussi le moyen d'évaluer l'angle de déviation, et de conclure par suite le rapport de la force attractive des montagnes à celle de la Terre entière (*Figure de la Terre*, p. 364); mais les observations les plus exactes de ce genre sont celles que Maskeline fit en Écosse, l'année 1774. Enfin Cavendich, en mesurant l'attraction exercée par deux globes de plomb, au moyen de la balance de *torsion* de Cou-

lomb, a évalué la densité moyenne de la Terre à cinq fois et demie celle de l'eau. (Consultez, sur ce sujet, le 17[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*)

La longueur du pendule à secondes qui oscille dans un même lieu, demeurant invariable, à moins que l'intensité de la pesanteur ne change dans la succession des temps, et cette longueur pouvant être facilement retrouvée, plusieurs savants avaient proposé de prendre pour unité fondamentale de notre nouveau système des poids et mesures la longueur du pendule simple, correspondante au 50[e] grade de latitude, et réduite au niveau des mers; néanmoins de puissantes raisons ont fait adopter le mètre. (*Voyez* le Discours préliminaire de la *Base du système métrique décimal.*)

CHAPITRE V.

DÉTERMINATION DES HAUTEURS PAR LES MESURES BAROMÉTRIQUES.

417. Tout le monde sait que la longueur de la colonne de mercure du baromètre dépend du poids de l'air, et qu'elle diminue à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère ; il existe donc une relation essentielle entre la hauteur du baromètre et celle parcourue dans le sens de la verticale. De toutes les formules données par plusieurs physiciens célèbres pour déterminer les différences de niveau par les seules observations barométriques et thermométriques, il n'en est aucune qui procure, dans ses applications, autant d'exactitude que celle de Laplace, parce que cet illustre géomètre a su l'établir pour tous les lieux de la Terre et toutes les hauteurs au-dessus de la mer.

Description du baromètre, et circonstances les plus favorables aux observations.

Les baromètres dont on se sert ordinairement en voyage sont ceux de Fortin et de Bunten. Le baromètre de Fortin est composé d'un tube de verre enfermé en grande partie dans un tube de cuivre servant à le protéger. L'extrémité inférieure du tube de verre communique au mercure contenu dans une cuvette dont le fond, qui est mobile à volonté, se meut à l'aide d'une vis, lorsqu'on veut amener la surface du mercure à un niveau fixe, marqué par le zéro de l'échelle. Ce niveau se trouve précisément à l'extrémité d'une petite pointe d'ivoire attachée à l'enveloppe de la cuvette et disposée verticalement.

Un petit thermomètre à mercure, d'une très-grande sensibilité, est enchâssé dans la monture du baromètre, et est destiné à faire connaître la température de la colonne barométrique. Un anneau *curseur* em-

brasse la monture et est muni d'un vernier, au moyen duquel on apprécie les dixièmes de millimètre ou des plus petites divisions de l'échelle tracées sur le tube. L'anneau dont il s'agit entraîne en outre deux petits plans de cuivre parallèles entre eux, et dont les arêtes inférieures sont exactement perpendiculaires à l'axe du tube.

Le baromètre se suspend à un pied à trois branches qui, étant réunies, lui servent d'étui. Lorsqu'il se trouve ainsi dans une situation verticale, on fait monter la surface du mercure contenu dans la cuvette jusqu'à ce qu'elle soit parfaitement en contact avec la pointe d'ivoire, et c'est ce qui a lieu quand cette pointe et son image réfléchie paraissent en juxtaposition.

Pour mesurer ensuite la hauteur de la colonne de mercure, on fait mouvoir le vernier jusqu'à ce que les arêtes des deux petits plans de mire dont nous avons parlé soient exactement tangentes à la convexité supérieure de cette colonne : alors le nombre marqué par l'index du vernier est la hauteur qu'on voulait connaître. Si l'on élevait le baromètre à $10^{m},46$ au-dessus de sa première position, la colonne de mercure diminuerait d'un millimètre à très-peu près; il est donc indispensable de faire usage d'un vernier qui donne les dixièmes de millimètre, et de prendre beaucoup de précaution pour rendre les erreurs de lecture aussi petites qu'il est possible.

Le thermomètre du baromètre ne faisant connaître exactement que la température du mercure, on mesure celle de l'air avec un thermomètre *libre* ou sans monture, dont les divisions sont tracées sur le tube même. On l'attache, à la hauteur de deux mètres environ, à un bâton fiché en terre, et incliné de manière que son ombre se projette sur le tube; par ce moyen, l'instrument est préservé de la chaleur directe des rayons du Soleil, et l'air circulant autour de lui l'amène bientôt à sa température.

Avant de remettre le baromètre dans son étui, on a soin de faire monter le mercure à peu de distance du sommet du tube, à l'aide de la vis du fond de la cuvette, afin d'éviter un trop grand choc de la part du mercure, qui, sans cela, se précipiterait avec rapidité dans cette partie vide, quand on renverserait le baromètre, et qui pourrait occasionner une rupture ou laisser introduire de l'air le long de la colonne.

Deluc avait adopté exclusivement les baromètres à tube recourbé ou à *siphon*. Dans ceux-ci, la hauteur du mercure est mesurée par la distance verticale du niveau inférieur au niveau supérieur de la colonne métallique. Quand l'échelle est fixe, le zéro est placé entre ces deux niveaux, et les divisions sont numérotées symétriquement et dans le même ordre de part et d'autre de ce point; d'où il suit évidemment que la hauteur de la colonne est égale à la somme des deux hauteurs partielles observées.

Le baromètre à siphon, modifié par M. Gay-Lussac, et dans lequel l'air extérieur ne s'introduit par la plus courte branche que par un trou extrêmement petit, jouit de plusieurs avantages dont les naturalistes peuvent tirer un grand parti dans leurs voyages; on en trouve la description dans la plupart des Traités de physique.

Il est essentiel de faire des observations correspondantes et simultanées de quart d'heure en quart d'heure, lorsqu'on veut déterminer avec toute l'exactitude que comportent les instruments, la différence de niveau de deux stations; mais, avant tout, il faut comparer les baromètres et les thermomètres dont on doit faire usage, et tenir note des petites différences qu'ils peuvent présenter, afin d'y avoir égard dans les calculs; car il pourrait arriver que le mercure, dans l'un de ces instruments, n'eût pas été parfaitement purifié par la distillation, et que par conséquent sa densité actuelle ne fût pas exactement celle qui répond à son état de pureté. Il existe sur la construction des baromètres à niveau constant et à niveau variable, et sur la manière de les observer, une instruction de M. Delcros insérée au procès-verbal de la séance de la Société géologique de France, tenue à Angers le 4 septembre 1841, et à laquelle nous croyons devoir renvoyer le lecteur (*).

Le savant naturaliste Ramond, qui a beaucoup contribué au perfectionnement de la méthode barométrique, par les nombreuses et utiles applications qu'il en a faites, indique le milieu du jour comme étant

---

(*) Le tome XIV des Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles renferme aussi sur ce sujet un excellent écrit qui a pour titre: *Comparaisons barométriques faites dans le nord de l'Europe*, par MM. Bravais et Martins (1840).

l'époque la plus favorable à l'observation, surtout si l'atmosphère est calme, et si le baromètre et le thermomètre, placés à l'ombre, à l'abri de toute cause accidentelle de chaleur, restent longtemps stationnaires.

On remarque toutefois dans les hauteurs du baromètre, observées constamment au même lieu, des irrégularités de deux espèces : les unes sont accidentelles et ne paraissent soumises à aucune loi fixe ; les autres sont périodiques et régulières. Ramond a remarqué qu'en France les oscillations du baromètre ont alternativement une durée de 5 heures et de 7 heures. Par exemple, le matin, le baromètre monte de 4 heures à 9 heures ; ensuite il descend jusque vers 4 heures du soir ; puis il remonte pendant 5 heures, après quoi il redescend jusque vers 4 heures du matin. « Cette marche, dit M. Biot (*Traité de » Physique*), est souvent dérangée dans nos climats d'Europe, où l'état » de l'atmosphère est si variable ; mais sous les tropiques, où les causes » qui agissent sur l'atmosphère sont plus constantes, la période l'est » aussi, et à un tel degré que, suivant M. de Humboldt, l'on par» viendrait presque à prédire l'heure à chaque instant du jour et de » la nuit, d'après la seule observation de la hauteur du baromètre ; » et ce qui est extrêmement remarquable, comme l'a également con» staté le même voyageur, c'est qu'aucune circonstance atmosphérique, » ni la pluie, ni le beau temps, ni le vent, ni les tempêtes, n'altèrent » la parfaite régularité de cette oscillation, qui se maintient la même » en tout temps et dans toutes les saisons. »

Après ces notions sur l'emploi des instruments, démontrons la formule barométrique de l'auteur de la *Mécanique céleste*.

Démonstration de la formule barométrique de Laplace.

418. L'atmosphère peut être considérée comme composée de couches d'air infiniment minces qui décroissent de bas en haut par des nuances insensibles. Afin de découvrir plus aisément la loi de ce décroissement, nous supposerons la densité de l'air constante dans toute l'épaisseur d'une même couche.

Concevons une colonne verticale d'air à la température de la glace fondante, et une molécule d'une densité $= D$, située à une distance $a + z$ du centre de la Terre, a étant la distance du même centre à la

station inférieure de l'observateur; nommons g la pesanteur et p la pression de l'atmosphère dans le lieu de la molécule, exercée sur l'unité de surface : on aura, pour la condition de l'équilibre dans le baromètre, et à cause que p diminue quand z augmente,

$$dp = -gDdz.$$

En effet, le poids d'une substance est égal à sa masse multipliée par la gravité, et la masse est égale à la densité multipliée par le volume.

La pression p varie proportionnellement à la densité D de la molécule, multipliée par sa chaleur que nous désignerons par l, l exprimant, dans l'hypothèse actuelle, la température de la glace; ainsi l'on a

$$p = kDl,$$

k étant un coefficient constant donné par l'expérience.

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{dp}{p} = -g\frac{dz}{kl};$$

et intégrant, on a

$$\int g\frac{dz}{l} = -k\int\frac{dp}{p} + Q = -k\log p + Q.$$

La constante Q se détermine en faisant $z = 0$; et comme, à cette origine, la pression de l'atmosphère est p', il s'ensuit que

$$Q = k\log p';$$

partant,

$$(1)\qquad \int g\frac{dz}{l} = k(\log p' - \log p) = k\log\frac{p'}{p}.$$

L'intensité de la pesanteur étant réciproque au carré des distances, si l'on désigne par g' la pesanteur à la station inférieure, on aura, à fort peu près,

$$g = g'\frac{a^2}{(a+z)^2} = g'\left(1 - \frac{2z}{a}\right);$$

et si l'on fait $z' = z\left(1 - \frac{z}{a}\right)$, d'où $dz' = dz\left(1 - \frac{2z}{a}\right)$, le premier membre de l'équation (1) deviendra, en y substituant d'ailleurs pour g sa valeur précédente,

$$\int g\,\frac{dz}{l} = \frac{g'}{l}\int dz' = \frac{g'}{l}\,z'.$$

De là, et prenant le logarithme tabulaire ou de Briggs,

$$(2) \qquad z' = \frac{kl}{g'\mu}\log\frac{p'}{p};$$

$\mu = 0{,}4342945$ étant le module.

On voit, par cette formule, que $\frac{kl}{g'\mu}$ est un coefficient constant répondant à la température de la glace fondante. On peut lui donner une forme dépendante du rapport entre les densités de l'air et du mercure qui ont lieu à l'origine des z, où la pesanteur est g' et la densité de l'air $= \mathrm{D}'$. En effet, on a, par ce qui précède,

$$p' = k\mathrm{D}'l.$$

D'un autre côté, si à ce point Δ' exprime la densité du mercure au même degré de température et lorsque la hauteur du baromètre est $h^{(0)}$, l'équilibre entre la pression de l'air et le poids du mercure, rapporté à l'unité de surface, est

$$p' = g'\Delta' h^{(0)};$$

ainsi $l = \frac{g'\Delta' h^{(0)}}{k\mathrm{D}'}$, et la formule (2) devient, en y mettant d'ailleurs pour z' sa valeur $z\left(1 - \frac{z}{a}\right)$,

$$(a) \qquad z = \frac{h^{(0)}}{\mu}\cdot\frac{\Delta'}{\mathrm{D}'}\log\frac{p'}{p}\left(1 + \frac{z}{a}\right) = \mathrm{C}\log\frac{p'}{p}\cdot\left(1 + \frac{z}{a}\right).$$

La colonne d'air, comprise entre les deux baromètres censés être situés dans la même verticale, vient d'être supposée à la température de la glace; mais, quelle que soit la loi du décroissement de la chaleur

dans l'atmosphere, il suffira, pour tenir compte du changement de température, de la considérer comme constante et égale à la température moyenne entre les deux extrêmes. Cela posé, puisque le volume d'une masse d'air déterminée s'accroît environ de $\frac{1}{250}$ par chaque degré du thermomètre centigrade (du moins en ayant égard en partie à son état hygrométrique), la valeur ci-dessus de z, pour convenir à la température moyenne $\frac{t+t'}{2}$, t et t' étant les températures de l'air aux stations supérieure et inférieure indiquées par les thermomètres libres, devra être multipliée par le facteur $1+\frac{1}{250}\cdot\frac{t+t'}{2}=1+\frac{2(t+t')}{1000}$. En effet, z augmente dans le même rapport que la densité de l'air diminue; et comme, à masses égales, le rapport des densités est inverse de celui des volumes, on a $D'=D''\left(1+\frac{1}{250}\frac{t+t'}{2}\right)$, D'' étant la densité de l'air à la température moyenne dont il s'agit; donc

$$(b) \qquad z=C\left[1+\frac{2(t+t')}{1000}\right]\log\frac{p'}{p}\cdot\left(1+\frac{z}{a}\right).$$

A la même température et sous la même force accélératrice de la pesanteur, les pressions p, p' sont proportionnelles aux hauteurs correspondantes h, h' des baromètres. On devrait donc écrire $\log\frac{h'}{h}$ à la place de $\log\frac{p'}{p}$; mais il faut avoir égard à la condensation du mercure qui a dû s'opérer dans la station la plus froide, et où la colonne de ce fluide métallique a dû paraître un peu plus courte que si on l'avait observée dans une station inférieure sous la même pression; il faut en outre faire entrer en considération la variation de la pesanteur dans le sens de la verticale. D'abord on sait que le mercure se condense de $\frac{1}{5550}$ par chaque degré du thermomètre centigrade; ainsi sa densité δ', correspondante à la température T' observée à la station la plus basse, devient $\delta'\left(1+\frac{T'-T}{5550}\right)$ à la température T observée à la station la plus haute; on a donc

$$p'=\delta' g' h', \quad \text{et} \quad p=\delta' g h\left(1+\frac{T'-T}{5550}\right)=\delta' g H.$$

On remarquera ensuite qu'à cause de $\frac{g'}{g} = \frac{(a+z)^2}{a^2} = \left(1+\frac{z}{a}\right)^2$, on a

$$\frac{p'}{p} = \frac{g'h'}{g\mathrm{H}} = \frac{h'}{\mathrm{H}}\left(1+\frac{z}{a}\right)^2,$$

et

$$\log\frac{p'}{p} = \log\frac{h'}{\mathrm{H}} + 2\log\left(1+\frac{z}{a}\right);$$

mais $\log\left(1+\frac{z}{a}\right)' = \mu\left(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \ldots\right)$; et puisque $\frac{z}{a}$ est une très-petite fraction, on a à fort peu près, pour son logarithme tabulaire,

$$\log\left(1+\frac{z}{a}\right) = \frac{\mu z}{a} = \frac{z}{a}\cdot 0{,}4342945;$$

par conséquent

$$\log\frac{p'}{p} = \log\frac{h'}{\mathrm{H}} + \frac{z}{a}\cdot 0{,}868589,$$

et la formule (b) devient

$$(c)\qquad z = \mathrm{C}\left[1+\frac{2(t+t')}{1000}\right]\left[\left(1+\frac{z}{a}\right)\log\frac{h'}{\mathrm{H}} + \frac{z}{a}\cdot 0{,}868589\right].$$

Il reste à connaître le changement à faire au coefficient $\mathrm{C} = \frac{h^{(0)}}{\mu}\cdot\frac{\Delta'}{\mathrm{D}'}$, supposé déterminé pour un lieu dont la hauteur au-dessus de la mer est r. On remarquera d'abord que, comme il est réciproque à la densité de l'air ou à la pesanteur, on a, en désignant par (C) ce qu'il devient au niveau de la mer, et par (g) la gravité à ce niveau,

$$\frac{g'}{(g)} = \frac{(\mathrm{C})}{\mathrm{C}} = \frac{a^2}{(a+r)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{a}\right)^2};$$

d'où, à très-peu près,

$$\mathrm{C} = (\mathrm{C})\left(1+\frac{2r}{a}\right).$$

Mais le coefficient (C) étant donné dans un lieu dont la latitude est ψ, il doit encore varier sous une autre latitude. Or la pesanteur dimi-

nuant à mesure que l'on s'approche de l'équateur, et cette diminution étant indiquée par le raccourcissement du pendule à secondes, il est clair que la correction actuelle dépend de l'effet de cette cause. De plus, comme les longueurs du pendule à secondes sont proportionnelles aux pesanteurs, on a

$$\frac{(g)}{g''} = \frac{(\lambda)}{\lambda''},$$

(λ) et λ'' étant les longueurs que doit avoir ce pendule au point de la Terre où les pesanteurs sont respectivement (g) et g''. Mais en général

$$(\lambda) = 1 + 0{,}005176 \sin^2\psi,$$

en prenant l'aplatissement de la Terre $\frac{1}{288}$ qui résulte des mesures du pendule (art. **416**); donc, si l'on veut ramener le coefficient à la latitude de $45°$, et que g'' y exprime l'intensité de la pesanteur, on aura

$$\frac{\lambda''}{(\lambda)} = \frac{1 + 0{,}002588}{1 + 0{,}005176 \sin^2\psi} = \frac{1}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi};$$

et de là

$$(g) = g''\,(1 - 0{,}002588 \cos 2\psi) = g''\,(1 - \beta \cos 2\psi).$$

Soit maintenant C″ ce que devient sous le parallèle du 50e grade, et au niveau des mers, le coefficient (C); on aura évidemment

$$\frac{C''}{(C)} = \frac{(g)}{g''} = 1 - \beta \cos 2\psi, \quad \text{ou} \quad (C) = C''(1 + \beta \cos 2\psi),$$

par suite

$$(d) \qquad C = C''\,(1 + \beta \cos 2\psi)\left(1 + \frac{2r}{a}\right) = \frac{h^{(0)}}{\mu} \cdot \frac{\Delta'}{D'};$$

enfin

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} z = C''\,(1 + \beta \cos 2\psi)\left(1 + \frac{2r}{a}\right)\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right] \\ \times \left[\left(1 + \frac{z}{a}\right)\log\frac{h'}{H} + \frac{z}{a}\,0{,}868589\right]. \end{aligned} \right.$$

Deux méthodes conduisent à la valeur numérique du coefficient C″. La première consiste à niveler la hauteur comprise entre les deux sta-

tions, ou à la déterminer trigonométriquement par l'un des procédés exposés au chapitre XX du livre troisième, et à prendre pour inconnue dans l'équation (e) ce même coefficient. Cette méthode a été employée avec beaucoup de succès par Ramond, et il résulte d'un grand nombre d'observations barométriques de ce savant naturaliste, faites dans les temps les plus favorables et sur plusieurs montagnes des Pyrénées dont les hauteurs lui étaient bien connues, que $C'' = 18336^{m}$. La seconde méthode, qui est plus directe, consiste à déduire ce dernier coefficient du rapport même des densités du mercure et de l'air; or, suivant un résultat d'expériences très-précises faites à Paris, par MM. Biot et Arago, le rapport $\frac{\Delta'}{D'} = 10462,0$, l'air parfaitement sec étant à zéro de température, et la pression de l'atmosphère étant équivalente à $0^{m},76$ (*Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut*, premier semestre de 1806, page 385). On a d'ailleurs

$$h^{(0)} = 0^{m},76, \quad \psi = 48^{\circ}50'14'', \quad r = 60^{m}, \quad a = 6366198^{m};$$

ainsi la substitution de ces valeurs dans la relation (d) donne

$$C'' = \frac{0^{m},76 \times 10462\,(1 - \beta \cos 2\psi)\left(1 - \frac{120}{a}\right)}{0,4342945} = 18314^{m}.$$

Mais, en supposant l'air saturé d'humidité, ce coefficient est un peu plus fort, et la moyenne de ces deux valeurs est 18337,46, c'est-à-dire telle qu'elle confirme le coefficient de Ramond, que l'on doit par conséquent regarder comme définitif et comme correspondant à l'état moyen hygrométrique de l'air.

Enfin l'on pourra supposer, sans erreur sensible, $r = 0$, $a = 6366198^{m}$, et employer pour valeur de z, dans le second membre de la formule (e), celle que l'on obtient en faisant $z = 0$ dans ce même membre. D'après toutes ces considérations, l'on aura, pour la différence de niveau des deux stations,

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} & z = 18336^{m}\,(1 + 0,002588 \cos 2\psi).\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right] \\ & \times \left[\log \frac{h'}{H} + z\left(\frac{\log \frac{h'}{H} + 0,868589}{6366198}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Telle est la formule que Laplace a publiée dans le livre X de la *Mécanique céleste*. Quoique l'hypothèse que nous avons faite d'une température constante entre les deux stations ne soit pas rigoureusement exacte, l'on ne doit former aucun doute sur la précision dont il est possible d'approcher, lorsque les éléments variables de cette formule sont recueillis au milieu d'un air tranquille, et avec tous les soins qu'exige ce genre d'observations. Il est cependant une dernière remarque importante à faire, et qui a échappé à cet illustre géomètre, c'est qu'il faut avoir égard à l'action de la couche de la Terre dont z est la hauteur. Or, en supposant la densité de cette couche moitié de la densité moyenne de la Terre, Poisson a démontré que

$$\frac{g}{g'} = \frac{a^2}{(a+z)^2} + \frac{3z}{4a} = \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{3}{4}u;$$

ou, à cause de la petitesse de la fraction $u = \frac{z}{a}$, on a simplement

$$\frac{g}{g'} = 1 + \frac{5}{8}u;$$

on doit donc, dans la formule (f) et dans les précédentes, remplacer u par $\frac{5}{8}u$, à moins qu'on ne soit très-près de la mer et à une station qui domine une plaine très-peu élevée au-dessus des eaux.

Pour en rendre l'application un peu plus simple, on fait ordinairement, dans notre climat, abstraction de la variation de la pesanteur en latitude et dans le sens de la verticale; mais, afin de nuire le moins possible à l'exactitude du résultat, on emploie, au lieu du coefficient constant 18336^{m}, le coefficient 18393^{m}, ainsi que Ramond l'a fait lui-même : de cette manière, on a simplement

$$z = 18393^{\text{m}}\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right].\log\left[\frac{h'}{h + h\left(\frac{T'-T}{5550}\right)}\right];$$

t étant la température de l'air dans la station supérieure;
t' la température de l'air dans la station inférieure; } Thermomètres libres.

T la température du mercure du baromètre dans la station supérieure; T' la température du mercure du baromètre dans la station inférieure;	Thermometres des baromètres.

h la hauteur du baromètre dans la station supérieure; h' la hauteur du baromètre dans la station inférieure.

On possède plusieurs Tables qui facilitent singulièrement l'évaluation des termes de la formule rigoureuse que nous venons de démontrer : telles sont celles de MM. Biot, Lindenau, et Oltmanns. Ces dernières sont extrêmement simples et commodes; on en peut voir l'usage dans l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes. A défaut de ces Tables, on procédera ainsi qu'il suit.

TYPE DU CALCUL.

419. Parmi les nombreuses observations barométriques de M. de Humboldt, nous choisirons celles qui lui firent connaître, en juin 1802, la hauteur du Chimborazo, au-dessus de la mer Pacifique, ou plutôt celle à laquelle il put s'élever sur cette montagne.

LIEUX DES STATIONS.	HAUTEUR du baromètre.	THERMOMÈTRE du baromètre.	THERMOMÈTRE libre.	LATITUDE.
Au Chimbarazo..........	167,2^{lig}	+ 10^{g}0	— 1^{g}6	1°45'
Au niveau de la mer du Sud.	337,7	+ 25,3	+ 25,3	

De là $T = +10^g,0$ $\qquad t = -1^g,6$

$T' = +25,3$ $\qquad t' = 25,3$

Différence $T' - T = 15,3$ $\qquad$ Somme $t + t' = 23,7$

$2(t+t') = 47,4$

Baromètre inférieur $h' = 337^l7$, log 2,5285311

Baromètre supérieur $h = 167,2$, log 2,2232363

$5550 + (T' - T) = 5565,3$, log 3,7454886

Compl. log 5550 (log. constant). . . . 6,2557070

2,2244319 . . . 2,2244319

Différence des logarithmes. . . 0,3040992

Correction pour la température de l'air.

Différence des logarithmes 0,3040992, log 9,4830152

$\frac{1000+2(t+t')}{1000} = \frac{1047,4}{1000} = 1,0474$, log 0,0201126

coefficient 18336 (log. constant) 4,2633046

Somme des logarithmes. . . 3,7664324 . . 5840^{m},2

Correction pour la latitude.

Somme des logarithmes. 3,76643
log. cos 3°30′ = 2 fois latitude 9,99919
log. du nombre constant 0,002538 7,41296

1,17858 . . . + 15^{m},1

Hauteur approchée . . . 5855^{m},3

Correction pour la diminution de la pesanteur dans le sens de la verticale.

Hauteur approchée . . . . log 3,76755
Différence des logarithmes . . 0,304099
Nombre constant. 0,868589

1,172688 log 0,06918
Compl. log 6366198 (log. constant) 3,19612
Hauteur approchée, log 3,76755

0,80040

log $\frac{5}{8}$ = 9,79588

0,59628

log. de la différence des logarith. à soustraire 9,48303

1,11325 . . . + 13^{m},0

Hauteur approchée. . . . . 5855 ,3

Hauteur absolue de la station au Chimborazo 5868, 3

Quant à l'altitude du sommet inaccessible de cette plus haute sommité des Andes, elle est de 6530 mètres.

Nota. Les voyageurs qui font des excursions scientifiques en pays de montagnes, et qui déterminent un grand nombre de différences de niveau de leurs stations à l'aide du baromètre, pourraient observer en même temps les distances zénithales de plusieurs d'entre elles et obtenir ensuite une évaluation approximative des distances qui les unissent, en tirant de la formule (8) (art. **221**) la valeur de K qui serait alors la seule inconnue : de cette manière ils formeraient facilement un canevas assez fidèle de leur reconnaissance. Cette méthode leur réussirait évidemment si la différence de hauteur mesurée n'était pas très-petite comparativement à la distance horizontale à calculer (*).

Dernières remarques sur les mesures barométriques.

420. Dans un Mémoire très-intéressant sur les mesures barométriques, Prony a donné une formule qui dispense de l'usage des logarithmes, et de laquelle il déduit cette conséquence digne d'attention : « qu'un baromètre ou deux baromètres comparables peuvent indi- » quer des hauteurs de colonnes de mercure très-fautives, qui péche- » raient, par exemple, de deux ou trois millimètres par excès ou par » défaut, sans cesser pour cela d'être propres à la mesure des diffé- » rences de niveau qui n'excèdent pas 1000 mètres, si l'on fait des ob- » servations contemporaines aux stations supérieure et inférieure ; et » les comparaisons des mesures barométriques avec les mesures effec- » tives fournissent les corrections à faire aux formules, tout aussi bien » que si les baromètres n'offraient aucune anomalie, principalement » lorsque les vices des baromètres ne tiennent pas au défaut de vide » dans les tubes. » (*Connaissance des Temps* de 1816, page 312.)

Les corrections dont parle Prony sont relatives au coefficient baro-

---

(*) Les ingénieurs militaires qui lèvent les environs d'une place forte mise en état de siége estiment quelquefois, au moyen de la vitesse du son, évaluée à $340^{m},89$ par seconde, la distance à laquelle ils se trouvent de la batterie qui fait feu, en multipliant cette vitesse par le nombre de secondes écoulées depuis l'instant de l'apparition de l'inflammation de la poudre jusqu'à celui où ils perçoivent le bruit de l'explosion. (*Voyez*, sur la théorie de la vitesse du son, la *Mécanique* de Poisson, tome I, page 714.)

métrique 18336, qui, selon l'opinion de quelques observateurs, devrait être modifié quand on applique la formule aux petites hauteurs. Il est certain néanmoins que cette formule et son coefficient procurent, dans ce cas même, des différences de niveau à peu près aussi exactes que celles qui se déduisent d'opérations trigonométriques, lorsque, pendant l'absence du Soleil et par un temps calme, on opère avec de bons baromètres placés sur des points isolés et élevés au-dessus des plaines, et qu'aucune cause ne trouble la régularité du décroissement de la densité des couches d'air.

Pour rendre les observations barométriques comparables, il est nécessaire d'avoir égard à la dépression du mercure dans les tubes étroits, dépression qui résulte d'une cause physique que nous ne pouvons expliquer ici. Nous nous bornerons à dire qu'elle est due à l'action réciproque de l'eau et du mercure; car, quelque soin que l'on mette pour dessécher l'intérieur d'un tube par l'ébullition du mercure qu'il renferme, il reste presque toujours assez de parties aqueuses le long des parois du verre pour que l'action de cette substance soit insensible sur le mercure.

On doit à Laplace une formule pour corriger de l'effet capillaire les hauteurs du baromètre. Il résulte de sa savante théorie que cet effet devient d'autant plus sensible dans les baromètres à cuvette, que le tube de ces baromètres est plus étroit, et que par conséquent la hauteur barométrique, qui doit être comptée depuis le niveau inférieur jusqu'au sommet du ménisque ou de la convexité terminale, est toujours moindre que la hauteur qui aurait lieu si le tube perdait sa propriété capillaire. Dans la première édition de cet ouvrage, j'avais donné une table des dépressions du mercure, dressée d'après les expériences de Cavendish; mais voici une autre table de ce genre, très-exacte, que M. le professeur Schleyermacher, de Darmstadt, a calculée d'après la théorie de Laplace, et dont les arguments sont, pour le baromètre à siphon, le rayon de chaque branche du tube et la flèche du ménisque qui y est formé, et pour le baromètre à cuvette, le rayon du tube et la flèche de son ménisque, puis le rayon du ménisque annulaire et sa flèche, en supposant d'ailleurs que la pointe d'ivoire affleure le sommet du ménisque de la cuvette. (*Astronomie physique* de M. Biot, 3e édition, tome I, page 193.)

Arguments. — *Rayon du tube et flèche du ménisque en millimètres.*

HAUTEUR du ménisque en millim.	RAYON DU TUBE EN MILLIMÈTRES.					
	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0,1	4,975	1,262	0,299	0,121	0,060	0,034
0,2	8,912	2,450	0,595	0,242	0,120	0,069
0,4	11,560	4,377	1,152	0,476	0,240	0,138
0,6	12,616	5,581	1,643	0,695	0,354	0,205
0,8	......	6,098	2,037	0,893	0,460	0,247
1,0	......	6,171	2,338	1,066	0,546	0,299
1,2	......	.....	2,541	1,206	0,630	0,308
1,4	......	.....	2,658	1,316	0,702	0,390
1,6	......	.....	2,699	1,397	0,758	0,428
1,8	......	.....	2,681	1,449	0,805	0,468

Les nombres de cette table étant désignés par δ ou δ', selon qu'ils se rapporteront au sommet ou au bas de la colonne de mercure comprise entre les sommets des ménisques supérieur et inférieur, on aura

Relativement au baromètre à siphon,		Relativement au baromètre à cuvette,	
Hauteur de la col. obs. =	h	Hauteur de la col. obs. =	h
Dépression supérieure.. =	$+\delta$	Dépression supérieure. =	$+\delta$
Dépression inférieure.. =	$-\delta'$	Dépression inférieure.. =	$-\frac{1}{2}\delta'$
Hauteur corrigée...... =	$h+\delta-\delta'$	Hauteur corrigée..... =	$h+\delta-\frac{1}{2}\delta'$.

En faisant des observations pendant longtemps dans un même lieu, on y obtient la hauteur moyenne du baromètre et la température moyenne de l'atmosphère, deux éléments propres à faire connaître approximativement la hauteur absolue de ce lieu, en partant de ce résultat de M. Bouvard, qu'au niveau de l'Océan et à la latitude de 48° 50′, la hauteur moyenne du baromètre, réduite à la température de la glace fondante, est de 761^{mm},410, et que la température moyenne de l'air y est de + 11° centigrades. C'est ainsi qu'on opère, à défaut de mesures trigonométriques, pour déterminer la hauteur d'une base

mesurée au-dessus de la mer, et qu'on veut réduire à ce niveau (art. **144**). Il faut cependant remarquer que ces deux données numériques ne sont pas les mêmes à toutes les latitudes, comme le fait voir le tableau dressé par M. Schouw, professeur à Copenhague, et que M. Biot a publié page 170 de son *Astronomie physique* citée plus haut, en indiquant les corrections qu'il faudrait appliquer aux mesures barométriques recueillies en divers lieux pour les rendre parfaitement comparables et pouvoir les considérer comme simultanées.

Application du baromètre et du thermomètre aux mesures trigonométriques des grandes hauteurs.

421. Les formules relatives aux différences de niveau des points trigonométriques de premier ordre, données par des distances zénithales très-peu différentes de l'angle droit, ayant été démontrées au chapitre XIX du livre III, nous allons considérer maintenant le cas où les hauteurs angulaires sont un peu grandes, comme lorsqu'il s'agit de mesurer la hauteur d'une montagne très-élevée au-dessus de la station de laquelle on observe son sommet. Laplace a encore donné pour ce cas, fort rare à la vérité, une méthode déduite de sa théorie des réfractions, et appuyée sur ce fait digne de remarque qu'à des hauteurs apparentes de plusieurs degrés la valeur de la réfraction terrestre, comme celle de la réfraction astronomique, est indépendante de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère. Par exemple, si, en ne négligeant rien dans la première valeur de dv (art. **254**), on la développe en série jusqu'aux termes en s^2 inclusivement, qu'on fasse attention que $\frac{irs}{l} = 1 - \frac{\rho}{(\rho)}$, et qu'on intègre depuis $s = 0$, on trouvera, sans la moindre difficulté, et comme à la p. 280 du tome IV de la *Mécanique céleste*,

$$v = s\,\mathrm{tang}\,Z\left[1 - \tfrac{1}{2}s\,\mathrm{tang}^2 Z + \frac{s^2(3\sin^2 Z + 1)}{6\cos^2 Z}\mathrm{tang}^2 Z\right] + \alpha\frac{\mathrm{tang}\,Z}{\cos^2 Z}\left[s - \frac{\int \rho ds}{(\rho)}\right].$$

Soit rs' la hauteur calculée par la formule (8) (art. **221**), mais sans avoir égard à la réfraction, et désignons par $r\delta s$ la correction due à ce phénomène; on aura $s = s' - \delta s$, valeur qu'il est permis de substituer dans celle de v, puisque la réfraction n'altère pas cet angle. Or,

en négligeant les très-petits termes $s\delta s$ et $\alpha\delta s$, on obtiendra

$$0 = -\delta s \tang Z + \alpha \frac{\tang Z}{\cos^2 Z}\left[s' - \frac{\int \rho ds}{(\rho)}\right],$$

et de là on tire pour la correction de réfraction

$$r\delta s = \frac{\alpha}{\cos^2 Z}\left[rs' - \frac{r\int \rho ds}{(\rho)}\right].$$

Il est à remarquer qu'en désignant par g la gravité, $rg.\int \rho ds$ est la pression de l'atmosphère à la station de l'observateur, moins sa pression à l'objet observé, différence qui correspond à celle ε des hauteurs des baromètres à ces deux points, le mercure y étant réduit à zéro de température; ainsi on a

$$rg.\int \rho ds = \varepsilon.$$

D'un autre côté, il a été démontré (art. **248**) que la densité (ρ) correspondante à la pression (p) a pour expression

$$(\rho) = \frac{(p)}{gl};$$

partant

$$\alpha.\frac{r.\int \rho ds}{(\rho)} = \frac{\alpha\varepsilon}{g(\rho)} = \frac{\alpha\varepsilon l}{(p)} = \frac{\alpha\varepsilon l}{0^m,76},$$

en prenant la densité (ρ) à zéro de température et à $0^m,76$ de hauteur barométrique. Cette dernière valeur a cela de particulier, qu'elle reste toujours la même tant que ε ne change pas, quelle que soit d'ailleurs la densité réelle; et en effet α et (p) varient ensemble dans le même rapport. Mettant donc pour α et l leurs valeurs respectives 0,000293876 et 7974 (art. **248**), on a

$$-\alpha.\frac{r.\int \rho ds}{(\rho)} = -3{,}08338.\varepsilon;$$

ainsi la hauteur vraie cherchée $= rs' - r\delta s$, ou, pour abréger, $= z - \Delta z$; expression dans laquelle

$$\text{(A)} \quad \Delta z = \left[\frac{0{,}000293876 \times \frac{h'_0}{0^m,76}}{1 + 0{,}00375\,t'}.z - 3{,}08338\,(h'_0 - h_0)\right].\frac{1}{\cos^2 Z},$$

h_0 et h'_0 étant les hauteurs des baromètres aux stations supérieure et inférieure, le mercure y étant réduit à zéro de température. Si donc $\pm t$, $\pm t'$ sont les températures du mercure aux mêmes stations, et que h, h' soient les hauteurs observées des baromètres, on aura

$$h_0 = \frac{h}{1 \pm \frac{1}{5550}t}, \quad h'_0 = \frac{h'}{1 \pm \frac{1}{5550}t'},$$

en prenant, bien entendu, le signe supérieur lorsque la température est au-dessus de zéro, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Le plus souvent il sera impossible de se procurer h; alors on négligera le second terme de la correction (A), qui est d'ailleurs fort petit, et l'on se bornera à recueillir la hauteur du baromètre et celle du thermomètre à la station inférieure, en même temps que la distance zénithale apparente du sommet de la montagne. Mais remarquons que la cime du mont Blanc, observée lors de la triangulation primordiale de la France, n'ayant été vue au-dessus de l'horizon des mont Granier et mont Colombier (*Pl. III*) que sous un angle moindre que 2 degrés, la correction (A), qui dérive d'une tout autre condition, laisserait une incertitude de plus de 8 mètres sur l'altitude de cette plus haute sommité des Alpes, trouvée exactement de 4810^m (page 230 du tome II de la *Nouvelle Description géométrique de la France*). Voilà, ce nous semble, ce qu'il y avait à dire de plus intéressant sur l'hypsométrie appliquée dans un pays de hautes montagnes.

APPENDICE

SUR LE MODE DE PROJECTION EMPLOYÉ DANS LA FORMATION DU CANEVAS TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE GRANDE CARTE.

422. Le but des opérations géodésiques étant de faire connaître en général les latitudes et les longitudes de tous les points qui ont été relevés trigonométriquement et astronomiquement, il importe d'en établir sur la carte, et conformément aux valeurs de ces deux coordonnées, les positions relatives (art. **108**), ensuite de lier par des droites les sommets des triangles. Or le mode de projection adopté maintenant parmi les ingénieurs-géographes français est celui d'après lequel a été dressé le canevas général de la nouvelle carte de France. Voici, en peu de mots, le principe qui lui sert de base.

L'échelle d'une carte étant adoptée, le méridien principal, tel que celui de l'Observatoire de Paris (*Pl. III*), se développe en ligne droite, comme dans le système de projection employé par Cassini; mais, au lieu d'y représenter également par des lignes droites les arcs de plus courte distance perpendiculaires à ce méridien (art. **164**), on y trace des cercles concentriques, dont les longueurs des degrés représentant ceux de longitude, soient les mêmes que sur le globe terrestre supposé réduit à l'échelle dont il s'agit, et dont leur centre commun soit pris sur le premier méridien; l'un de ces cercles devant être décrit d'un rayon égal (dans le cas de la sphéricité de la Terre) à la cotangente de la latitude du milieu de la carte, ou de 45 degrés relativement à la France.

Il résulte de là que les parties du méridien principal et celles des parallèles à l'équateur conservent exactement sur la carte les rapports de grandeur qu'elles ont entre elles sur le sphéroïde, et que les aires des espaces quelconques y sont aussi proportionnelles à celles des espaces correspondants sur le globe; deux propriétés caractéristiques

et remarquables de cette projection, qui permettent de résoudre très-simplement les problèmes de géographie les plus usuels. Ces propriétés se démontrent facilement ainsi qu'il suit, en supposant toujours la Terre un ellipsoïde de révolution.

423. Supposons d'abord qu'une courbe quelconque, tracée sur le plan de projection, soit rapportée à des coordonnées polaires, et désignons en conséquence par R le rayon vecteur d'un de ses points M, par ϖ l'arc qui mesure l'angle que ce rayon fait avec le méridien principal, tel que celui de Paris, développé en ligne droite. Supposons de plus un autre système de coordonnées rectangles x, y, ayant même origine que R, et prenons ce même méridien pour l'axe des abscisses; enfin représentons par ds l'élément de cette même courbe : on aura, comme l'on sait,

$$x = \text{R}\cos\varpi, \qquad y = \text{R}\sin\varpi,$$

$$(1) \qquad ds^2 = d\text{R}^2 + \text{R}^2 d\varpi^2.$$

Soient en outre ds_1 l'élément d'un parallèle sur le sphéroïde de révolution, ρ son rayon de courbure, et dp son amplitude mesurée par un arc de cercle dont le rayon est l'unité; on aura

$$ds_1 = \rho dp.$$

Or, les projections des parallèles étant des cercles concentriques, et les mesures prises sur ces courbes étant les mêmes que sur le globe terrestre, on exprimera analytiquement cette propriété en faisant $d\text{R} = 0$ et $ds = ds_1$; partant l'équation différentielle (1) donne

$$\rho dp = \text{R}d\varpi;$$

puis, intégrant, il vient

$$(2) \qquad \rho p = \text{R}\varpi,$$

sans constante, puisque la longitude p comptée du méridien principal est nulle en même temps que l'angle ϖ.

Lorsque ρ correspond à la latitude H, et que a, b expriment les demi-

axes de l'ellipse génératrice du sphéroïde terrestre, on a (art. **170**)

$$\rho = \frac{a\cos H}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 H\right)^{\frac{1}{2}}} = N\cos H;$$

par conséquent l'on tire, de l'équation (2),

$$\varpi = \frac{\rho p}{R} = \frac{pN}{R}\cos H.$$

Représentons maintenant par u l'angle que la tangente à la courbe d'un méridien, sur la carte, fait avec le rayon vecteur R du point de contact; on aura, d'après la théorie connue,

(3) $$\operatorname{tang} u = \frac{R\,d\varpi}{dR},$$

et de l'équation (2) l'on tirera, en faisant tout varier, excepté p,

$$\frac{R\,d\varpi}{dR} = \frac{p\,d\rho}{dR} - \varpi.$$

Mais, parce que dR est égal à l'élément $d\sigma$ de l'ellipse génératrice du sphéroïde terrestre, il est aisé de s'assurer que, d'après l'art. **169**, on a

$$\frac{d\rho}{dR} = \sin H,$$

en désignant par H la latitude du point M, dont x, y sont les coordonnées rectangles de la projection. Ainsi

(4) $$\operatorname{tang} u = p\sin H - \varpi.$$

D'ailleurs, soit ψ l'angle que la tangente à la courbe du méridien sur la carte fait avec l'axe des x ou le méridien rectiligne, il est évident que, puisque $\psi = \varpi + u$, l'on a, à très-peu près,

(5) $$\psi = p\sin H.$$

Pour la simplicité des opérations graphiques, on transporte l'origine des coordonnées rectangles au point où le parallèle moyen coupe le méridien principal; ainsi, en désignant par X, Y ces nouvelles coordonnées absolues, et par t le rayon du parallèle dont il s'agit, on a évidemment

$$x = t \mp \mathrm{X}, \quad y = \mathrm{Y},$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le point M est au nord ou au sud de la nouvelle origine. Dans ce cas, et en vertu de l'hypothèse primitive,

$$t = \frac{a \cot \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

λ étant la latitude du parallèle moyen, ou du 45e degré pour la carte de France, et e^2 désignant le carré de l'excentricité des méridiens terrestres. Par conséquent, à cette latitude, l'équation (4) donne $u = 0$; c'est-à-dire que tous les méridiens de la carte coupent à angle droit le parallèle moyen (*voyez Pl. III*); et il est évident que, selon qu'on fera la longitude p constante et la latitude H variable, ou réciproquement p variable et H constant, les valeurs de x et y résultantes donneront une série de points appartenant à la projection d'un méridien ou à celle d'un parallèle.

Lorsque ds désigne sur la carte l'élément d'un arc de méridien, on a, à cause de la relation (3),

$$ds = \frac{d\mathrm{R}}{\cos u} = d\mathrm{R}\left(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}u\right)^{-1},$$

c'est-à-dire qu'une petite ligne géodésique, mesurée dans le sens du méridien, s'accroît en projection dans le même rapport que $\cos u$ diminue.

424. Représentons par K une ligne géodésique, par exemple le côté d'un triangle du premier ordre, faisant sur la Terre un angle Z avec le méridien de l'une de ses extrémités; et cherchons tant la projection de cet angle que celle de cette ligne.

D'abord, si, entre la ligne K et le méridien dont il s'agit, l'on con-

çoit sur la Terre un arc de parallèle infiniment petit ds_1, il pourra être considéré comme la hauteur d'un triangle rectangle élémentaire dont les côtés seront ds_1, $d\sigma$ et dK; ainsi

$$\operatorname{tang} Z = \frac{ds_1}{d\sigma}.$$

Mais, sur la carte, les projections des deux côtés ds_1, $d\sigma$, sont respectivement ds_1, $\frac{d\sigma}{\cos u}$ (art. précéd.), et forment un angle dont la valeur est de $90^0 - u$. Si donc Z′ est la projection de l'azimut Z, on trouvera, avec un peu d'attention,

$$\operatorname{tang} Z' (1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} Z \sin 2u) = \operatorname{tang} Z \cos^2 u.$$

Dans la pratique, Z et Z′ diffèrent toujours très-peu l'un de l'autre, même aux limites orientales et occidentales de la carte de France; on pourra donc, d'après le théorème de Maclaurin, faire

$$Z' = Z + \left(\frac{dZ'}{du}\right) u + \left(\frac{d^2 Z'}{du^2}\right) \frac{u^2}{2} + \ldots$$

Partant,

$$Z' = Z + u \sin^2 Z - \frac{u^2}{2} \sin 2Z \cos^2 Z \ldots;$$

et il n'est pas difficile de voir qu'on aurait aussi sous forme finie,

$$\operatorname{tang}(Z' - Z) = \frac{\frac{\sin Z \sin(Z - u)}{\cos^2 Z} \sin u}{1 + \frac{\sin Z \sin(Z - u)}{\cos^2 Z} \cos u},$$

et que la projection Z′ — Z″ de l'angle de deux droites, données de direction par les azimuts Z, Z_1, serait exprimée par

$$Z' - Z'' = Z - Z_1 + u \sin(Z - Z_1) \sin(Z + Z_1),$$

aux quantités près du second ordre.

Il résulte en outre de la propriété de la projection, que si K′ est la

projection de K, on a en quantité finie,

$$K' \cos(Z - u \cos^2 Z) = K \cos Z.$$

En effet, sur la projection, le triangle élémentaire donne

$$\sin(90^\circ + Z' - u) : \frac{dM}{\cos u} = \cos u : dK',$$

d'où

$$dK' \cos(Z' - u) = dM.$$

D'ailleurs, sur la Terre, le triangle rectangle élémentaire correspondant donne

$$dM = dK \cos Z,$$

donc

$$dK' \cos(Z' - u) = dK \cos Z,$$

et intégrant, il vient

$$K' \cos(Z' - u) = K \cos Z;$$

mais $Z' = Z + u \sin^2 Z$, en négligeant le terme du second ordre : donc, en éliminant Z', on obtient la relation énoncée ci-dessus; et en la réduisant en série, il vient

$$K' = K\left(1 - \frac{u}{2}\sin 2Z + \frac{u^2}{4}\sin^2 2Z + \frac{u^2}{2}\cos^4 Z \ldots\right).$$

Enfin l'angle Z' étant diminué de celui ψ, que le méridien de la carte fait avec l'axe des x, on a pour l'inclinaison z de la projection d'une ligne géodésique avec une parallèle à l'axe des x,

$$z = Z' - \psi = Z - \varpi - u \cos^2 Z.$$

Ce résultat suppose que la latitude H est plus grande que 45°; autrement le terme $u \cos^2 Z$ serait positif.

Maintenant, si l'on considère la différentielle $d\Sigma_1$ de l'aire comprise entre deux méridiens et deux parallèles sur la carte, elle est, à un infiniment petit près du second ordre, la même que celle de l'aire du secteur dont l'arc est un de ces parallèles, c'est-à-dire que, d'après la

notation ci-dessus,

$$d\Sigma_1 = s_1 dR.$$

Mais, sur la Terre, la différentielle $d\Sigma$ de l'aire correspondante est

$$d\Sigma = s_1 d\sigma;$$

donc

$$d\Sigma_1 = d\Sigma;$$

et partant

$$\Sigma_1 = \Sigma.$$

Il suit de là que les aires des espaces quelconques pris sur la terre ne sont nullement altérés en projection.

425. L'angle z précédent est celui que nous avons appelé *azimut modifié* (page 594 du tome II du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, 1831). On voit donc que si on voulait calculer sur la carte les coordonnées rectangles des points secondaires et tertiaires, on placerait, par exemple, l'origine des axes en un point M connu de position sur cette carte, et alors les coordonnées de l'extrémité M′ du côté MM′ = K′ partant de cette origine seraient

$$dx = K' \cos z, \quad dy = K' \sin z,$$

ou, ce qui est de même,

$$dx = K' \cos(Z - \varpi - u \cos^2 Z),$$
$$dy = K' \sin(Z - \varpi - u \cos^2 Z).$$

Ayant de cette manière les coordonnées relatives de l'extrémité M′ de K′, celles absolues du même point seraient

$$X' = X + dx, \quad Y' = Y + dy;$$

mais, pour faire une juste application de cette méthode des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire sur le système actuel de projection, il faudrait assigner le signe des angles ϖ et u, comme nous allons l'indiquer, quoique cette opération ne soit plus nécessaire depuis que

les ingénieurs-géographes déterminent les latitudes et longitudes de tous les points trigonométriques (art. **193**), et qu'ils les projettent au moyen de ces deux coordonnées, lorsque les méridiens et les parallèles sont préalablement tracés sur la carte.

On remarquera qu'à l'est du méridien principal et au nord du parallèle moyen, on a

$$z = Z - \varpi - u\cos^2 Z;$$

qu'à l'est de la première ligne et au sud de la seconde, on a

$$z = Z - \varpi + u\cos^2 Z;$$

qu'à l'ouest du méridien principal et au nord du parallèle moyen, on a

$$z = Z + \varpi + u\cos^2 Z;$$

enfin qu'à l'ouest de la première ligne et au sud de la seconde, on a

$$z = Z + \varpi - u\cos^2 Z.$$

Bien entendu que les angles ϖ et u ont pour argument la latitude H du point M de départ.

Pareillement, pour le côté K' qui représente la projection de K mesuré sur la Terre, on a

à l'est / à l'ouest du méridien principal, et au nord / au sud du parallèle moyen,

$$\log K' = \log K - \frac{u''}{2}\sin 1''.\mu \sin 2Z;$$

à l'est / à l'ouest du méridien principal, et au sud / au nord du parallèle moyen,

on a

$$\log K' = \log K + \frac{u''}{2}\sin 1''.\mu \sin 2Z,$$

formules dans lesquelles l'angle u doit être exprimé en secondes.

L'exemple numérique que nous avons donné page 604 du tome II du *Mémorial du Dépôt de la Guerre* dissipe toute obscurité à cet égard.

Résolvons maintenant ce problème :

Les coordonnées rectangles X, Y, *d'un point quelconque de la projection étant connues, trouver sa latitude et sa longitude.*

Solution. Le canevas trigonométrique de la nouvelle carte de France étant pris pour exemple, les méridiens et les parallèles y sont tracés ainsi qu'on vient de l'expliquer, et en supposant à l'ellipsoïde terrestre les dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Quart du méridien. . . } Q &= 10000000^{\text{m}}, \\ \text{log. rayon de l'équateur, ou } \log a &= 6{,}8045840, \\ \text{log. carré de l'excentricité, ou } \log e^2 &= 7{,}8108714. \end{aligned}$$

Il résulte de là que si t désigne, comme précédemment, le rayon de la projection du parallèle moyen dont la latitude est de 45°, la série

$$t = \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{e^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{e^6}{8} + \ldots\right)$$

donnera

$$t = 6586861^{\text{m}};$$

alors, en supposant aux coordonnées du point M ces valeurs

$$X = -228707^{\text{m}}, \quad Y = -388685^{\text{m}},$$

on aura

$$t - X = x = 6158155^{\text{m}}, \quad Y = y$$

De plus, à cause de

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{y}{x}, \quad R = \frac{x}{\cos\varpi}, \quad R = \frac{y}{\sin\varpi},$$

on trouvera, en opérant par les logarithmes à sept figures, cette valeur

$$\varpi = 3°36'41'',6.$$

Par suite, on aura

$$\log R = \log\frac{x}{\cos\varpi} = 6{,}7903137, \quad \log R = \log\frac{y}{\sin\varpi} = 6{,}7903140,$$

c'est-à-dire deux valeurs logarithmiques presque identiques; et, en passant aux nombres,

$$R = 6170406^{m}.$$

Faisant maintenant

$$t - R = \sigma = 216455^{m},$$

l'amplitude φ de cet arc commençant à la latitude de 45° se déduira de cette série

$$\varphi = \pm A\sigma - B\sigma^2 + C\sigma^4 \ldots,$$

démontrée art. **185**, et dans laquelle

$$A = \frac{180}{\pi\gamma}, \quad B = \frac{3}{4}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{a^2e^2}{b^2\gamma\gamma'}, \quad C = \frac{1}{4}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{a^2e^2}{b^2\gamma^3\gamma'},$$

γ et γ' étant les rayons de plus grande et de plus petite courbure à la latitude dont il s'agit. Si l'on évalue numériquement ces coefficients, dont les deux premiers suffisent pour toute l'étendue de la France, on aura

$$\log A = 4{,}9542469, \quad \log B = 5{,}83770,$$

et par suite

$$\varphi = 1^\circ{,}947816 = 1^\circ 56' 52'',14;$$

enfin la latitude cherchée sera

$$H = 45^\circ + \varphi = 46^\circ 56' 52'',14.$$

Notez bien que, dans la série précédente, les deux premiers termes se soustraient l'un de l'autre ou s'ajoutent ensemble, selon que le point M donné est au nord ou au sud du 45ᵉ degré de latitude.

Quant à la longitude P de ce même point, comptée du méridien principal ou de Paris, elle a pour expression, d'après ce qui précède,

$$P = \frac{\varpi}{\cos H}\left(\frac{R}{N}\right),$$

N étant la normale ou le rayon de plus petite courbure au point donné. Or, log N se trouvant au moyen de la Table IV du tome I, mais des

nombres de laquelle on devra ôter 0,0000314, parce que le quart du méridien y est supposé de 10000724^{m}, on aura à la latitude H ci-dessus,

$$\log N = 6,8053351,$$

et de là

$$P = 5^{o},11047 = 5^{o}6'37'',69.$$

Enfin, comme le point M a pour coordonnées rectangles — X et — Y sur la projection actuelle, il se trouve situé au nord du parallèle moyen et à l'orient du méridien principal (art. **164**).

Ajoutons que, la face méridionale de l'Observatoire de Paris étant de $48^{o}50'13'',22 = 48^{o},837005$, on peut avoir besoin de connaître sa distance au parallèle moyen, mesurée sur le méridien de cet Observatoire; or, la série précédente étant retournée, on a

$$\sigma = \pm A'\varphi + B'\varphi^2 - C'\varphi^4 \ldots$$

et

$$A' = \frac{\pi}{180}\gamma, \quad B' = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{180^2}\cdot\frac{e^2\gamma\gamma'^2}{a^2}, \quad C' = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^4}{180^4}\cdot\frac{e^2\gamma\gamma'^2}{a^2};$$

partant,

$$\log A' = 5,0457531, \quad \log B' = 0,974968.$$

Ainsi la distance méridienne cherchée, en faisant attention que $\varphi = 3^{o},837005$, a pour valeur

$$\sigma = 426468^{m},7.$$

Formes nouvelles que prennent les coordonnées rectangles sur la projection.

426. Puisqu'en général les coordonnées primitives d'un point M sur la projection sont

$$x = R\cos\varpi, \quad y = R\sin\varpi,$$

et que

$$\varpi = \frac{ap\cos H}{R}(1 + \alpha\sin^2 H),$$

α désignant l'aplatissement de la Terre, ou $\frac{a-b}{a}$; on a

$$\sin\varpi = \sin\left[\frac{ap\cos H}{R}(1 + \alpha\sin^2 H)\right],$$

$$\cos\varpi = \cos\left[\frac{ap\cos H}{R}(1 + \alpha\sin^2 H)\right].$$

Mais soit ϖ_0 ce que devient ϖ lorsque $\alpha = 0$, on aura plus simplement

$$\varpi = \varpi_0 (1 + \alpha \sin^2 H);$$

par suite, et à cause de la petitesse de α,

$$\sin \varpi = \sin \varpi_0 + \alpha\varpi_0 \sin^2 H \cos \varpi_0,$$
$$\cos \varpi = \cos \varpi_0 - \alpha\varpi_0 \sin^2 H \sin \varpi_0;$$

partant,

$$x = R \cos \varpi_0 - \alpha\varpi_0 R \sin^2 H \sin \varpi_0,$$
$$y = R \sin \varpi_0 + \alpha\varpi_0 R \sin^2 H \cos \varpi_0.$$

Faisant, pour abréger, le facteur $\alpha\varpi_0 R \sin^2 H = R_1$, on aura enfin

$$x = R \cos \varpi_0 - R_1 \sin \varpi_0,$$
$$y = R \sin \varpi_0 + R_1 \cos \varpi_0,$$

formules dans lesquelles $\varpi_0 = \frac{ap \cos H}{R}$, et $R = t - (H - \lambda)$, ou $R = t + (\lambda - H)$, selon que le point M est au nord ou au sud du parallèle moyen dont la latitude est λ. Elles font voir clairement quelles corrections devraient subir les coordonnées primitives x, y, si elles étaient connues pour la Terre supposée sphérique, et s'il fallait que leurs valeurs numériques correspondissent à la figure ellipsoïdale dont l'aplatissement serait α et très-petit; ou bien ce qu'il faudrait faire pour que ces coordonnées convinssent à un autre aplatissement α', si elles avaient été originairement assujetties à l'aplatissement α.

Il est d'autres espèces de projections usitées en géographie; mais l'analyse de leurs propriétés entraînant dans des procédés graphiques qui sont hors du domaine de la science géodésique, nous renverrons le lecteur aux deuxième et troisième livres de notre *Traité de Topographie,* où cette matière est présentée sous le double point de vue de la théorie et de la pratique.

Faute essentielle à corriger. Page 476, ligne 14, $\frac{g}{g'} = 1 + \frac{5}{8}u$, *lisez* $\frac{g}{g'} = 1 - \frac{5}{4}u$.

TABLES ASTRONOMIQUES.

TABLE I.

ASCENSIONS DROITES MOYENNES DU SOLEIL EN TEMPS,

Pour tous les jours de l'année, pour servir à la conversion du temps sidéral en temps solaire moyen, et vice versâ.

JOURS DU MOIS.	JANVIER.	☊ ☾	FÉVRIER.	☊ ☾	MARS.	☊ ☾	AVRIL.	☊ ☾	MAI.	☊ ☾	JUIN.	☊ ☾
	h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.	
0	18.36.44,03	0	20.38.57,30	5	22.29.20,82	9	0.31.33,95	12	2.29.50,56	17	4.32. 3,80	22
1	18.40.40,59	0	20.42.53,85	5	22.33.17,37	9	0.35.30,51	13	2.33.47,12	18	4.36. 0,35	22
2	18.44.37,14	0	20.46.50,40	5	22.37.13,93	9	0.39.27,07	13	2.37.43,67	18	4.39.56,92	22
3	18.48.33,70	0	20.50.46,96	5	22.41.10,47	9	0.43.23,61	13	2.41.40,23	18	4.43.53,48	22
4	18.52.30,26	1	20.54.43,51	5	22.45. 7,03	9	0.47.20,17	13	2.45.36,78	18	4.47.50,04	22
5	18.56.26,82	1	20.58.40,07	5	22.49. 3,58	9	0.51.16,72	13	2.49.33,34	18	4.51.46,59	22
6	19. 0.23,38	1	21. 2.36,62	6	22.53. 0,13	10	0.55.13,28	13	2.53.29,90	18	4.55.43,14	22
7	19. 4.19,94	1	21. 6.33,18	6	22.56.56,69	10	0.59. 9,82	14	2.57.26,45	18	4.59.39,71	23
8	19. 8.16,50	1	21.10.29,74	6	23. 0.53,24	10	1. 3. 6,38	14	3. 1.23,00	19	5. 3.36,17	23
9	19.12.13,05	1	21.14.26,30	6	23. 4.49,80	10	1. 7. 2,92	14	3. 5.19,55	19	5. 7.32,83	23
10	19.16. 9,61	1	21.18.22,85	6	23. 8.46,35	10	1.10.59,48	14	3. 9.16,11	19	5.11.29,38	23
11	19.20. 6,16	2	21.22.19,41	6	23.12.42,90	10	1.14.56,03	14	3.13.12,67	19	5.15.25,94	23
12	19.24. 2,72	2	21.26.15,96	6	23.16.39,45	10	1.18.52,59	14	3.17. 9,13	19	5.19.22,49	23
13	19.27.59,28	2	21.30.12,51	7	23.20.35,00	10	1.22.49,14	15	3.21. 5,79	19	5.23.19,06	24
14	19.31.55,84	2	21.34. 9,06	7	23.24.32,55	11	1.26.45,70	15	3.25. 2,35	19	5.27.15,61	24
15	19.35.52,39	2	21.38. 5,62	7	23.28.29,11	11	1.30.42,25	15	3.28.58,90	19	5.31.12,17	24
16	19.39.48,95	2	21.42. 2,18	7	23.32.25,66	11	1.34.38,81	15	3.32.55,46	20	5.35. 8,73	24
17	19.43.45,51	3	21.45.58,73	7	23.36.22,21	11	1.38.35,36	15	3.36.52,01	20	5.39. 5,29	24
18	19.47.42,07	3	21.49.55,28	7	23.40.18,75	11	1.42.31,91	15	3.40.48,57	20	5.43. 1,85	24
19	19.51.38,63	3	21.53.51,83	7	23.44.15,31	11	1.46.28,46	16	3.44.45,13	20	5.46.58,41	25
20	19.55.35,18	3	21.57.48,39	7	23.48.11,87	11	1.50.25,02	16	3.48.41,68	20	5.50.54,96	25
21	19.59.31,74	3	22. 1.44,94	8	23.52. 8,42	11	1.54.21,58	16	3.52.38,24	20	5.54.51,52	25
22	20. 3.28,29	3	22. 5.41,51	8	23.56. 4,98	11	1.58.18,13	16	3.56.34,79	20	5.58.48,08	25
23	20. 7.24,85	3	22. 9.38,05	8	0. 0. 1,53	11	2. 2.14,68	16	4. 0.31,35	20	6. 2.44,64	25
24	20.11.21,40	4	22.13.34,61	8	0. 3.58,09	12	2. 6.11,23	16	4. 4.27,90	21	6. 6.41,20	25
25	20.15.17,96	4	22.17.31,16	8	0. 7.54,64	12	2.10. 7,79	17	4. 8.24,46	21	6.10.37,75	26
26	20.19.14,51	4	22.21.27,72	8	0.11.51,20	12	2.14. 4,34	17	4.12.21,01	21	6.14.34,31	26
27	20.23.11,07	4	22.25.24,26	8	0.15.47,74	12	2.18. 0,90	17	4.16.17,57	21	6.18.30,86	26
28	20.27. 7,63	4	22.29.20,82	9	0.19.44,30	12	2.21.57,45	17	4.20.14,12	21	6.22.27,43	26
29	20.31. 4,19	4			0.23.40,84	12	2.25.54,01	17	4.24.10,69	21	6.26.23,98	26
30	20.35. 0,74	4			0.27.37,40	12	2.29.50,56	17	4.28. 7,24	21	6.30.20,54	26
31	20.38.57,30	5			0.31.33,95	12			4.32. 3,80	22		

Dans les années bissextiles, ôtez un jour des mois de Janvier et de Février.

SUITE DE LA TABLE I.

ASCENSIONS DROITES MOYENNES DU SOLEIL EN TEMPS,

Pour tous les jours de l'année, pour servir à la conversion du temps sidéral en temps solaire moyen, et vice versâ.

JOURS DU MOIS.	JUILLET.	☊ ☾	AOUT.	☊ ☾	SEPTEMB.	☊ ☾	OCTOBRE.	☊ ☾	NOVEMBRE	☊ ☾	DÉCEMBRE.	☊ ☾
	h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.		h. m. s.		h. m. s	
0	6.30.20,54	26	8.32. 3,81	30	10.34.47,01	35	12.33. 3,60	39	14.35.16,75	44	16.33.33,43	48
1	6.34.17,10	27	8.36.30,37	31	10.38.43,57	36	12.37. 0,15	40	14.39.13,31	45	16.37.30,00	49
2	6.38.13,66	27	8.40.26,92	31	10.42.40,12	36	12.40.56,70	40	14.43. 9,86	45	16.41.26,55	49
3	6.42.10,21	27	8.44.23,48	31	10.46.36,67	36	12.44.53,25	40	14.47. 6,42	55	16.45.23,11	49
4	6.46. 6,77	27	8.48.20,03	31	10.50.33,22	36	12.48.49,80	40	14.51. 2,97	45	16.49.19,66	49
5	6.50. 3,33	27	8.52.16,59	31	10.54.29,77	36	12.52.46,35	40	14.54.59,52	45	16.53.16,22	49
6	6.53.59,89	27	8.56.13,15	31	10.58.26,32	36	12.56.42,91	40	14 58.56,08	45	16.57.12,78	49
7	6.57.56,44	27	9. 0. 9,70	31	11. 2.22,88	36	13. 0.39,47	41	15. 2.52,63	45	17. 1. 9,34	49
8	7. 1.53,00	28	9. 4. 6,26	32	11. 6.19,43	37	13. 4.36,02	41	15. 6.49,19	46	17 5. 5,90	50
9	7. 5.49,56	28	9. 8. 2,81	32	11.10.15,98	37	13. 8.32,57	41	15.10.45,75	46	17. 9. 2,45	50
10	7. 9.46,12	28	9.11.59,37	32	11.14 12,54	37	13.12.29,12	41	15.14 42,30	46	17.12.59,01	50
11	7.13.42,68	28	9.15.55,92	32	11 18. 9,10	37	13.16.25,68	41	15 18.38,86	46	17.16.55,57	50
12	7.17.39,23	28	9.19.52,48	32	11.22. 5,65	37	13.20.22,23	41	15.22.35,42	46	17.20.52,13	50
13	7.21.35,80	28	9.23.49,03	32	11.26. 2,20	37	13.24.18,78	42	15.26.31,98	46	17.24.48,68	50
14	7.25.32,34	28	9.27.45,59	33	11.29.58,75	37	13.28.15,33	42	15.30.28,53	46	17.28.45,24	51
15	7.29.28,91	28	9.31.42,14	33	11.33.55,30	37	13.32.11,88	42	15.34.25,08	47	17.32.41,80	51
16	7.33.25,46	29	9.35.38,72	33	11.37.51,85	38	13.36. 8,43	42	15 38.21,64	47	17.36.38,36	51
17	7.37.22,02	29	9.39.35,25	33	11.41.48,40	38	13.40. 4,99	42	15.42.18,19	47	17.40.34,92	51
18	7.41.18,57	29	9.43.31,81	33	11.45.44,95	38	13.44. 1,54	42	15.46.14,75	47	17.44.31,48	51
19	7.45.15,13	29	9.47.28,36	33	11.49.41,51	38	13.47.58,10	43	15.50.11,30	47	17.48.28,04	51
20	7.49.11,69	29	9.51.24,92	34	11.53.38,06	38	13.51.54,65	43	15.54. 7,86	47	17.52.24,59	52
21	7.53. 8,24	29	9.55.21,47	34	11.57.34,62	38	13.55.51,21	43	15.58. 4,41	47	17.56.21,15	52
22	7.57. 4,81	29	9.59.18,03	34	12. 1.31,17	38	13.59.47,77	43	16. 2 0,97	47	18. 0.17,71	52
23	8. 1. 1,36	29	10. 3.14,58	34	12. 5.27,72	38	14. 3.44,32	43	16. 5.57,52	48	18. 4.14,27	52
24	8. 4.57,92	30	10. 7.11,13	34	12. 9.24,28	39	14. 7.40,87	43	16. 9.54,08	48	18. 8.10,82	52
25	8. 8.54,48	30	10.11. 7,69	34	12.13.20,83	39	14.11.37,42	44	16.13.50,64	48	18.12. 7,38	52
26	8.12.51,04	30	10.15. 4,24	35	12.17.17,39	39	14.15.33,98	44	16.17.47,19	48	18.16. 3,93	53
27	8.16.47,59	30	10.19. 0,80	35	12.21.13,94	39	14.19.30,53	44	16.21.43,75	48	18.20. 0,49	55
28	8.20.44,15	30	10.22.57,35	35	12.25.10,50	39	14.23.27,09	44	16.25.40,31	48	18.23.57,05	53
29	8.24.40,71	30	10.26.53,90	35	12.29. 7,05	39	14.27.23,64	44	16.29.36,87	48	18.27.53,61	53
30	8.28.37,26	30	10.30.50,45	35	12.33. 3,60	39	14.31.20,20	44	16.33.33,43	48	18.31.50,16	53
31	8.32.33,81	30	10.34.47,01	35			14.35.16,75	44			18.35.46,72	54

TABLE II.

Quantités à ajouter aux ascensions droites moyennes du Soleil en temps de la Table I, pour avoir celles de l'année proposée.

ANNÉES.	NOMBRES à ajouter.	SUPPL. ☊ ☾ N.	ANNÉES.	NOMBRES à ajouter.	SUPPL. ☊ ☾ N.	ANNÉES.	NOMBRES à ajouter.	SUPPL. ☊ ☾ N.	ANNÉES.	NOMBRES à ajouter.	SUPPL. ☊ ☾ N.
1749	$4^{m}15^{s}91$	168	1829	$2^{m}46^{s}43$	466	1839	$1^{m}6^{s}46$	3	184)	$3^{m}23^{s}15$	540
1820 B	3.28,91	982	1830	1.49,03	519	1840 B	4. 5,72	56	1850	2.25,86	594
1821	2.31,61	36	1831	0.51,73	573	1841	3. 8,42	110	1851	1.28,55	648
1822	1.34,31	90	1832 B	3.50,99	627	1842	2.11,12	164	1852 B	4,27,81	701
1823	0.37,01	143	1833	2.53,69	681	1843	1.13,83	218	1853	3.30,52	755
1824 B	3.36,27	197	1834	1.56,40	734	1844 B	4.13,08	272	1854	2.33,22	809
1825	2.38,97	251	1835	0.59,10	788	1845	3.15,79	325	1855	1.35,92	863
1826	1.41,67	304	1836 B	3.58,36	842	1846	2.18,49	379	1856 B	4.35,18	916
1827	0.44,37	358	1837	3. 1,06	895	1847	1.21,19	433	1857	3.37,88	970
1828 B	3.43,63	412	1838	2. 3,76	949	1848 B	4.20,45	487	1858	2.40,58	24
1829	2.46,33	466	1839	1. 6,46	3	1849	3.23,15	540	1859	1.43,28	78
									1860 B	4.42,54	132

TABLE III.

Nutation lunaire *en ascension droite et en temps.*

Argument : Supplément du nœud de la Lune.

☊ N.	0 + 500 −	100 + 600 −	200 + 700 −	☊ N.
0	$0^{s}000$	$0^{s}646$	$1^{s}047$	100
10	0,070	0,700	1,066	90
20	0,138	0,753	1,081	80
30	0,206	0,803	1,092	70
40	0,274	0,848	1,099	60
50	0,340	0,890	1,101	50
60	0,405	0,929	1,099	40
70	0,468	0,964	1,092	30
80	0,530	0,996	1,081	20
90	0,590	1,023	1,066	10
100	0,646	1,047	1,047	0
N.	900 − 400 +	800 − 300 +	700 − 200 +	N.

Nutation solaire *en ascension droite et en temps.*

Argument : Longitude vraie du ⊙.

Degrés.	0^{s} − 6^{s} − 9 + 3 +	1^{s} − 7^{s} − 10 + 4 +	
0	$0^{s}000$	$0^{s}059$	30
3	0,007	0,063	27
6	0,014	0,065	24
9	0,021	0,067	21
12	0,028	0,068	18
15	0,034	0,069	15
18	0,040	0,068	12
21	0,046	0,067	9
24	0,051	0,065	6
27	0,055	0,063	3
30	0,059	0,059	0
	2^{s} − 8^{s} − 11 + 5 +	. .	Degrés.

TABLE IV.

Conversion du Temps sidéral en Temps moyen.

ARGUMENT : Temps sidéral.

HEURES.		MINUTES.				SECONDES.			
TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.
1h	0m 9s830	1m	0s164	31m	5s079	1s	0s003	31s	0s085
2	0.19,659	2	0,328	32	5,242	2	0,005	32	0,087
3	0.29,489	3	0,491	33	5,406	3	0,008	33	0,090
4	0.39,318	4	0,655	34	5,570	4	0,011	34	0,093
5	0.49,148	5	0,819	35	5,734	5	0,014	35	0,096
6	0.58,977	6	0,983	36	5,898	6	0,016	36	0,098
7	1. 8,807	7	1,147	37	6,062	7	0,019	37	0,101
8	1.18,636	8	1,311	38	6,225	8	0,022	38	0,104
9	1.28,466	9	1,474	39	6,389	9	0,025	39	0,106
10	1.38,296	10	1,638	40	6,553	10	0,027	40	0,109
11	1.48,125	11	1,802	41	6,717	11	0,030	41	0,112
12	1.57,955	12	1,966	42	6,881	12	0,033	42	0,115
13	2. 7,784	13	2,130	43	7,045	13	0,035	43	0,117
14	2.17,614	14	2,294	44	7,208	14	0,038	44	0,120
15	2.27,443	15	2,457	45	7,372	15	0,041	45	0,123
16	2.37,273	16	2,621	46	7,536	16	0,044	46	0,126
17	2.47,103	17	2,785	47	7,700	17	0,046	47	0,128
18	2.56,932	18	2,949	48	7,864	18	0,049	48	0,131
19	3. 6,762	19	3,113	49	8,027	19	0,052	49	0,134
20	3.16,591	20	3,277	50	8,191	20	0,055	50	0,137
21	3.26,421	21	3,440	51	8,355	21	0,057	51	0,139
22	3.36,250	22	3,604	52	8,519	22	0,060	52	0,142
23	3.46,080	23	3,768	53	8,683	23	0,063	53	0,145
24	3.55,909	24	3,932	54	8,847	24	0,066	54	0,147
		25	4,096	55	9,010	25	0,068	55	0,150
		26	4,259	56	9,174	26	0,071	56	0,153
		27	4,423	57	9,338	27	0,074	57	0,156
		28	4,587	58	9,502	28	0,076	58	0,158
		29	4,751	59	9,666	29	0,079	59	0,161
		30	4,915	60	9,830	30	0,082	60	0,164

TABLE V.

Conversion du Temps moyen en Temps sidéral.

ARGUMENT : Temps moyen.

HEURES.		MINUTES.				SECONDES.			
TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.	TEMPS moyen.	TEMPS sidéral.
1^{h}	$0^{m}9^{s}856$	1^{m}	$0^{s}164$	31^{m}	$5^{s}093$	1^{s}	$0^{s}003$	31^{s}	$0^{s}085$
2	0.19,713	2	0,329	32	5,257	2	0,005	32	0,088
3	0.29,569	3	0,493	33	5,421	3	0,008	33	0,090
4	0.39,426	4	0,657	34	5,585	4	0,011	34	0,093
5	0.49,282	5	0,821	35	5,750	5	0,014	35	0,096
6	0.59,139	6	0,986	36	5,914	6	0,016	36	0,099
7	1. 8,995	7	1,150	37	6,078	7	0,019	37	0,101
8	1.18,852	8	1,314	38	6,242	8	0,022	38	0,104
9	1.28,708	9	1,478	39	6,407	9	0,025	39	0,107
10	1.38,565	10	1,643	40	6,571	10	0,027	40	0,110
11	1.48,421	11	1,807	41	6,735	11	0,030	41	0,112
12	1.58,278	12	1,971	42	6,900	12	0,033	42	0,115
13	2. 8,134	13	2,136	43	7,064	13	0,036	43	0,118
14	2.17,991	14	2,300	44	7,228	14	0,038	44	0,120
15	2.27,847	15	2,464	45	7,392	15	0,041	45	0,123
16	2.37,704	16	2,628	46	7,557	16	0,044	46	0,126
17	2.47,560	17	2,793	47	7,721	17	0,047	47	0,129
18	2.57,417	18	2,957	48	7,885	18	0,049	48	0,131
19	3. 7,273	19	3,121	49	8,049	19	0,052	49	0,134
20	3.17,129	20	3,285	50	8,214	20	0,055	50	0,137
21	3.26,986	21	3,450	51	8,378	21	0,057	51	0,140
22	3.36,842	22	3,614	52	8,542	22	0,060	52	0,142
23	3.46,699	23	3,778	53	8,707	23	0,063	53	0,145
24	3.56,555	24	3,943	54	8,871	24	0,066	54	0,148
		25	4,107	55	9,035	25	0,068	55	0,151
		26	4,271	56	9,199	26	0,071	56	0,153
		27	4,435	57	9,364	27	0,074	57	0,156
		28	4,600	58	9,528	28	0,077	58	0,159
		29	4,764	59	9,692	29	0,079	59	0,162
		30	4,928	60	9,856	30	0,082	60	0,164

TABLE VI. — RÉFRACTIONS.

Logarithme de la réfraction pour $0^m,76$ du Baromètre et $+10^\circ$ du Thermomètre centigrade.

Argument : Distance zénithale apparente.

Distance appar. au zén.	Logarithm.	Différence pour 1'.
0°	....	
1	0,0000	
		51,45
2	0,3087	
		29,23
3	0,4841	
		21,05
4	0,6104	
		16,15
5	0,7073	
		13,32
6	0,7872	
		11,20
7	0,8594	
		9,82
8	0,9133	
		8,67
9	0,9653	
		7,75
10	1,0118	
		7,05
11	1,0541	
		6,43
12	1,0929	
		6,00
13	1,1289	
		5,55
14	1,1622	
		5,53
15	1,1936	
		4,90
16	1,2230	
		4,63
17	1,2508	
		4,42
18	1,2773	
		4,18
19	1,3024	
		4,00
20	1,3264	
		3,87
21	1,3496	
		3,70
22	1,3718	
		3,60
23	1,3934	
		3,43
24	1,4140	
		3,33
25	1,4340	
		3,24
26	1,4536	
		3,15
27	1,4725	
		3,10
28	1,4911	
		3,00
29	1,5091	
		2,95
30	1,5268	
		2,88
31	1,5441	
		2,83
32	1,5611	
		2,78
33	1,5778	
		2,75
34	1,5943	
		2,70
35	1,6105	
		2,67
36	1,6265	
		2,64
37	1,6424	
		2,60
38	1,6580	
		2,58
39	1,6735	
		2,56
40	1,6890	

Distance appar. au zén.	Logarithm.	Différ. pour 1'.
40°	1,6890	
		2,55
41	1,7043	
		2,53
42	1,7195	
		3,53
43	1,7347	
		2,53
44	1,7499	
		2,52
45	1,7650	
		2,52
46	1,7801	
		2,53
47	1,7953	
		2,53
48	1,8105	
		2,53
49	1,8257	
		2,55
50	1,8410	
		2,57
51	1,8564	
		2,58
52	1,8719	
		2,60
53	1,8875	
		2,63
54	1,9033	
		2,65
55	1,9193	
		2,68
56	1,9354	
		2,73
57	1,9518	
		2,78
58	1,9685	
		2,82
59	1,9854	
		2,87
60	2,0026	
		2,93
61	2,0202	
		2,98
62	2,0381	
		3,05
63	2,0565	
		3,13
64	2,0753	
		3,22
65	2,0946	
		3,32
66	2,1145	
		3,42
67	2,1350	
		3,52
68	2,1561	
		3,63
69	2,1781	
		3,84
70	2,2009	
		3,97
71	2,2246	
		4,12
72	2,2493	
		4,32
73	2,2752	
		4,53
74	2,3024	
		4,77
75	2,3310	
		5,05
76	2,3613	
		5,38
77	2,3936	
		5,73
78	2,4280	
		6,15
79	2,4649	
		6,67
80	2,5049	

Distance apparente au zénith.	Logarittm.	Différ. pour 1'.
80° 0'	2,5049	
		7,1
10	2,5120	
		7,1
20	2,5191	
		7,1
30	2,5262	
		7,2
40	2,5334	
		7,4
50	2,5408	
		7,5
81. 0	2,5483	
		7,5
10	2,5558	
		7,7
20	2,5635	
		7,9
30	2,5714	
		8,1
40	2,5795	
		8,2
50	2,5877	
		8,2
82. 0	2,5959	
		8,2
10	2,6041	
		8,3
20	2,6124	
		8,5
30	2,6209	
		8,8
40	2,6297	
		9,1
50	2,6388	
		9,3
83. 0	2,6481	
		9,6
10	2,6577	
		9,7
20	2,6674	
		9,8
30	2,6772	
		10,0
40	2,6872	
		10,2
50	2,6974	
		10,1
84. 0	2,7075	
		10,4
10	2,7179	
		10,7
20	2,7286	
		11,0
30	2,7396	
		11,2
40	2,7508	
		11,4
50	2,7622	
		11,8
85. 0	2,7740	
		12,0
10	2,7860	
		12,2
20	2,7982	
		12,5
30	2,8107	
		12,8
40	2,8235	
		13,2
50	2,8367	
		13,5
86. 0	2,8502	
		13,8
10	2,8640	
		14,2
20	2,8782	
		14,5
30	2,8927	
		14,9
40	2,9076	
		15,3
50	2,9229	
		15,7
87. 0	2,9386	

Distance apparente au zénith.	Logarithm.	Différ. pour 1'.
87° 0'	2,9386	
		16,1
10	2,9547	
		16,6
20	2,9713	
		17,0
30	2,9883	
		17,4
40	3,0057	
		18,1
50	3,0238	
		18,5
88. 0	3,0423	
		19,0
10	3,0613	
		19,6
20	3,0809	
		20,1
30	3,1010	
		20,7
40	3,1217	
		21,2
50	3,1429	
		21,8
89. 0	3,1647	
		22,4
10	3,1871	
		23,0
20	3,2101	
		23,4
30	3,2335	
		24,0
40	3,2575	
		24,5
50	3,2820	
		24,7
90. 0	3,3067	
		24,9
10	3,3316	
		25,1
20	3,3567	
		25,3
90.30	3,3820	

Table complémentaire.

Distance app. au zénith.	—
67°	0"0
68	0,1
74	0,1
75	0,2
77	0,2
78	0,3
79	0,4
80	0,5
81	0,7
82	1,0
83	1,6
84	2,5
85	4,3

TABLE VII.

Corrections des réfractions moyennes.

HAUTEUR du baromètre.	LOGARITHMES.	HAUTEUR du baromètre.	LOGARITHMES.
m.		m.	
0,710	9,9704	0,760	0,0000
0,711	9,9710	0,761	0,0005
0,712	9,9716	0,762	0,0011
0,713	9,9722	0,763	0,0017
0,714	9,9728	0,764	0,0022
0,715	9,9734	0,765	0,0028
0,716	9,9741	0,766	0,0034
0,717	9,9747	0,767	0,0039
0,718	9,9753	0,768	0,0045
0,719	9,9759	0,769	0,0051
0,720	9,9765	0,770	0,0056
0,721	9,9771	0,771	0,0062
0,722	9,9777	0,772	0,0068
0,723	9,9783	0,773	0,0073
0,724	9,9789	0,774	0,0079
0,725	9,9795	0,775	0,0085
0,726	9,9801	0,776	0,0090
0,727	9,9807	0,777	0,0096
0,728	9,9813	0,778	0,0101
0,729	9,9819	0,779	0,0107
0,730	9,9824	0,780	0,0112
0,731	9,9830	0,781	0,0118
0,732	9,9836	0,782	0,0123
0,733	9,9842	0,783	0,0129
0,734	9,9848	0,784	0,0135
0,735	9,9854	0,785	0,0140
0,736	9,9860	0,786	0,0146
0,737	9,9865	0,787	0,0151
0,738	9,9871	0,788	0,0157
0,739	9,9877	0,789	0,0162
0,740	9,9883	0,790	0,0168
0,741	9,9889	0,791	0,0173
0,742	9,9895	0,792	0,0179
0,743	9,9900	0,793	0,0184
0,744	9,9906	0,794	0,0190
0,745	9,9912	0,795	0,0195
0,746	9,9918	0,796	0,0200
0,747	9,9924	0,797	0,0206
0,748	9,9929	0,798	0,0211
0,749	9,9935	0,799	0,0217
0,750	9,9941	0,800	0,0222
0,751	9,9947	0,801	0,0228
0,752	9,9952	0,802	0,0233
0,753	9,9958	0,803	0,0239
0,754	9,9964	0,804	0,0244
0,755	9,9971	0,805	0,0249
0,756	9,9977	0,806	0,0255
0,757	9,9982	0,807	0,0260
0,758	9,9988	0,808	0,0266
0,759	9,9994	0,809	0,0271
		0,810	0,0276

HAUTEUR du thermomètre.	LOGARITHMES.	HAUTEUR du thermomètre.	LOGARITHMES.
+ 35G	9,9604	— 0G	0,0168
+ 34	9,9619	— 1	0,0185
+ 33	9,9634	— 2	0,0202
+ 32	9,9650	— 3	0,0219
+ 31	9,9665	— 4	0,0237
+ 30	9,9681	— 5	0,0254
+ 29	9,9696	— 6	0,0271
+ 28	9,9712	— 7	0,0289
+ 27	9,9727	— 8	0,0307
+ 26	9,9743	— 9	0,0324
+ 25	9,9758	— 10	0,0342
+ 24	9,9774	— 11	0,0360
+ 23	9,9790	— 12	0,0377
+ 22	9,9806	— 13	0,0395
+ 21	9,9822	— 14	0,0413
+ 20	9,9838	— 15	0,0431
+ 19	9,9854	— 16	0,0449
+ 18	9,9870	— 17	0,0467
+ 17	9,9886	— 18	0,0486
+ 16	9,9902	— 19	0,0504
+ 15	9,9918	— 20	0,0522
+ 14	9,9934	— 21	0,0541
+ 13	9,9950	— 22	0,0559
+ 12	9,9967	— 23	0,0578
+ 11	9,9983	— 24	0,0597
+ 10	0,0000	— 25	0,0615
+ 9	0,0016	— 26	0,0634
+ 8	0,0033	— 27	0,0653
+ 7	0,0050	— 28	0,0672
+ 6	0,0066	— 29	0,0691
+ 5	0,0083	— 30	0,0710
+ 4	0,0100	— 31	0,0729
+ 3	0,0117	— 32	0,0749
+ 2	0,0134	— 33	0,0768
+ 1	0,0151	— 34	0,0787
+ 0	0,0168	— 35	0,0807

La différence de la 1re partie de cette Table varie de 7 à 5, celle de la 2e partie varie de 15 à 20.

TABLE VIII. – RÉFRACTIONS.

Argument : *Distance zénithale vraie.*

DIST. zénith. vraie.	LOG RÉFRAC. moyenne.	DIFFÉR. pour 1′	DISTANCE zénithale vraie.	LOG RÉFRAC. moyenne.	DIFFÉR. pour 1′.	DISTANCE zénithale vraie.	LOG RÉFRAC. moyenne.	DIFFÉR. pour 1′.	DISTANCE zénithale vraie.	LOG RÉFRAC. moyenne.	DIFFÉR. pour 1′.
20°	1,3263	3,87			2,65	81° 0′	2,5439	7,4	86° 0′	2,8349	13,0
21	1,3495	3,68	55°	1,9188	2,70	10	2,5513	7,5	10	2,8479	13,2
22	1,3716	3,60	56	1,9350	2,73	20	2,5588	7,7	20	2,8611	13,6
23	1,3932	3,43	57	1,9514	2,77	30	2,5665	7,9	30	2,8747	13,8
24	1,4138	3,33	58	1,9680	2,83	40	2,5744	8,1	40	2,8885	14,2
25	1,4338	3,25	59	1,9850	2,85	50	2,5825	8,1	50	2,9027	14,4
26	1,4533	3,17	60	2,0021	2,93	82. 0	2,5906	8,1	87. 0	2,9171	14,8
27	1,4723	3,10	61	2,0197	2,97	10	2,5987	8,1	10	2,9319	15,1
28	1,4909	3,00	62	2,0375	3,05	20	2,6068	8,3	20	2,9470	15,5
29	1,5089	2,95	63	2,0558	3,15	30	2,6151	8,4	30	2,9625	15,8
30	1,5266	2,88	64	2,0747	3,20	40	2,6235	8,8	40	2,9783	16,1
31	1,5439	2,83	65	2,0939	3,33	50	2,6323	9,0	50	2,9944	16,5
32	1,5609	2,78	66	2,1138	3,40	83. 0	2,6413	9,2	88. 0	3,0109	17,0
33	1,5776	2,75	67	2,1342	3,52	10	2,6505	9,5	10	3,0279	17,3
34	1,5941	2,70	68	2,1553	3,66	20	2,6600	9,6	20	3,0452	17,5
35	1,6103	2,67	69	2,1773	3,80	30	2,6696	9,6	30	3,0627	18,2
36	1,6263	2,65	70	2,2001	3,92	40	2,6792	9,9	40	3,0809	18,3
37	1,6422	2,60	71	2,2236	4,08	50	2,6891	9,9	50	3,0992	18,6
38	1,6578	2,58	72	2,2481	4,30	84. 0	2,6990	10,0	89. 0	3,1178	19,0
39	1,6733	2,57	73	2,2739	4,50	10	2,7090	10,3	10	3,1368	19,4
40	1,6887	2,56	74	2,3009	4,73	20	2,7193	10,5	20	3,1562	19,7
41	1,7040	2,53	75	2,3293	5,02	30	2,7289	10,7	30	3,1759	19,8
42	1,7192	2,53	76	2,3594	5,33	40	2,7405	11,0	40	3,1957	20,2
43	1,7344	2,53	77	2,3914	5,67	50	2,7515	11,1	50	3,2159	20,6
44	1,7496	2,53	78	2,4254	6,08	85. 0	2,7626	11,5	90. 0	3,2365	20,7
45	1,7648	2,53	79	2,4619	6,58	10	2,7741	11,5	10	3,2572	20,9
46	1,7799	2,53	80. 0′	2,5014	6,9	20	2,7856	12,1	20	3,2781	21,0
47	1,7951	2,53	10	2,5083	7,0	30	2,7977	12,1	30	3,2991	
48	1,8103	2,53	20	2,5153	7,0	40	2,8098	12,3			
49	1,8255	2,53	30	2,5223	7,0	50	2,8221	12,8			
50	1,8407	2,56	40	2,5293	7,2	86. 0	2,8349				
51	1,8561	2,58	50	2,5365	7,4						
52	1,8716	2,60	81. 0	2,5439							
53	1,8872	2,61									
54	1,9029										

TABLE IX.

Conversion des hauteurs barométriques ordinaires, en hauteurs métriques.

BAROMÈTRE.

FRANÇAIS.		ANGLAIS.	
po. lig.	m.	po. dix.	m.
26 0	0,7038	27. 5	0,6983
1	0,7061	6	0,7008
2	0,7083	7	0,7033
3	0,7106	8	0,7059
4	0,7129	9	0,7084
5	0,7151	28. 0	0,7110
6	0,7174	1	0,7135
7	0,7196	2	0,7161
8	0,7219	3	0,7186
9	0,7242	4	0,7211
10	0,7264	5	0,7237
11	0,7287	6	0,7262
27. 0	0,7309	7	0,7287
1	0,7332	8	0,7313
2	0,7354	9	0,7338
3	0,7377	29. 0	0,7363
4	0,7400	1	0,7389
5	0,7422	2	0,7414
6	0,7445	3	0,7440
7	0,7467	4	0,7465
8	0,7490	5	0,7490
9	0,7512	6	0,7516
10	0,7535	7	0,7541
11	0,7558	8	0,7567
28. 0	0,7580	9	0,7592
1	0,7603	30. 0	0,7617
2	0,7625	1	0,7643
3	0,7648	2	0,7668
4	0,7670	3	0,7694
5	0,7693	4	0,7719
6	0,7716	5	0,7744
7	0,7738	6	0,7770
8	0,7761	7	0,7795
9	0,7783	8	0,7821
10	0,7806	9	0,7846
11	0,7829	31. 0	0,7871
29. 0	0,7851		
	Diff. 22,6		Diff. 25,4

Conversion des degrés du Thermomètre de 80° en degrés du Thermomètre centig.

THERMOMÈTRE.

RÉAUMUR.	CENTIGRADE.	RÉAUMUR.	CENTIGRADE.
0	0,00	40	50,00
1	1,25	41	51,25
2	2,50	42	52,50
3	3,75	43	53,75
4	5,00	44	55,00
5	6,25	45	56,25
6	7,50	46	57,50
7	8,75	47	58,75
8	10,00	48	60,00
9	11,25	49	61,25
10	12,50	50	62,50
11	13,75	51	63,75
12	15,00	52	65,00
13	16,25	53	66,25
14	17,50	54	67,50
15	18,75	55	68,75
16	20,00	56	70,00
17	21,25	57	71,25
18	22,50	58	72,50
19	23,75	59	73,75
20	25,00	60	75,00
21	26,25	61	76,25
22	27,50	62	77,50
23	28,75	63	78,75
24	30,00	64	80,00
25	31,25	65	81,25
26	32,50	66	82,50
27	33,75	67	83,75
28	35,00	68	85,00
29	36,25	69	86,25
30	37,50	70	87,50
31	38,75	71	88,75
32	40,00	72	90,00
33	41,25	73	91,25
34	42,50	74	92,50
35	43,75	75	93,75
36	45,00	76	95,00
37	46,25	77	96,25
38	47,50	78	97,50
39	48,75	79	98,75
40	50,00	80	100,00

TABLE X.

Parallaxe du Soleil, en supposant 8″,8 pour la moyenne.

DISTANCE au zénith.	HAUTEUR.	1er JANVIER.	1er FÉVRIER décembre.	1er MARS novembre.	1er AVRIL octobre.	1er MAI septembre.	1er JUIN août.	1er JUILLET.
0°	90°	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00
4	86	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61	0,60
8	82	1,25	1,24	1,23	1,22	1,21	1,21	1,20
12	78	1,86	1,85	1,84	1,83	1,81	1,80	1,80
16	74	2,47	2,46	2,44	2,43	2,41	2,39	2,38
20	70	3,06	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96
24	66	3,64	3,63	3,61	3,58	3,55	3,53	3,52
28	62	4,20	4,19	4,16	4,13	4,10	4,07	4,06
32	58	4,74	4,73	4,70	4,66	4,63	4,59	4,58
36	54	5,26	5,25	5,21	5,17	5,13	5,09	5,08
40	50	5,75	5,74	5,70	5,66	5,61	5,57	5,56
44	46	6,22	6,20	6,16	6,11	6,06	6,02	6,01
48	42	6,65	6,64	6,59	6,54	6,49	6,44	6,43
52	38	7,05	7,04	6,99	6,93	6,88	6,83	6,82
56	34	7,42	7,40	7,35	7,29	7,24	7,19	7,17
58	32	7,59	7,57	7,52	7,46	7,40	7,35	7,33
60	30	7,75	7,73	7,68	7,62	7,56	7,51	7,49
62	28	7,90	7,88	7,83	7,77	7,71	7,65	7,63
64	26	8,04	8,03	7,97	7,91	7,85	7,79	7,77
66	24	8,17	8,16	8,10	8,04	7,97	7,92	7,90
68	22	8,30	8,28	8,22	8,16	8,09	8,04	8,02
70	20	8,41	8,39	8,33	8,27	8,20	8,15	8,13
72	18	8,51	8,49	8,44	8,37	8,30	8,25	8,23
74	16	8,60	8,58	8,53	8,46	8,39	8,33	8,31
76	14	8,68	8,66	8,61	8,54	8,47	8,41	8,39
78	12	8,75	8,73	8,67	8,61	8,54	8,48	8,46
80	10	8,81	8,79	8,73	8,67	8,60	8,54	8,52
82	8	8,86	8,84	8,78	8,71	8,64	8,58	8,56
84	6	8,90	8,88	8,82	8,75	8,68	8,62	8,60
86	4	8,92	8,90	8,84	8,77	8,70	8,64	8,62
88	2	8,94	8,92	8,86	8,79	8,72	8,66	8,64
90	0	8,95	8,93	8,87	8,80	8,73	8,67	8,65

TABLE XI.

Angles de la verticale, pour $0,00324 = \frac{1}{309}$.

LAT.	ANGLES.	DIFF.	LAT.	ANGLES.	DIFFÉR.	LAT.	ANGLES.	DIFF.
0	0′ 0″0	23,3	30	9′ 38″8	11,3	60	9′ 40″6	11,9
1	0.23,3	23,2	31	9.50,1	10,7	61	9.28,7	12,7
2	0.46,5	23,3	32	10. 0,8	9,9	62	9.16,0	13,4
3	1. 9,8	23,1	33	10.10,7	9,2	63	9. 2,6	14,0
4	1.32,9	22,9	34	10.19,9	8,4	64	8.48,6	14,7
5	1.55,8		35	10.28,3		65	8.33,9	
—	—	23,0	—	—	7,7	—	—	15,3
6	2.18,8	22,6	36	10.36,0	6,9	66	8.18,6	16,0
7	2.41,4	22,5	37	10.42,9	6,1	67	8. 2,6	16,5
8	3. 3,9	22,4	38	10.49,0	5,4	68	7.46,1	17,1
9	3.26,3	21,9	39	10.54,4	4,4	69	7.29,0	17,6
10	3.48,2		40	10.58,8		70	7.11,4	
—	—	21,8	—	—	3,8	—	—	18,2
11	4.10,0	21,5	41	11. 2,6	2,9	71	6.53,2	18,7
12	4.31,5	21,0	42	11. 5,5	2,1	72	6.34,5	19,2
13	4.52,5	20,9	43	11. 7,6	1,3	73	6.15,3	19,6
14	5.13,4	20,4	44	11. 8,9	+ 0,5	74	5.55,7	20,1
15	5.33,8		45	11. 9,4		75	5.35,6	
—	—	19,9	—	—	− 0,3	—	—	20,4
16	5.53,7	19,6	46	11. 9,1	1,1	76	5.15,2	20,9
17	6.13,3	19,2	47	11. 8,0	2,1	77	4.54,3	21,2
18	6.32,5	18,5	48	11. 5,9	2,7	78	4.33,1	21,5
19	6.51,0	18,2	49	11. 3,2	3,6	79	4.11,6	22,0
20	7. 9,2		50	10.59,6		80	3.49,6	
—	—	17,6	—	—	4,4	—	—	22,1
21	7.26,8	17,1	51	10.55,2	5,2	81	3 27,5	22,4
22	7.43,9	16,5	52	10.50 0	5,9	82	3. 5,1	22,7
23	8. 0,4	16,0	53	10.44,1	6,9	83	2.42,4	22,8
24	8.16,4	15,3	54	10 37,2	7,5	84	2.19,6	23,0
25	8.31,7		55	10.29,7		85	1 56,6	
—	—	14,7	—	—	8,2	—	—	23,1
26	8.46,4	14,2	56	10.21,5	9,2	86	1.33,5	23,3
27	9. 0,6	13,4	57	10.12,3	9,7	87	1.10,2	23,3
28	9.14,0	12,7	58	10. 2,6	10,7	88	0.46,9	23,4
29	9.26,7	12,1	59	9.51,9	11,3	89	0 23,5	23,5
30	9.38,8		60	9.40,6		90	0. 0,0	

TABLE XII.

Fractions de l'année.

MOIS.	JOURS.	FRACT.	MOIS.	JOURS.	FRACT.	MOIS.	JOURS.	FRACT.
Janvier.	1	0,000	Mai.	1	0,329	Septembre.	1	0,666
	4	008		2	331		2	668
	8	019		4	337		4	674
	12	030		8	348		6	679
	16	041		10	353		10	690
	18	046		14	364		12	695
	21	056		18	375		15	704
	23	060		21	383		18	712
	26	068		24	392		22	723
	28	074		26	397		26	734
	30	079		30	408		30	745
Février.	2	0,088	Juin.	2	0,416	Octobre.	2	0,750
	4	093		4	422		4	756
	8	104		6	427		6	760
	10	109		8	433		9	770
	13	118		10	438		12	778
	16	125		14	449		14	783
	18	131		18	460		18	794
	20	137		20	465		20	800
	22	142		23	473		22	805
	26	153		25	479		24	810
	28	159		28	487		26	816
				30	493		30	827
Mars.	2	0,164	Juillet.	1	0,496	Novembre.	1	0,832
	4	170		4	504		4	841
	6	175		6	509		6	846
	8	181		8	515		10	857
	10	186		10	520		14	868
	14	197		14	531		16	874
	16	203		16	537		18	879
	18	208		18	542		21	888
	22	219		22	553		24	895
	25	227		26	564		26	901
	27	233		28	570		29	910
	30	241		30	575			
Avril.	1	0,246	Août.	1	0,581	Décembre.	1	0,915
	3	252		3	586		4	923
	6	260		6	594		6	929
	9	268		9	602		8	934
	11	274		12	610		10	940
	14	282		14	616		12	945
	17	290		16	622		16	956
	19	296		18	627		18	962
	22	304		22	638		20	967
	25	312		24	644		22	972
	28	320		26	649		25	981
	30	326		29	657		27	986
							30	995

TABLE XIII.

Positions moyennes de 30 étoiles, rapportées au 1er janvier 1840.

NOMS ET GRANDEURS des étoiles.		ASCENSION DROITE moyenne en temps.	VARIATION annuelle.	DÉCLINAISON moyenne.	VARIATION annuelle.
γ Pégase	2.3	0h 5m 0s11	+ 3s075	B 14°17′38″50	+ 20″039
α Polaire	2.3	1. 2.10,32	15,478	88.27.22,43	+ 19,299
α Baleine	2.3	2.53.55,13	3,123	3.27.30,80	+ 14,575
Aldébaran	1	4.26.44,32	3,423	16.11. 0,10	+ 7,979
La Chèvre	1	5. 4.52,33	4,402	45.49.40,67	+ 4,837
Rigel	1	5. 6.50,89	2,876	A 8.23.28,22	− 4,647
β Taureau	2	5.16.10,76	3,779	B 28.27.56,59	+ 3,863
α Orion	1	5.46.30,59	3,241	7.22.16,39	+ 1,226
Canopus	1	6.20.23,86	1,327	A 52.36 45,12	+ 1,762
Sirius	1	6.38. 5,70	2,643	A 16.30. 2,92	+ 4,418
α Castor	2.3	7.24.22,85	3,856	B 32.13.59,26	− 7,161
α Procyon	1.2	7.30.55,28	3,143	5.37.53,07	− 8,682
β Pollux	2	7.35.30,60	3,682	28.24.24,63	− 8,064
α Hydre	2	9.19.43,17	2,948	A 7.58. 3,88	+ 15,310
α Régulus	1	9.59.50,50	3,221	B 12.44.51,56	− 17,327
α grande Ourse	1.2	10.53.47,87	3,811	62.36.47,98	− 19,196
β Lion	2.3	11.40.53,41	3,064	15.28. 4,61	− 19,969
α Vierge	1	13.16.46,18	3,147	A 10.19.22,57	+ 18,944
α Dragon	3.4	14. 0 2,82	1,625	B 65. 8.32,15	− 17,367
Arcturus	1	14. 8.21,60	2,731	20. 1. 9,57	− 18,962
β petite Ourse	3	14.51.14,44	− 0,286	74.48.28,86	− 14,701
Antarès	1	16.19.36,62	+ 3,659	A 26. 4. 9,65	+ 8,550
α Ophiuchus	2	17.27.30,13	2,770	B 12.41. 2,64	− 2,872
δ Petite Ourse	3	18.23.53,03	− 19,241	86.35.27,93	+ 2,085
α Lyre	1	18.31.30,87	+ 2,010	38.38.17,52	+ 2,718
α Aigle	1.2	19.42.58,43	2,924	8.27. 3,86	+ 8,667
α Cygne	1	20.35.58,29	2,040	44.42.43,63	+ 12,588
Fomalhaut	1	22.48.47,45	3,311	A 30.28. 3,20	− 19,068
α Pégase	2	22.56.47,46	2,975	B 14.20.49,39	+ 19,273
α Andromède	1	0. 0. 7,26	3,067	28.12.27,08	+ 20,043

TABLE XIV.

Aberrations et nutations de 30 étoiles.

NOMS des Étoiles.	EN ASCENSION DROITE ET EN TEMPS. Aberration. Argument.	Maximum.	Nutation. Argument.	Maximum.	EN DÉCLINAISON. Aberration. Argument.	Maximum.	Nutation. Argument.	Maximum.
γ Pégase (*Algenib*).	$8^{s}28^{\circ}47'$	0,1087	$6^{s}8^{\circ}24'$	0,0300	$7^{s}28^{\circ}12'$	0,9657	$5^{s}28^{\circ}30'$	0,8381
α Polaire.......	8.13. 8	1,6653	8.15.41	1,3638	5.16.17	1,3027	5. 9.31	0,8572
α Baleine......	7.14.11	0,1149	6. 1,26	0,0322	8.23. 8	0,8678	4. 8.16	0,9078
Aldébaran......	6.21.43	0,1447	6. 3.27	0,0726	7.23.12	0,5760	3.17.54	0,9502
La Chèvre......	6.12.51	0,2875	6. 5.46	0,1830	3.25 37	0,9112	3.10.29	0,9605
β Rigel........	6.12.14	0,1333	5.28.47	0,0036	3. 3.40	1,0270	9. 9.58	0,9679
β Taureau......	6.10 13	0,1873	6. 2.52	0,1098	4.19.21	0,3917	3. 8.19	0,9626
α Orion........	6. 3,13	0,1361	6. 0.15	0,0481	8.28.23	0,7521	3. 2.37	0,9657
Canopus........	5.25.22	0,3491	6. 8.46	9,6679	2.25.53	1,5960	8.26 15	0,9657
Sirius.........	5.21.15	0,1477	6. 1.52	9,9728	2.25.48	1,1130	8.22.53	0,9704
α Castor.......	5.10.40	0,2010	5.24. 2	0,1257	1. 2.17	0,6620	2.14. 6	0,6535
α Procyon......	5. 9. 6	0,1297	5.28.47	0,0414	9. 6.54	0,8071	2 12.47	0,9513
β Pollux.......	5. 8. 2	0,1829	5.24. 2	0,1114	0.14.32	0,6052	2.11.53	0,9499
α Hydre........	4.12.39	0,1158	6. 3.41	0,0081	2.17.31	0,9967	7.18.37	0,9007
α Régulus......	4 2.22	0,1162	5.23.47	0,0480	10. 3 47	0,8457	1. 7.59	0,8782
α grande Ourse..	3.18. 7	0,4366	4.18.58	0,2407	0. 3.28	1,2394	0.21.57	0,8520
β Lion.........	3. 5.21	0,1117	5.20.56	0,0344	10. 6.20	0,9621	0. 6.35	0,8393
α Vierge (*Épi*)...	2. 9.22	0,1066	6. 5.51	0,0154	2. 3.31	0,8862	5. 5. 6	0,8559
α Dragon.......	1.27.53	0,4824	3.25.50	0,1090	10.23.28	1,2995	10.22.16	0,8777
Arcturus.......	1.25.39	0,1313	5.18.53	0,0016	9.28.12	1,0945	10.19.54	0,8894
β petite Ourse...	1.14.43	0.6927	2.26.52	0,2294	10.15. 5	1,3064	10. 8.48	0,9135
Antarès.......	0 23.24	0,1728	6. 5.49	0,1029	11.27.59	0,5816	3.19.21	0,9478
α Ophiuchus.....	0. 7.34	0,1427	5.28.48	9,9803	9. 3. 4	1,0786	9. 6. 9	0,9642
δ petite Ourse..	11.24.31	1,3559	11.20.45	0,8328	8.23.39	1,2797	8.25.33	0,9720
α Lyre (*Vega*)....	11.22.50	0,2393	6. 5.31	9,8436	8.24.29	1,2545	8.24.10	0,9644
α Aigle (*Ataïr*)...	11. 6.15	0,1309	6. 2.16	9,9988	8.22.59	1,0237	8.10.21	0,9472
α Cygne........	10.23.29	0,2668	6.28.32	9,9042	8. 0.39	1,2634	7.29. 0	0,9242
Fomalhaut.......	9.19.26	0,1638	5.13. 8	0,0765	5. 7.34	1,0271	0.23.30	0,8540
α Pégase (*Markab*)	9.17.17	0,1120	6. 8.23	0,0157	8 2. 5	1,0138	6.20.58	0,8508
α Andromède....	9. 0. 6	0,1495	6.17.20	0,0444	7. 6.42	1,0785	6. 0. 8	0,8380

SUITE DE LA TABLE XIV.

Aberrations et Nutations de 6 Étoiles.

		POLAIRE.				β PETITE OURSE.			
ANNÉES.		EN ASCENSION DROITE ET EN TEMPS.		EN DÉCLINAISON.		EN ASC. DROITE ET EN TEMPS.		EN DÉCLINAISON.	
1830	aberrat.	8ˢ13°51′	1,65044	5ˢ16°55′	1,30296	1ˢ14°42′	0,69382	10ˢ15° 5′	1,30644
	nut. ☾	8.16. 7	1,34971	5.10.22	0,85624	2.26.46	0,23053	10. 8.47	0,91361
	nut. ☉	8.13. 3	0,10340	5.13.51	9,68565	2.26. 0	8,97818	10.14.43	9,70107
1840	aberrat.	8.13. 8	1,66530	5.16.17	1,30275	1.14.43	0,69270	10.15. 5	1,30643
	nut. ☾	8.15.41	1,36379	5. 9.31	0,85722	2.26.52	0,22939	10. 8.48	0,91355
	nut. ☉	8.12.33	0,11781	5.18. 8	9,68588	2.26. 9	8,97687	10.14.43	9,70105
1850	aberrat.	8.12.22	1,68108	5.15.36	1,30252	1.14.44	0,69152	10.15. 5	1,30645
	nut. ☾	8.15.14	1,37866	5. 8.37	0,85827	2.26.59	0,22818	10. 8.48	0,91358
	nut. ☉	8.12. 1	0,13313	5.12.22	9,68614	2.26.17	8,97565	10.14.44	9,70105
1860	aberrat.	8.11.34	1,69703	5.14.53	1,30226	1.14.45	0,69041	10.15. 5	1,30644
	nut. ☾	8.14.31	1,39408	5. 7.40	0,85947	2.27. 5	0,22687	10. 8.49	0,91353
	nut. ☉	8.11.26	0,14859	5.11.33	9,68643	2.26.25	8,97434	10.14.45	9,70104

		δ PETITE OURSE.			
1830	aberrat.	11.23.47	1,3549	8.22.49	1,2799
	nut. ☾	11.19.31	0,8327	8.24.57	0,9717
	nut. ☉	11.21.27	9,6681	8.23.47	9,7199
1840	aberrat.	11.24.31	1,3559	8.23.39	1,2797
	nut. ☾	11.20.45	0,8328	8.25.33	0,9720
	nut. ☉	11.22.28	9,6689	8.24.31	9,7200
1850	aberrat.	11.25.16	1,3565	8.24.31	1,2796
	nut. ☾	11.21.59	0,8328	8.26. 9	0,9722
	nut. ☉	11.23.29	9,6693	8.25.16	9,7201
1860	aberrat.	11.26. 0	1,3568	8.25.22	1,2795
	nut. ☾	11.23.14	0,8329	8.26.45	0,9726
	nut. ☉	11.24.30	9,6692	8.26. 0	9,7201

ARCTURUS (1840).			
1.25.39	0,13130	9.28.12	1,09450
5.18.53	0,00157	10.19.54	0,88942
5.20.57	8,83673	10.25.39	9,69419

RIGEL (1840).			
6.12.14	0,13330	3. 3.40	1,026[illegible]8
5.28.47	0,00362	9 9.58	0,96791
5.29.13	8,84148	9.12.13	9,71860

SIRIUS (1840).			
5.21.15	0,14775	2.25.48	1,11303
6. 1.52	9,97280	8.22.53	0,97044
6.14.52	8,82529	8.21.15	9,71952

TABLE XV.

PREMIÈRE PARTIE.

Servant à faciliter la construction des Tables de réduction au méridien pour les étoiles.

ANG. HORAIRE de l'étoile, en temps.	DIFFÉR. LOG $\sin^2 \frac{1}{2}P$.	ANG. HORAIRE de l'étoile, en temps.	DIFFÉR. LOG. $\sin^2 \frac{1}{2}P$.	ANG. HORAIRE de l'étoile, en temps.	DIFFÉR. LOG. $\sin^2 \frac{1}{2}P$.	ANG. HORAIRE de l'étoile, en temps.	DIFFÉR. LOG $\sin^2 \frac{1}{2}P$.	ANG. HORAIRE de l'étoile, en temps.	DIFFÉR. LOG. $\sin^2 \frac{1}{2}P$.
$0^m\ 0^s$		$8^m\ 0^s$	1829	$16^m\ 0^s$	909	$24^m\ 0^s$	605	$32^m\ 0^s$	455
10	3,12127	10	1791	10	900	10	601	10	450
20	60206	20	1754	20	890	20	596	20	448
30	35218	30	1720	30	881	30	592	30	446
40	24988	40	1687	40	873	40	589	40	444
50	19382	50	1654	50	864	50	584	50	441
1. 0	15836	9. 0	1623	17. 0	855	25. 0	580	33. 0	439
10	13390	10	1594	10	847	10	577	10	437
20	11598	20	1565	20	839	20	573	20	435
30	10231	30	1537	30	831	30	569	30	432
40	9151	40	1510	40	823	40	565	40	439
50	8279	50	1485	50	815	50	562	50	429
2. 0	7557	10. 0	1460	18. 0	808	26. 0	558	34. 0	426
10	6943	10	1435	10	800	10	554	10	424
20	6436	20	1412	20	792	20	551	20	422
30	5993	30	1388	30	786	30	547	30	419
40	5606	40	1369	40	779	40	544	40	418
50	5265	50	1347	50	775	50	541	50	416
3. 0	4965	11. 0	1326	19. 0	765	27. 0	537	35. 0	414
10	4696	10	1306	10	758	10	534	10	411
20	4455	20	1286	20	752	20	531	20	410
30	4238	30	1268	30	745	30	527	30	408
40	4041	40	1249	40	738	40	524	40	406
50	3861	50	1232	50	732	50	521	50	404
4. 0	3696	12. 0	1215	20. 0	727	28. 0	518	36. 0	403
10	3536	10	1198	10	720	10	515	10	400
20	3417	20	1181	20	715	20	512	20	399
30	3278	30	1166	30	708	30	508	30	396
40	3158	40	1150	40	703	40	506	40	395
50	3048	50	1135	50	697	50	503	50	393
5. 0	2945	13. 0	1120	21. 0	692	29. 0	500	37. 0	391
10	2848	10	1107	10	686	10	497	10	390
20	2757	20	1092	20	681	20	494	20	387
30	2673	30	1079	30	675	30	492	30	386
40	2593	40	1065	40	671	40	489	40	385
50	2517	50	1053	50	665	50	486	50	383
6. 0	2447	14. 0	1040	22. 0	660	30. 0	483	38. 0	381
10	2380	10	1027	10	655	10	480	10	379
20	2316	20	1016	20	650	20	478	20	378
30	2256	30	1004	30	645	30	475	30	376
40	2199	40	992	40	641	40	473	40	374
50	2145	50	981	50	636	50	470	50	372
7. 0	2093	15. 0	970	23. 0	631	31. 0	468	39. 0	371
10	2043	10	960	10	627	10	465	10	370
20	1997	20	949	20	622	20	462	20	368
30	1952	30	938	30	618	30	460	30	366
40	1909	40	929	40	613	40	458	40	365
50	1867	50	919	50	609	50	455	50	363
8. 0	1829	16. 0	909	24. 0	605	32. 0	453	40. 0	362

TABLE XV.

DEUXIÈME PARTIE,

Servant à faciliter la construction des Tables de réduction au méridien pour les étoiles.

ANGLES HORAIRES de l'étoile en temps.	DIFFÉRENCE LOGARITHM. $\sin^4 \frac{1}{2}$P.
0h 0m	0,00000
1	9,35514
2	1,20412
3	70436
4	49974
5	38764
6	31670
7	28778
8	23194
9	20458
10	18302
11	16554
12	15112
13	13900
14	12872
15	11980
16	11208
17	10526
18	9926
19	9386
20	8906
21	8470
22	8076
23	7714
24	7388
25	7084
26	6808
27	6548
28	6310
29	6088
30	5882
31	5688
32	5506
33	5336
34	5178
35	5026
36	4884
37	4748
38	4624
39	4500
40	4388

On a vu, page 166, comment on forme les logarithmes constants *a* et *b* pour les Tables de réduction au méridien; c'est à ces logarithmes constants qu'il faut ajouter les différences logarithmiques de $\sin^2 \frac{1}{2}$P, et $\sin^4 \frac{1}{2}$P: voici un exemple de ces calculs.

Calculs pour le passage supérieur de la Polaire (11 décembre 1796).

	Log. *a*........	4,12093
	Différ. log. pour 10s.......	3,12127
0″0071		7,24220
	20........	60620
0,0017		7,84840
	30.......	35218
0,0159		8,20058
	40........	24988
0,0282		8,45046
	50........	19382
0,0441		8,64428
1m	0........	15836
0,0635		8,80264
1m	10........	13390
0,0864		8,93654
1m	20........	11598
0,1128		9,05252
1m	30........	10231
0,1428		9,15483
1m	40........	9151
0,1763		9,24634
1m	50........	8279
0,2133		9,32913
		etc.

	Log. *b*........	2,67124
	Diff. log. pour 1m.	9,35514
0″0000		2,02638
	2........	1,20412
0,0000		3,23050
	3	70436
0,0000		3,93486
	4........	49974
0,0000		4,43460
	5........	38764
0,0000		4,82224
	6	31670
0,0000		3,13894
	7........	26778
0,0000		5,40672
	8........	23194
0,0000		5,63866
	9........	20458
0,0001		5,84324
	10........	18302
0,0001		6,02626
		etc.

On aura ainsi, par des additions successives, les logarithmes des deux nombres dont la réunion formera chaque terme de la Table.

Le second terme est si petit, que c'est ici, vers 9m, qu'il commence à valoir à peu près 0″,0001; il varie peu dans l'intervalle de 1m; on l'étendra aux dizaines de seconde par une interpolation facile.

Pour les signes des deux nombres de chaque terme de la Table, *voyez* page 164.

TABLE XVI.

Réduction au méridien pour les Observations faites au cercle de Borda.

1er *terme.* — ARGUMENT : *Angle horaire en temps.*

Nota. Si l'angle horaire surpasse 15m59s, prenez-en moitié et quadruplez la réduct. correspondante, pour avoir la réduct. cherchée.

Sec.	0m	1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m	9m	10m	11m	12m	13m	14m	15m
0s	0″0	2″0	7″8	17″7	31″4	49″1	70″7	96″2	125″7	159″0	196″3	237″5	282″7	331″8	384″7	441″6
1	0,0	2,0	8,0	17,9	31,7	49,4	71,1	96,9	126,2	159,6	197,0	238,3	283,5	332,6	385,6	442,6
2	0,0	2,1	8,1	18,1	31,9	49,7	71,5	97,1	126,7	160,2	197,6	239,0	284,2	333,4	386,5	443,6
3	0,0	2,2	8,2	18,3	32,2	50,1	71,9	97,6	127,2	160,8	198,3	239,7	285,0	334,3	387,5	444,6
4	0,0	2,2	8,4	18,5	32,5	50,4	72,3	98,1	127,8	161,4	198,9	240,4	285,8	335,3	388,4	445,6
5	0,0	2,3	8,5	18,7	32,7	50,7	72,7	98,5	128,3	162,0	199,6	241,2	286,6	336,0	389,3	446,5
6	0,0	2,4	8,7	18,9	33,0	51,1	73,1	99,0	128,8	162,6	200,3	241,9	287,4	336,9	390,2	447,5
7	0,0	2,4	8,8	19,1	33,3	51,4	73,5	99,4	129,4	163,2	200,9	242,6	288,2	337,7	391,1	448,5
8	0,0	2,5	8,9	19,3	33,5	51,7	73,9	99,9	129,9	163,8	201,6	243,3	289,0	338,6	392,1	449,5
9	0,0	2,6	9,1	19,5	33,8	52,1	74,3	100,4	130,4	164,4	202,2	244,1	289,8	339,4	393,0	450,5
10	0,1	2,7	9,2	19,7	34,1	52,4	74,7	100,8	131,0	165,0	202,9	244,8	290,6	340,3	393,9	451,5
11	0,1	2,7	9,4	19,9	34,4	52,7	75,1	101,3	131,5	165,6	203,9	245,5	291,4	341,2	394,8	452,5
12	0,1	2,8	9,5	20,1	34,6	53,1	75,5	101,8	132,0	166,2	204,2	246,2	292,2	342,0	395,8	453,5
13	0,1	2,9	9,6	20,3	34,9	53,4	75,9	102,3	132,6	166,8	204,9	247,0	293,0	342,9	396,7	454,5
14	0,1	3,0	9,8	20,5	35,2	53,8	76,3	102,7	133,1	167,4	205,6	247,7	293,8	343,7	397,6	455,5
15	0,1	3,1	9,9	20,7	35,5	54,1	76,7	103,2	133,6	168,0	206,3	248,5	294,6	344,6	398,6	456,5
16	0,1	3,1	10,1	20,9	35,7	54,5	77,1	103,7	134,2	168,6	206,9	249,2	295,4	345,5	399,5	457,5
17	0,2	3,2	10,2	21,2	36,0	54,8	77,5	104,2	134,7	169,2	207,6	249,9	296,2	346,3	400,5	458,5
18	0,2	3,3	10,4	21,4	36,3	55,1	77,9	104,6	135,3	169,8	208,3	250,7	297,0	347,2	401,4	459,5
19	0,2	3,4	10,5	21,6	36,6	55,5	78,3	105,1	135,8	170,4	208,9	251,4	297,8	348,1	402,3	460,5
20	0,2	3,5	10,7	21,8	36,9	55,8	78,8	105,6	136,4	171,4	209,6	252,2	298,6	349,0	403,3	461,5
21	0,3	3,6	10,8	22,0	37,2	56,2	79,2	106,0	136,9	171,1	210,3	252,9	299,4	349,8	404,2	462,5
22	0,3	3,7	11,0	22,3	37,4	56,5	79,6	106,6	137,4	172,8	211,0	253,6	300,2	350,7	405,1	463,5
23	0,3	3,8	11,1	22,5	37,7	56,9	80,0	107,0	138,0	172,5	211,6	254,4	301,0	351,6	406,1	464,5
24	0,3	3,8	11,3	22,7	38,0	57,3	80,4	107,5	138,5	173,2	212,3	255,1	301,8	352,5	407,0	465,5
25	0,3	3,9	11,5	22,9	38,2	57,6	80,8	108,0	139,1	174,1	213,0	255,9	302,6	353,3	408,0	466,5
26	0,4	4,0	11,6	23,1	38,6	58,0	81,3	108,5	139,6	174,7	213,7	256,6	303,5	354,2	408,9	467,5
27	0,4	4,1	11,8	23,4	38,9	58,3	81,7	109,0	140,2	175,3	214,4	257,4	304,3	355,1	409,9	468,5
28	0,4	4,2	11,9	23,6	39,2	58,7	82,1	109,5	140,7	175,9	215,1	258,1	305,1	356,0	410,8	469,5
29	0,5	4,3	12,1	23,8	39,5	59,0	82,5	110,0	141,3	176,6	215,8	258,9	305,9	356,9	411,7	470,5
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0	110,4	141,8	177,2	216,4	259,6	306,7	357,7	412,7	471,5
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4	110,9	142,4	177,8	217,1	260,4	307,5	358,6	413,6	472,6
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8	111,4	143,0	178,4	217,8	261,1	308,4	359,5	414,6	473,6
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,5	84,2	111,9	143,5	179,0	218,3	261,9	309,2	360,5	415,6	474,6
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7	112,4	144,1	179,7	219,2	262,6	310,0	361,1	416,6	475,6
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1	112,9	144,6	180,3	219,9	263,4	310,8	362,2	417,5	476,6
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,5	113,4	145,2	180,9	220,6	264,1	311,6	363,1	418,4	477,6
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61,9	86,0	113,9	145,8	181,6	221,3	264,9	312,5	363,9	419,4	478,7
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4	114,4	146,3	182,2	222,0	265,7	313,3	364,6	420,3	479,7
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8	114,9	146,9	182,8	222,7	266,4	314,2	365,7	421,3	480,7
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3	115,4	147,5	183,4	223,4	267,2	315,0	366,6	422,2	481,7
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7	115,9	148,0	184,1	224,1	267,9	315,8	367,5	423,2	482,8
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1	116,4	148,6	184,7	224,8	268,7	316,6	368,4	424,2	483,8
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6	116,9	149,2	185,4	225,5	269,5	317,4	369,3	425,1	484,8
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0	117,4	149,7	186,0	226,2	270,2	318,3	370,2	426,1	485,8
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5	117,9	150,3	186,6	226,9	271,0	319,1	371,1	427,0	486,9
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9	118,4	150,9	187,3	227,6	271,8	319,9	372,0	428,0	487,9
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3	118,9	151,5	187,9	228,3	272,6	320,8	372,9	429,0	488,9
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	90,8	119,5	152,0	188,5	229,0	273,3	321,6	373,8	430,0	490,0
49	1,3	6,5	15,6	28,6	45,5	66,4	91,2	120,0	152,6	189,2	229,7	274,1	322,4	374,7	430,9	491,0
50	1,4	6,6	15,8	28,8	45,9	66,8	91,7	120,5	153,2	189,8	230,4	274,9	323,3	375,6	431,9	492,0
51	1,4	6,7	15,9	29,1	46,2	67,2	92,1	121,0	153,8	190,5	231,1	275,6	324,1	376,5	432,8	493,1
52	1,5	6,8	16,1	29,4	46,5	67,6	92,6	121,5	154,4	191,1	231,8	276,4	325,0	377,4	433,8	494,1
53	1,5	7,0	16,3	29,6	46,8	68,0	93,0	122,0	154,9	191,8	232,5	277,2	325,8	378,3	434,8	495,2
54	1,6	7,1	16,5	29,9	47,1	68,3	93,5	122,5	155,5	192,4	233,3	278,0	326,7	379,2	435,7	496,2
55	1,6	7,2	16,7	30,1	47,5	68,7	93,9	123,1	156,1	193,1	234,0	278,9	327,5	380,2	436,7	497,2
56	1,7	7,3	16,9	30,4	47,8	69,1	94,4	123,6	156,7	193,7	234,7	279,5	328,4	381,1	437,7	498,2
57	1,8	7,5	17,1	30,6	48,1	69,5	94,8	124,1	157,3	194,4	235,4	280,3	329,2	382,0	438,7	499,2
58	1,8	7,6	17,3	30,9	48,4	69,9	95,3	124,6	157,0	195,0	236,1	281,1	330,0	382,9	439,6	500,3
59	1,9	7,7	17,5	31,1	48,8	70,3	95,7	125,1	158,7	195,7	236,8	281,9	330,9	383,8	440,6	501,4

TABLE XVI.

2[e] *terme.* — ARGUMENT : *Angle horaire en temps.*

M. S.	S.	DIFFÉRENCE.	M. S.	S.	DIFFÉRENCE.	M. S.	S.	DIFFÉRENCE.
0m 0s	0″000		8m 10s	0″041	4	12m 10s	0″205	12
1 0	0,000		20	0,045	4	20	0,217	12
2 0	0,000		30	0,049	4	30	0,229	12
3 0	0,001		40	0,053	4	40	0,241	13
4 0	0,002		50	0,057	4	50	0,254	13
5 0	0,006		9. 0	0,061		13. 0	0,267	
					5			14
10	0,007		10	0,066	5	10	0,281	14
20	0,008		20	0,071	5	20	0,295	15
30	0,009		30	0,076	5	30	0,310	16
40	0,010		40	0,081	6	40	0,326	16
50	0,011		50	0,087	6	50	0,342	17
6. 0	0,012		10. 0	0,093		14. 0	0,359	
					7			17
10	0,013		10	0,100	7	10	0,376	18
20	0,014		20	0,107	7	20	0,394	19
30	0,016		30	0,114	7	30	0,413	19
40	0,018		40	0,121	8	40	0,432	20
50	0,020		50	0,129	8	50	0,452	21
7. 0	0,022		11. 0	0,137		15. 0	0,473	
					8			21
10	0,024		10	0,145	9	10	0,494	22
20	0,026		20	0,154	9	20	0,516	23
30	0,029		30	0,163	10	30	0,539	24
40	0,032		40	0,173	10	40	0,563	24
50	0,035		50	0,183	11	50	0,587	25
8. 0	0,038		12. 0	0,194		16. 0	0,612	

Le second terme du Tableau de la page 175, donné par cette Table, est toujours additif; au lieu que le premier terme fourni par la Table précédente, n'est additif que dans les passages inférieurs des étoiles circompolaires.

Si l'angle horaire donné excède ceux de cette Table, prenez-en la moitié pour argument, et multipliez le nombre correspondant par 16, le produit sera la réduction cherchée.

TABLE XVII.

Pour le calcul des latitudes par la Polaire observée hors du méridien.

T	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.	T	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.
$0^h 0^m$					$0^h 30^m$	2,6159		7,1217	
1	9,6642		4,1737		31	2,6443	284	7,1498	281
2	0,2662		4,7757		32	2,6717	274	7,1770	272
3	0,6184		5,1279		33	2,6982	265	7,2032	262
4	0,8682		5,3776		34	2,7239	257	7,2286	254
							250		247
5	1,0620		5,5714		35	2,4789		7,2533	
6	1,2204		5,7298		36	2,7732	243	7,2773	240
7	1,3542		5,8635		37	2,7968	236	7,3006	233
8	1,4702		5,9794		38	2,8198	230	7,3233	227
9	1,5724		6,0816		39	2,8421	223	7,3453	220
		915		914			218		215
10	1,6639		6,1730		40	2,8639		7,3668	
11	1,7466	827	6,2556	826	41	2,8851	212	7,3876	208
12	1,8221	755	6,3310	754	42	2,9058	207	7,4080	204
13	1,8916	695	6,4004	694	43	2,9260	202	7,4278	198
14	1,9559	643	6,4646	642	44	2,9457	197	7,4471	193
		598		597			193		190
15	2,0157		6,5243		45	2,9650		7,4651	
16	2,0717	560	6,5801	558	46	2,9839	189	7,4846	185
17	2,1243	526	6,6326	525	47	3,0023	184	7,5026	180
18	2,1738	495	6,6820	494	48	3,0203	180	7,5202	176
19	2,2207	469	6,7287	467	49	3,0379	176	7,5374	172
		444		442			173		169
20	2,2651		6,7229		50	3,0552		7,5543	
21	2,3074	423	6,8151	422	51	3,0720	168	7,5707	164
22	2,3477	403	6,8552	401	52	3,0886	166	7,5868	161
23	2,3862	385	6,8935	383	53	3,1048	162	7,6026	158
24	2,4230	368	6,9301	366	54	3,1208	160	7,6181	155
		353		351			156		152
25	2,4583		6,9652		55	3,1364		7,6333	
26	2,4923	340	6,9990	338	56	3,1518	154	7,6482	149
27	2,5249	326	7,0314	324	57	3,1668	150	7,6627	145
28	2,5563	314	7,0626	312	58	3,1816	148	7,6770	143
29	2,5867	304	7,0927	301	59	3,1961	145	7,6910	140
		292		290			143		138

SUITE DE LA TABLE XVII.

T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.	T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.
1h0m	3,2104	140	7,7048	135	1h30m	3,5501	91	8,0252	83
1	3,2244	138	7,7183	133	31	3,5592	90	8,0335	82
2	3,2382	136	7,7316	131	32	3,5682	88	8,0417	80
3	3,2518	133	7,7447	127	33	3,5770	88	8,0497	80
4	3,2651		7,7574		34	3,5858		8,0577	
		131		126			87		79
5	3,2782	129	7,7700	123	35	3,5945	85	8,0656	76
6	3,2911	127	7,7823	122	36	3,6030	85	8,0732	77
7	3,3038	125	7,7945	119	37	3,6115	84	8,0809	75
8	3,3163	123	7,8064	117	38	3,6199	82	8,0884	74
9	3,3286		7,8181		39	3,6281		8,0958	
		121		115			82		73
10	3,3407	119	7,8296	113	40	3,6363	81	8,1031	72
11	3,3526	118	7,8409	112	41	3,6444	80	8,1103	71
12	3,3644	116	7,8521	110	42	3,6524	79	8,1174	70
13	3,3760	114	7,8631	108	43	3,6603	78	8,1244	69
14	3,3874		7,8739		44	3,6681		8,1313	
		112		105			77		67
15	3,3986	111	7,8844	105	45	3,6758	77	8,1380	68
16	3,4097	109	7,8949	102	46	3,6835	75	8,1448	65
17	3,4206	108	7,9051	101	47	3,6910	75	8,1513	66
18	3,4314	106	7,9152	100	48	3,6985	74	8,1579	64
19	3,4420		7,9252		49	3,7059		8,1643	
		105		98			73		63
20	3,4525	104	7,9350	97	50	3,7132	73	8,1706	63
21	3,4629	102	7,9447	95	51	3,7205	71	8,1769	61
22	3,4731	100	7,9542	93	52	3,7276	71	8,1830	61
23	3,4831	100	7,9635	93	53	3,7347	70	8,1891	60
24	3,4931		7,9728		54	3,7417		8,1951	
		98		90			70		60
25	3,5029	97	7,9818	90	55	3,7487	69	8,2011	58
26	3,5126	95	7,9908	87	56	3,7556	68	8,2069	58
27	3,5221	95	7,9995	88	57	3,7624	67	8,2127	56
28	3,5316	93	8,0083	85	58	3,7691	67	8,2183	56
29	3,5409	92	8,0168	84	59	3,7758	66	8,2239	55

SUITE DE LA TABLE XVII.

T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.	T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.
2h 0m	3,7824	65	8,2294	54	2h 30m	3,9533	49	8,3623	34
1	3,7889	65	8,2348	54	31	3,9582	49	8,3657	34
2	3,7954	64	8,2402	53	32	3,9631	48	8,3691	33
3	3,8018	63	8,2455	52	33	3,9679	48	8,3724	33
4	3,8081		8,2507		34	3,9727		8,3757	
		63		51			48		33
5	3,8144	62	8,2558	51	35	3,9775	47	8,3790	32
6	3,8206	61	8,2609	49	36	3,9822	46	8,3822	31
7	3,8267	61	8,2658	49	37	3,9868	46	8,3853	30
8	3,8328	61	8,2707	49	38	3,9914	45	8,3883	30
9	3,8389		8,2756		39	3,9960		8,3913	
		60		48			46		30
10	3,8449	59	8,2804	47	40	4,0006	45	8,3943	29
11	3,8508	58	8,2851	46	41	4,0951	44	8,3972	28
12	3,8566	58	8,2897	46	42	4,0095	44	8,4000	28
13	3,8624	58	8,2943	45	43	4,0139	44	8,4028	28
14	3,8682		8,2988		44	4,0183		8,4056	
		57		44			43		26
15	3,8739	56	8,3032	44	45	4,0226	43	8,4082	26
16	3,8795	56	8,3076	43	46	4,0269	42	8,4108	27
17	3,8851	56	8,3119	43	47	4,0312	42	8,4135	25
18	3,8907	55	8,3162	42	48	4,0354	42	8,4160	25
19	3,8962		8,3204		49	4,0396		8,4185	
		54		41			42		24
20	3,9016	54	8,3245	40	50	4,0438	41	8,4209	24
21	3,9070	53	8,3285	40	51	4,0479	42	8,4233	23
22	3,9123	53	8,3325	39	52	4,0520	40	8,4256	23
23	3,9176	53	8,3364	40	53	4,0560	40	8,4279	22
24	3,9229		8,3404		54	4,0600		8,4301	
		52		38			40		22
25	3,9281	51	8,3442	37	55	4,0640	40	8,4323	21
26	3,9332	51	8,3479	37	56	4,0680	39	8,4344	21
27	3,9383	50	8,3516	35	57	4,0719	38	8,4265	19
28	3,9433	51	8,3551	37	58	4,0757	39	8,4384	21
29	3,9484	49	8,3588	35	59	4,0796	38	8,4405	19

SUITE DE LA TABLE XVII.

T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.	T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.
3h 0m	4,0834	38	8,4424	19	3h 30m	4,1834	28	8,4773	4
1	4,0872	37	8,4443	18	31	4,1862	29	8,4777	4
2	4,0909	37	8,4461	17	32	4,1891	29	8,4781	3
3	4,0946	37	8,4478	18	33	4,1920	28	8,4784	3
4	4,0983		8,4496		34	4,1948		8,4787	
		36		16			28		2
5	4,1019	36	8,4512	16	35	4,1976	27	8,4789	1
6	4,1055	36	8,4528	16	36	4,2003	28	8,4790	2
7	4,1091	36	8,4544	16	37	4,2031	27	8,4792	1
8	4,1127	35	8,4560	14	38	4,2058	27	8,4793	0
9	4,1162		8,4574		39	4,2085		8,4793	
		35		15			27		0
10	4,1197	34	8,4589	13	40	4,2112	26	8,4793	1
11	4,1231	35	8,4602	14	41	4,2138	26	8,4792	2
12	4,1266	34	8,4616	13	42	4,2164	26	8,4790	1
13	4,1300	33	8,4629	12	43	4,2190	26	8,4789	2
14	4,1333		8,4641		44	4,2216		8,4787	
		34		12			25		4
15	4,1367	33	8,4653	11	45	4,2241	25	8,4783	3
16	4,1400	33	8,4664	12	46	4,2266	25	8,4780	4
17	4,1433	32	8,4676	9	47	4,2291	25	8,4776	4
18	4,1465	32	8,4685	10	48	4,2316	25	8,4772	4
19	4,1497		8,4695		49	4,2341		8,4768	
		32		10			25		6
20	4,1529	32	8,4705	9	50	4,2365	24	8,4762	6
21	4,1561	31	8,4714	8	51	4,2389	24	8,4756	6
22	4,1592	31	8,4722	8	52	4,2413	23	8,4750	7
23	4,1623	31	8,4730	8	53	4,2436	24	8,4743	7
24	4,1654		8,4738		54	4,2460		8,4736	
		31		7			23		6
25	4,1685	30	8,4745	6	55	4,2483	23	8,4728	9
26	4,1715	30	8,4751	7	56	4,2506	22	8,4719	9
27	4,1745	20	8,4758	5	57	4,2528	23	8,4710	9
28	4,1775	29	8,4763	5	58	4,2551	22	8,4701	11
29	4,1840	30	8,4768	5	59	4,2573	22	8,4690	10

SUITE DE LA TABLE XVII.

T.	LOG E.	DIFF.	LOG G	DIFF.	T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.
4h0m	4,2595	22	8,4680	11	4h30m	4,3157	15	8,4080	31
1	4,2617	21	8,4669	13	31	4,3172	16	8,4049	30
2	4,2638	21	8,4656	12	32	4,3188	15	8,4019	32
3	4,2659	22	8,4644	12	33	4,3203	15	8,3987	33
4	4,2681	20	8,4632	15	34	4,3218	15	8,3954	34
5	4,2701	21	8,4617	13	35	4,3233	14	8,3920	35
6	4,2722	21	8,4604	14	36	4,3247	15	8,3885	34
7	4,2743	20	8,4590	16	37	4,3262	14	8,3851	37
8	4,2763	20	8,4574	16	38	4,3276	14	8,3814	37
9	4,2783	20	8,4558	16	39	4,3290	14	8,3777	38
10	4,2803	19	8,4542	18	40	4,3304	14	8,3739	38
11	4,2822	20	8,4524	17	41	4,3318	13	8,3701	40
12	4,2842	19	8,4507	18	42	4,3331	13	8,3661	41
13	4,2861	19	8,4489	19	43	4,3344	14	8,3620	43
14	4,2880	19	8,4470	19	44	4,3358	13	8,3579	42
15	4,2899	18	8,4451	21	45	4,3371	12	8,3537	44
16	4,2917	19	8,4430	20	46	4,3383	13	8,3493	44
17	4,2936	18	8,4410	21	47	4,3396	12	8,3449	46
18	4,2954	18	8,4389	22	48	4,3408	13	8,3403	46
19	4,2972	18	8,4367	23	49	4,3421	12	8,3357	48
20	4,2990	17	8,4344	23	50	4,3433	11	8,3309	49
21	4,3007	18	8,4321	24	51	4,3444	12	8,3260	50
22	4,3025	17	8,4297	25	52	4,3456	12	8,3210	50
23	4,3042	17	8,4272	25	53	4,3468	11	8,3160	53
24	4,3059	17	8,4247	26	54	4,3479	11	8,3107	53
25	4,3076	16	8,4221	27	55	4,3490	11	8,3054	55
26	4,3092	16	8,4194	28	56	4,3501	11	8,2999	55
27	4,3108	17	8,4166	27	57	4,3512	10	8,2944	58
28	4,3125	16	8,4139	29	58	4,3522	11	8,2886	58
29	4,3141	16	8,4110	30	59	4,3533	10	8,2828	60

SUITE DE LA TABLE XVII.

T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.	T.	LOG E.	DIFF.	LOG G.	DIFF.
5h0m	4,3543	10	8,2768	61	5h30m	4,3770	4	8,0022	142
1	4,3553	10	8,2707	63	31	4,3774	5	7,9880	147
2	4,3563	10	8,2644	64	32	4,3779	5	7,9733	152
3	4,3573	9	8,2580	66	33	4,3784	4	7,9581	159
4	4,3582		8,2514		34	4,3788		7,9422	
		10		67			4		166
5	4,3592	9	8,2447	69	35	4,3792	4	7,9256	173
6	4,3601	9	8,2378	71	36	4,3796	4	7,9083	180
7	4,3610	9	8,2307	72	37	4,3800	4	7,8903	188
8	4,3619	8	8,2235	75	38	4,3804	4	7,8715	198
9	4,3627		8,2160		39	4,3808		7,8517	
		9		76			3		208
10	4,3636	8	8,2084	78	40	4,3811	3	7,8309	219
11	4,3644	8	8,2006	80	41	4,3814	3	7,8090	232
12	4,3652	8	8,1926	82	42	4,3817	3	7,7858	244
13	4,3660	8	8,1844	84	42	4,3820	3	7,7614	260
14	4,3668		8,1760		44	4,3823		7,7354	
		8		87			3		277
15	4,3676	7	8,1673	89	45	4,3826	2	7,7077	297
16	4,3683	7	8,1584	92	46	4,3828	2	7,6780	320
17	4,3690	8	8,1492	93	47	4,3830	2	7,6460	345
18	4,3698	6	8,1399	97	48	4,3832	2	7,6115	376
19	4,3704		8,1302		49	4,3834		7,5739	
		7		99			2		411
20	4,3711	7	8,1203	102	50	4,3836	1	7,5328	457
21	4,3718	6	8,1101	106	51	4,3837	2	7,4871	511
22	4,3724	7	8,0995	108	52	4,3839	1	7,4362	579
23	4,3731	6	8,0887	112	53	4,3840	1	7,3783	667
24	4,3737		8,0775		54	4,3841		7,3116	
		6		115			1		791
25	4,3743	5	8,0660	120	55	4,3842	1	7,2325	968
26	4,3748	6	8,0540	123	56	4,3843	0	7,1357	
27	4,3754	5	8,0417	127	57	4,3843	1	7,0107	
28	4,3759	6	8,0290	131	58	4,3844	0	6,8347	
29	4,3765	5	8,0159	137	59	4,3844	1	6,5337	

TABLE XVIII.

Pour faciliter le calcul des azimuts par les digressions de la Polaire.

LATITUDE H.	LOG γ.	DIFF.	LOG δ.	DIFF.	LOG ε.	DIFF.
40° 0′	4,72513	363	9,59142	486	8,85740	620
10	4,72876	363	9,59628	487	8,86360	619
20	4,73239	363	9,60115	488	8,86979	619
30	4,73602	365	9,60603	490	8,87598	621
40	4,73967	364	9,61093	491	8,88219	621
50	4,74331		9,61584		8,88838	
		364		492		619
41. 0	4,74695	365	9,62076	494	8,89477	620
10	4,75060	366	9,65270	496	8,90057	621
20	4,75426	366	9,63066	496	8,90698	621
30	4,75792	366	9,63562	498	8,91319	621
40	4,76158	368	9,64060	501	8,91940	622
50	4,76526		9,64561		8,92562	
		368		502		621
42. 0	4,76894	368	9,65063	502	8,93183	622
10	4,77262	368	9,65565	503	8,93805	622
20	4,77630	369	9,66068	505	8,94427	623
30	4,77999	370	9,66573	507	8,95050	623
40	4,78369	370	9,67080	509	8,95673	624
50	4,78739		9,67589		8,96297	
		371		511		624
43. 0	4,79110	371	9,68100	513	8,96921	625
10	4,79481	372	9,68613	515	8,97546	625
20	4,79853	373	9,69128	515	8,98171	626
30	4,80226	373	9,69643	518	8,98797	626
40	4,80559	374	9,70157	520	8,99423	627
50	4,80973		9,70677		9,00050	
		375		521		627
44. 0	4,81348	375	9,71198	522	9,00677	628
10	4,81723	375	9,71720	523	9,01305	628
20	4,82098	377	9,72243	525	9,01933	630
30	4,82475	377	9,72768	526	9,02563	630
40	4,82852	378	9,73291	528	9,03193	630
50	4,83230		9,73822		9,03823	
		378		530		631
45. 0	4,83608	380	9,74352	532	9,04454	633
10	4,83988	380	9,74884	531	9,05087	632
20	4,84368	381	9,75417	535	9,05719	634
30	4,84749	382	9,75952	537	9,06353	635
40	4,85131	382	9,76489	538	9,06988	633
50	4,85513		9,77027		9,07621	
		382		540		637
46. 0	4,85896	384	9,77567	542	9,08258	637
10	4,86280	385	9,78109	543	9,08895	638
20	4,86665	386	9,78652	544	9,09533	639
30	4,87051	386	9,79196	546	9,10172	639
40	4,87437	388	9,79742	549	9,10811	641
50	4,87825		9,80291		9,11452	
		388		552		641
47. 0	4,88213	389	9,80843	553	9,12093	643
10	4,88602	390	9,81396	556	9,12736	643
20	4,88972	391	9,81952	558	9,13379	645
30	4,89383	392	9,82510	559	9,14024	645
40	4,89775	393	9,83069	561	9,14669	647
50	4,90168	394	9,83668	561	9,15316	648

LATITUDE H.	LOG γ.	DIFF.	LOG δ.	DIFF.	LOG ε.	DIFF.
48° 0′	4,90562	395	9,84189	562	9,15964	649
10	4,90957	396	9,84751	565	9,16613	650
20	4,91353	397	9,85316	567	9,17263	652
30	4,91750	398	9,85883	570	9,17915	653
40	4,92148	399	9,86453	571	9,18568	654
50	4,92547		9,87024		9,19222	
		400		574		655
49. 0	4.92947	400	9,87598	575	9,19877	655
10	4,93347	402	9,88173	577	9,20532	657
20	4,93749	404	9,88750	580	9,21189	600
30	4,94153	404	9,89330	582	9,21849	661
40	4,94557	405	9,89912	583	9,22509	666
50	4,94962		9,90495		9,23170	
		407		585		663
50. 0	4,95369	407	9.91080	588	9,23833	664
10	4,95776	409	9,91668	590	9,24497	666
20	4,96185	411	9,92258	592	9,25163	668
30	4,96596	411	9,92850	594	9,25831	669
40	4,97007	412	9,93443	597	9,26500	670
50	4,97419		9,94041		9,27170	
		414		600		672
51. 0	4,97833	415	9,94641	601	9,27842	673
10	4,98248	416	9,95242	601	9,28515	675
20	4,98664	417	9,95844	603	9,29190	677
30	4,99081	419	9,96446	605	9,29866	679
40	4,99500	421	9,97051	609	9,30545	681
50	4,99921		9,97660		9,31226	
		421		610		681
52. 0	5,00342	423	9,98280	613	9,31907	683
10	5,00765	424	9,98893	616	9,32590	685
20	5,01189	425	9,99509	619	9,33275	687
30	5,01614	427	0,00128	622	9,33962	688
40	5,02041	429	0,00750	624	9,34650	691
50	5,02470		0,01374		9,35341	
		430		627		693
53. 0	5,02900	431	0,02001	630	9,36034	695
10	5,03331	432	0,02631	633	9,36729	696
20	5,03763	434	0,03264	635	9,37425	697
30	5,04197	436	0,03999	637	9,38122	700
40	5,04633	437	0,04526	639	9,38822	702
50	5,05070		0,05175		9,39524	
		439		642		705
54. 0	5,05509	441	0,05817	645	9,40229	707
10	5,05950	442	0,06462	648	9,40936	709
20	5,06392	443	0,07110	651	9,41643	711
30	5,06835	445	0,07761	653	9,42354	714
40	5,07280	447	0,08414	655	9,43068	715
50	5,07727	448	0,09069	657	9,43783	716

FIN.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

(Les chiffres romains indiquent le volume de cet Ouvrage, et les chiffres arabes en désignent les pages.)

A

B

d..

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

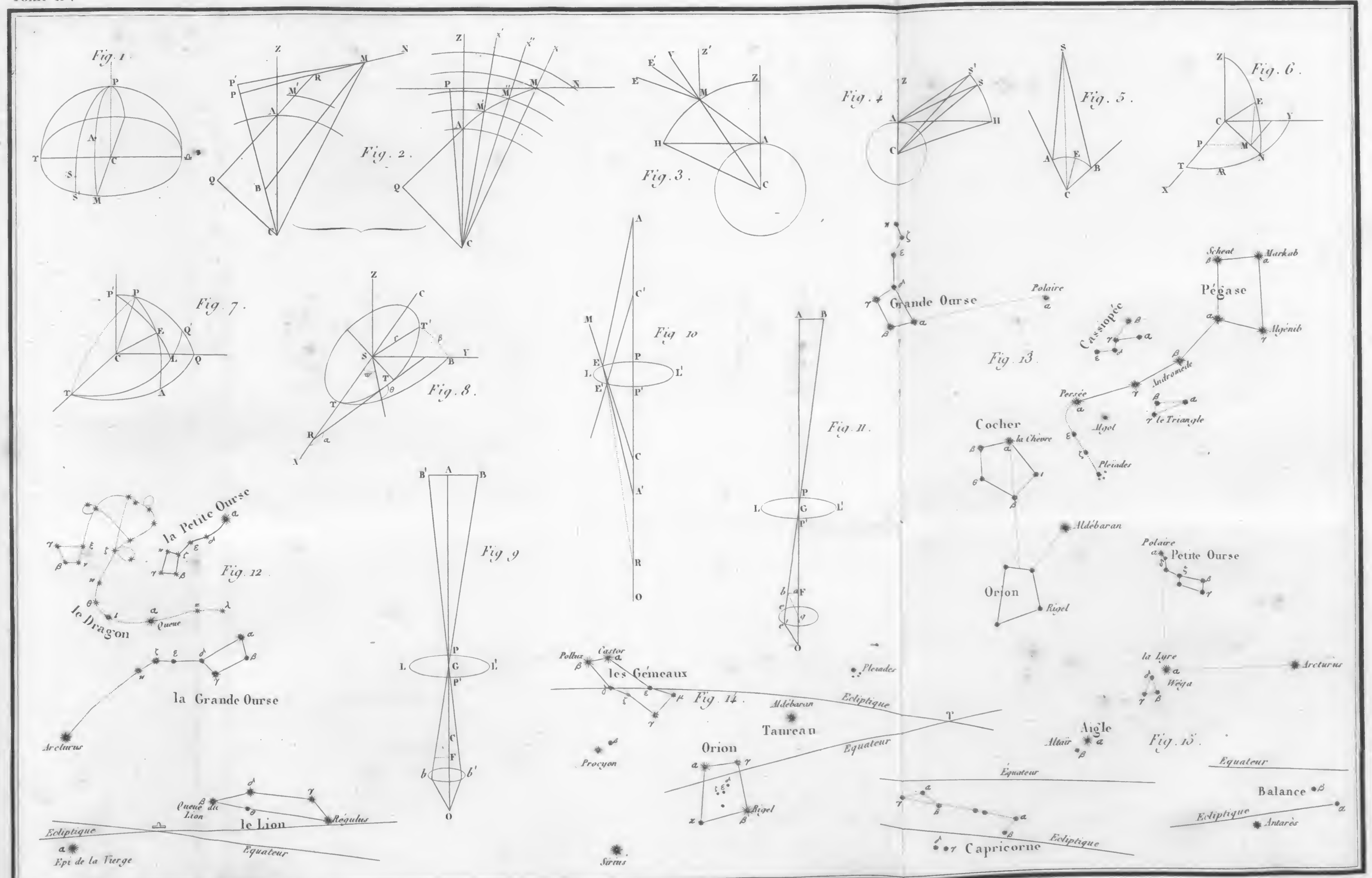
O

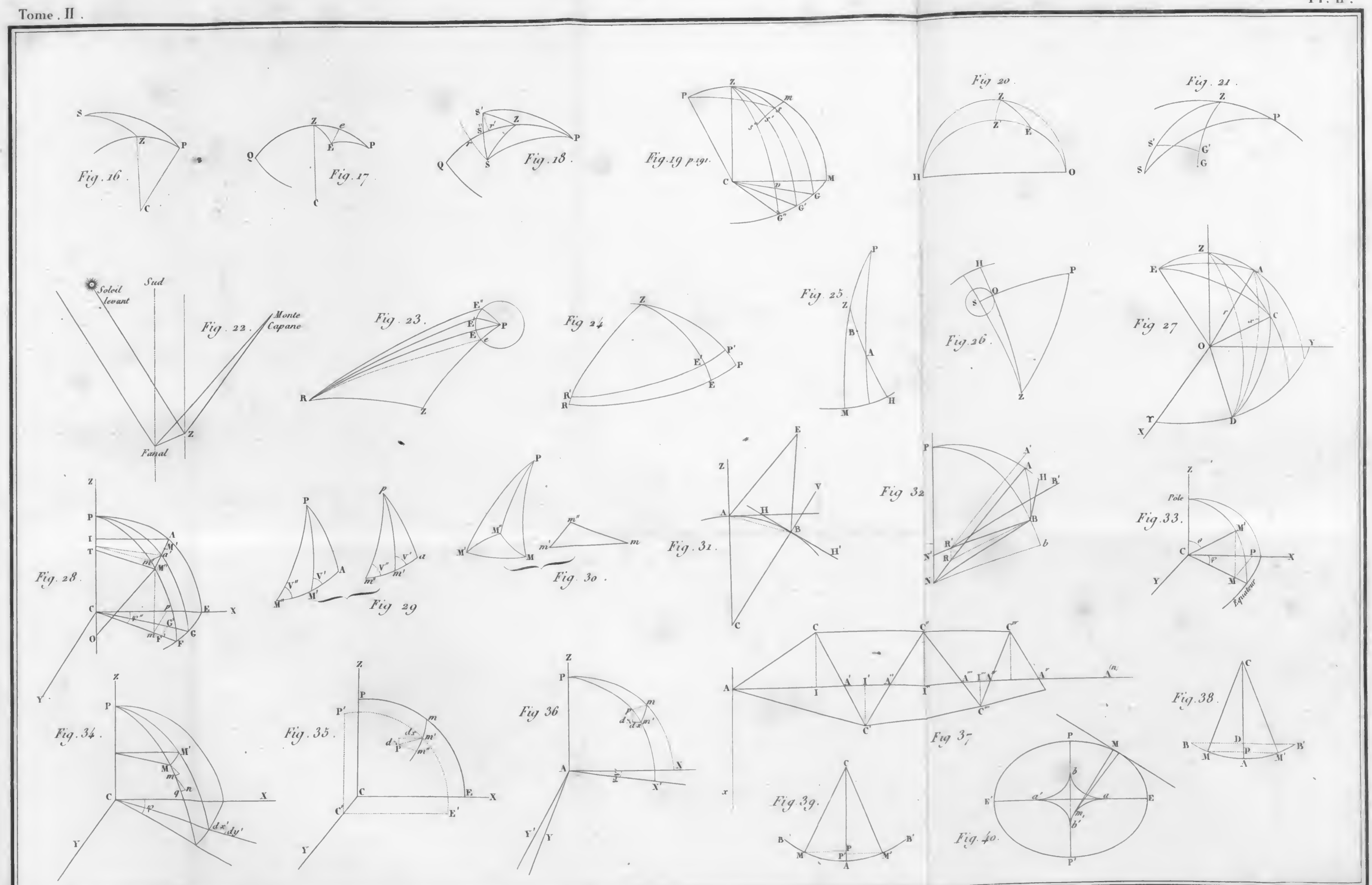
P

Q

R

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Grande Ourse
Polaire
Pégase
Scheat
Markab
Algénib
Cassiopée
Andromède
Persée
Algol
le Triangle
Cocher
la Chèvre
Pleïades
Aldébaran
Orion
Rigel
Petite Ourse
la Petite Ourse
le Dragon
Queue
la Grande Ourse
Arcturus
Queue du Lion
le Lion
Régulus
Ecliptique
Equateur
Epi de la Vierge
Pollux
Castor
les Gémeaux
Procyon
Sirius
Taureau
la Lyre
Wéga
Aigle
Altaïr
Balance
Antarès
Capricorne


Fig . 16 .
Fig . 17 .
Fig . 18 .
Fig . 19 p. 191 .
Fig 20 .
Fig . 21 .
Soleil levant
Sud
Fig . 22 .
Monte Capane
Fanal
Fig . 23 .
Fig 24
Fig . 25
Fig . 26 .
Fig 27
Fig . 28 .
Fig 29
Fig . 30 .
Fig . 31 .
Fig 32
Pôle
Fig . 33 .
Equateur
Fig . 34 .
Fig . 35 .
Fig 36
Fig 37
Fig . 38 .
Fig 39 .
Fig . 40 .



PROJECTION
DE LA
CARTE DE FRANCE.
LA MANCHE
OCÉAN
MÉDITERRANÉE
LONDRES
BRUXELLES
Dunkerque
Lille
Mons
Arras
Amiens
Cherbourg
Rouen
Beauvais
Laon
Mezières
Metz
Bayeux
S.t Lo
Caen
Evreux
PARIS
Châlons
Bar-le-Duc
Strasbourg
Brest
Alençon
Chartres
Troyes
Rennes
Orléans
Auxerre
Bâle
Angers
Nantes
Tours
Puits-Berteau
Bourges
Nevers
Châlon sur Saône
Bréri
Châteauroux
Poitiers
Moulins
Niort
Genève
La Rochelle
Limoges
Saintes
Tour de Cordouan
Angoulême
Puy-de-Dôme
Clermont
Lyon
M.t Colombier
M.t Blanc
M.t Granier
Périgueux
Bordeaux
Bourges
Valence
Agen
Rhodez
Avignon
M.t de Marsan
Alby
Nismes
Montpellier
Toulouse
Tour de Borda
Bayonne
Marseille
Toulon
Carcassonne
Tarbes
Perpignan
Barcelone

